

Chapitre 4

Théorie de la commande

Étant donné un système physique que l'on veut contrôler et un comportement du système qu'on veut obtenir, faire du contrôle revient à construire des lois de commande telles que le système soumis à ces lois ie le système en boucle fermée présente le comportement souhaité. Il reste néanmoins, que cette procédure n'est possible que si le système en question est commandable, dans le cas contraire, il faudrait que les modes non commandables soient stables.

4.1 Commandabilité des systèmes continus

Un des principaux buts de l'automatique est d'établir des lois de commande pour qu'un système évolue selon un objectif prédéterminé. Il faut pour cela que le système puisse être commandable. Intuitivement, la propriété de commandabilité signifie qu'on peut amener le système d'un état vers un autre au moyen d'une commande en boucle ouverte. À l'inverse, la non commandabilité traduit que certains états sont inatteignables quelle que soit la commande.

4.2 Commandabilité des systèmes linéaires

Dans le cas des systèmes linéaires commandé

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

$$y = Cx \quad (4.2)$$

où $A_{n \times n}$ est la matrice d'état, $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $B_{n \times m}$ la matrice de commande, u les contrôles appartenant à un ensemble de contrôles admissibles U , $C_{p \times n}$ la matrice de sortie et $y \in \mathbb{R}^p$ les sorties du système.

Définition 4.1. *On dit que le système (4.1) est commandable si pour tout couple (x_0, x_d) de $\mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et une commande u définie sur $[0, T]$, qui amène le système d'un état initial $x(0) = x_0$ vers un état désiré $x(T) = x_d$.*

4.2.1 Critère de commandabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la commandabilité des systèmes linéaires due à Kalman.

Théorème 4.1. *Le système linéaire (4.1) est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité*

$$\mathbf{C} = (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \quad (4.3)$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, B) est commandable.

Dans le cas d'un système linéaire commandable, on cherche à synthétiser des régulateurs qui rendent l'origine asymptotiquement stable. Une façon de procéder est de construire des lois de contrôle par retour d'état.

4.2.2 Stabilisation par retour d'état

On appelle bouclage d'état linéaire ou régulateur linéaire du système (4.1) une loi de commande du type

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.4)$$

où $K_{m \times n}$ est dite matrice des gains de contre-réaction.

Lorsque la valeur de $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$ alors le bouclage est dit statique figure 4.1.

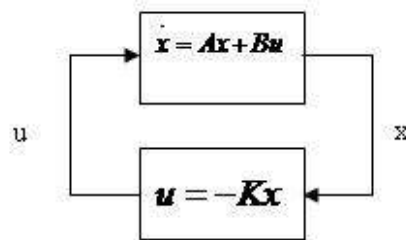


FIGURE 4.1 – Stabilisation par retour d'état statique.

La matrice des gains peut être déterminée de plusieurs manières : par exemple par placement de pôles.

Synthèse par placement de pôles Lorsque le système est commandable, le principe de placement de pôles consiste à déterminer une loi de commande $u = -Kx$ telle que :

$\sigma(A - BK) = \sigma_d$, où σ est le spectre de $(A - BK)$ et σ_d est le spectre désiré.

La difficulté de cette approche réside dans la détermination de ce spectre puisqu'il n'existe pas de méthodologie générale et définitive. Toutefois, cette méthode offre la possibilité de placer les pôles en boucle fermée n'importe où dans le demi plan négatif, sans se soucier de l'emplacement des pôles en boucle ouverte, ce qui permet de contrôler le temps de réponse. Cependant, si les pôles sont placés trop loin dans

le demi plan négatif, les valeurs de K seront très grandes et peuvent causer des problèmes de saturation qui peuvent engendrer une instabilité.

Exercice : Considérons le système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

Déterminer une loi de commande de la forme :

$$u(x) = -Kx + v$$

telle que les pôles du système en boucle fermée se trouvent en -1 et -2 dans le plan complexes et calculer v telle que $x_1(t) = 3$ lorsque $t \rightarrow \infty$

réécrivons le système sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

• **Commandabilité :** $C = [B \ AB]$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \det C \neq 0 \quad \Rightarrow \text{sys commandable}$$

$$u(x) = -Kx + v$$

On s'occupe d'abord du problème de stabilisation ensuite de celui du suivi de consigne

$$u(x) = -Kx$$

Placement de pôles :

$$\begin{aligned}\sigma(A - BK) &= \sigma_d = \{-1, -2\} \\ \sigma(A - BK) &= |\lambda I - (A - BK)|\end{aligned}$$

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - (A - BK)| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 & \lambda + k_2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda + k_2) + k_1 \equiv (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$= \lambda^2 + k_2\lambda + k_1 \equiv \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

d'où

$$k_1 = 2, k_2 = 3$$

et

$$u(x) = -2x_1 - 3x_2$$

Pour le suivi de consigne, $u(x)$ devient

$$u(x) = -2x_1 - 3x_2 + v$$

En boucle fermée :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-2x_1 - 3x_2 + v] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + v \end{aligned}$$

en régime permanent

$$x_1(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -2x_1 - 3x_2 + v = 0 \Rightarrow v = 6$$

Finalement la commande linéaire est :

$$u(x) = -2x_1 - 3x_2 + 6$$

Remarque 4.1. *La loi de commande u est déterminée en supposant que le vecteur d'état x est disponible, en fait, cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée, car parfois, certains états ne sont pas accessibles, soit parce que c'est difficile, voire impossible de les mesurer technologiquement ou que cela revient trop cher économiquement. Dans ce cas, on procède à une reconstruction des états manquants.*

Reconstruction d'état Le reconstituteur d'état figure 4.2 ou l'observateur est un système permettant de reconstruire les états à partir des grandeurs connues c'est à dire des entrées et des sorties du processus tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) \rightarrow 0$$

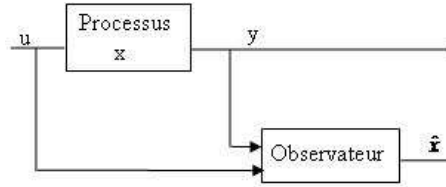


FIGURE 4.2 – Reconstructeur d'état

De même cette opération n'est possible que si le système est observable c'est à dire la matrice d'observabilité de Kalman

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Pour les systèmes linéaires, Luenberger, propose la structure d'observateur suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (4.5)$$

qui correspond à une simulation de la copie du système constamment corrigée par l'écart entre la sortie observée et la sortie reconstruite.

Si on définit $\tilde{x} = \hat{x} - x$, il vient : $\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$

Le problème est de déterminer L de sorte que $(\hat{x}(t) - x(t)) \rightarrow 0$ pour des conditions initiales différentes $\hat{x}(0) \neq x(0)$.

L'analyse est immédiate, on aura $\tilde{x} \rightarrow 0$, si L est déterminée telle que $(A-LC)$ soit stable. On reconnaît un problème dual à celui de la stabilisation. Ainsi, toutes les techniques utilisables pour la commandabilité peuvent être mise en oeuvre pour la reconstruction d'état en remplaçant A par A^t , B par B^t et L par L^t , avec une différence lors du choix du spectre de l'observateur qui doit être plusieurs fois plus

rapide que celui de la commande pour assurer la convergence de l'estimation avant l'application de la commande. Cependant, si ce spectre est choisi trop loin dans le demi plan négatif, l'observateur sera très rapide avec une bande passante plus large qui sera sensible aux bruits de mesures.

Stabilisation par retour d'état reconstruit : bouclage dynamique Le schéma de stabilisation par retour d'état reconstruit est donné par la figure 4.3 ci dessous :

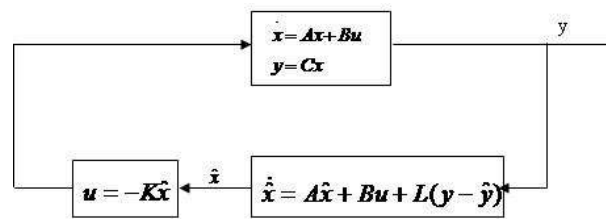


FIGURE 4.3 – Stabilisation par retour d'état reconstruit

La stabilité de la loi de commande ainsi élaborée est assurée par le principe de séparation dans le sens que les gains de la commande et de l'observateur sont calculés séparément.

Malheureusement, le principe de séparation n'est plus valable en non linéaire. En effet, on peut avoir le cas où un régulateur et un observateur sont asymptotiquement stables et pourtant la commande par retour d'état reconstruit renvoie les trajectoires à l'infini. Aussi, il est nécessaire de considérer le problème de la commande et de l'observation simultanément.

De plus, ces deux problèmes sont de complexité égale et sont complètement duaux pour les systèmes linéaires, alors qu'en non linéaire, la commande est nettement plus complexe que l'observation. Cela est dû aussi bien à des contraintes théoriques qu'à des problèmes techniques tels que la saturation de la commande (notamment l'impossibilité d'utiliser des gains trop grands qui "écraseraient" les termes non linéaires de la dynamique dont on connaîtrait peu ou mal l'évolution ou qu'on ne saurait maîtriser autrement) ; ce que nous ne rencontrons pas en observant ces systèmes car le gain d'observabilité est quelque chose de fictif : une équation différentielle, qui est résolue sur un processeur, souffre moins de la saturation.

4.3 Concepts de commandabilité des systèmes non linéaires

Encore une fois, cette notion qui paraît simple et intuitive pour les systèmes linéaires va se compliquer pour les systèmes non linéaires : par exemple, il existe plusieurs définitions en relation avec la commandabilité.

Les premiers résultats de commandabilité pour les systèmes non linéaires sont dûs aux travaux de Sussmann et Jurdjevic, à Lobry, Hermann et Krener.

Dans le cas général, un système non linéaire commandé est représenté par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.6}$$

où $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et f, h de classe C^∞ .

Définition 4.2. Soit U un sous ensemble de M et soient $(x_0, x_d) \in U$. On dit que x_d est U -accessible depuis x_0 ce qu'on note par $x_d A_u x_0$, s'il existe un contrôle u mesuré et borné et un temps fini T , tels que la solution $x(t)$ de (4.6) pour $t \in [0, T]$, satisfait :

$$x(0) = x_0, x(T) = x_d \text{ et } x \in U \text{ pour } t \in [0, T]$$

On note $A(x_0)$ l'ensemble des points de M accessibles depuis x_0

$$A(x_0) = \{x \in M / x A_M x_0\}\tag{4.7}$$

Définition 4.3. Le système (4.6) est commandable en x_0 si $A(x_0) = M$ et il est dit commandable si $A(x_0) = M$ pour tout $x \in M$.

Lorsqu'un système est commandable en x_0 , il peut être nécessaire de parcourir une distance considérable ou un temps important pour atteindre un point voisin de x_0 . Ceci nous amène à introduire une version locale du concept de commandabilité.

Définition 4.4. Le système (4.6) est dit localement commandable en x_0 , si pour tout voisinage U de x_0 , $A_u(x_0)$ est aussi un voisinage de x_0 , où

$$A_u(x_0) = \{x \in U / x A_u x_0\}\tag{4.8}$$

Il est dit localement commandable s'il est localement commandable en tout $x \in M$.

On peut affaiblir la notion de commandabilité :

Définition 4.5. Le système est dit faiblement commandable en x_0 , si $W A(x_0) = M$, il est dit faiblement commandable s'il est faiblement commandable en tout $x \in M$.

Remarque 4.2. $W A_u$ est le plus petit ensemble contenant les paires U -accessibles (c'est à dire $x' W A_u x''$ si et seulement s'il existe $x^0, \dots, x^k$, telle que $x^0 = x'$, $x^k = x''$ et soit $x^i A_u x^{i-1}$ ou $x^{i-1} A_u x^i$ pour $i = 1, \dots, k$).

Le concept de faible commandabilité est un concept global qui ne reflète pas le comportement d'un système au voisinage d'un point x_0 , aussi, il est nécessaire d'introduire le concept de commandabilité locale faible

Définition 4.6. Le système (4.6) est dit localement faiblement commandable en x_0 si pour tout voisinage U de x_0 , $W A_u(x_0)$ est un voisinage de x_0 et il est dit localement faiblement commandable s'il l'est en tout $x \in M$.

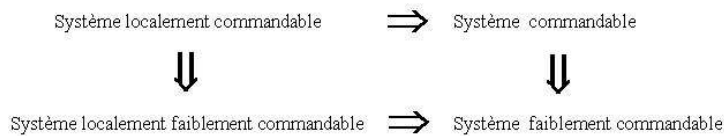


FIGURE 4.4 – Relation entre les différents concepts de commandabilité en non linéaire.

Les différentes notions de commandabilité sont liées par le diagramme de la figure 4.4.

Comme pour les systèmes linéaires, on peut se demander s’il existe un équivalent de la condition de rang de commandabilité ?

En fait, pour les systèmes non linéaires affine en la commande

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.9}$$

la condition de rang est définie comme suit :

Définition 4.7. *On dit que le système (4.9) vérifie la condition du rang si la matrice de commandabilité non linéaire*

$$\mathbf{C}_{fg} = [g(x) \quad ad_f g(x) \quad ad_f^2 g(x) \quad \dots \quad ad_f^{n-1} g(x)]\tag{4.10}$$

est de rang n pour tout x .

où $ad_f g(x)$ est le crochet de Lie de f et g défini par le champ de vecteur :

$$\begin{aligned}[f, g] &= L_f g - L_g f \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g\end{aligned}$$

avec $L_f g$ la dérivée de Lie de g le long de f et $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ les matrices jacobienues.

On définit aussi les champs de vecteurs

$$\begin{aligned}ad_f g &= [f, g] \\ ad_f^k g &= [f, ad_f^{k-1} g], \quad k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Théorème 4.2. *Si le système (4.9) vérifie la condition du rang alors ce système est localement faiblement commandable.*

Ce théorème met en évidence l’avantage de la faible locale commandabilité par rapport aux précédentes formes de commandabilité puisque la vérification d’un tel concept se réduit à un simple critère algébrique.

Remarque 4.3. Dans le cas où le rang de la matrice de commandabilité est inférieur à n , alors le système n'est plus complètement commandable. On montre que dans ce cas, il est possible de trouver une matrice de changement de base pouvant effectuer la décomposition de Kalman afin de séparer les modes commandables des modes non commandables. Le système peut encore être stabilisable si les modes non commandables sont stables.

Exercice : Étudier la commandabilité du système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3 + e^{x_1}u\end{aligned}$$

- Commandabilité?

$$C = [g \quad ad_{fg}]$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x_1} \end{bmatrix}$$

$$ad_{fg} = [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x_1}(-x_1 + 4x_2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{x_1} \\ -3x_2^2 e^{x_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}[f, g] &= \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{x_1}(-x_1 + 4x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4e^{x_1} \\ -3x_2^2 e^{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4e^{x_1} \\ e^{x_1}(-x_1 + 4x_2 + 3x_2^2) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Le sys est commandable si le rang de C est complet ie $\det C \neq 0$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -4e^{x_1} \\ e^{x_1} & e^{x_1}(-x_1 + 4x_2 + 3x_2^2) \end{bmatrix}$$

$$\det C = 4e^{2x_1} \neq 0 \quad \forall x$$

Par conséquent, le système est localement faiblement commandable pour tout x .

Les techniques de commande permettant de construire des lois de contrôle pour la stabilisation des systèmes sont nombreuses et variées, la partie suivante présente quelques unes.

4.4 Synthèse de régulateur pour les systèmes non linéaires

La synthèse de lois de commande pour les systèmes non linéaires est difficile, par la suite nous proposons quelques techniques de contrôle pour la classe des systèmes non linéaires affine en la commande de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R} \quad (4.11)$$

La linéarité est une propriété qui rend les systèmes plus faciles à commander, d'autant plus que les techniques de contrôle linéaires sont plus anciennes et plus largement développées, on peut citer à titre d'exemple : la commande par placement de pôles, la commande optimale, l'approche fréquentielle, ..., cette liste est loin d'être complète. Aussi, il peut être intéressant de faire apparaître cette propriété pour les systèmes non linéaires. Les procédures les plus connues sont brièvement rappelées par la suite.

4.4.1 Stabilisation locale

Considérons le système commandé (4.11) de la forme

$$\dot{x} = f(x, u) \quad f(0, 0) = 0$$

En présence de la commande l'approximation linéaire autour de l'équilibre devient

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.12)$$

où les matrices A et B sont définies par

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0).$$

La forme (4.12) obtenue justifie l'utilisation des techniques de contrôle linéaires citées plus haut.

Malheureusement, le système linéarisé résultant est typiquement valide qu'autour du point considéré de sorte que le contrôleur associé n'est valide qu'au voisinage de ce point conduisant à des commandes locales ; de plus, la détermination du domaine de linéarité n'est pas évidente. Ainsi, bien que cette méthode soit simple et très pratique, il est nécessaire de procéder autrement afin d'élargir le domaine de validité des contrôleurs synthétisés.

Exercice : Soit le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3 + 2u \\ y &= \sin x_1 \end{aligned}$$

Déterminer la loi de commande linéaire qui permet de placer les pôles du système en boucle fermée en -1 et -2

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ -x_1 - x_2^3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est : $C = [g \quad ad_{fg}]$

$$ad_{fg} = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -3x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \det \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 6x_2^2 \end{bmatrix} = -16 \neq 0 \Rightarrow \text{le système non linéaire est commandable}$$

linéarisé autour de $(0,0)$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$\sigma(A - BK) = \sigma_d = \{-1, -2\}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 - 2k_1 & -2k_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\lambda I - (A - BK)| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 - 2k_1 & -2k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 1 + 2k_1 & \lambda + 2k_2 \end{bmatrix} \right| \equiv (\lambda + 1)(\lambda + 2) \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2k_2) + 4 + 8k_1 \equiv \lambda^2 + 3\lambda + 2 \quad (4.13) \\ &= \lambda^2 + (2k_2 + 1)\lambda + 2k_2 + 4 + 8k_1 \equiv \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2k_2 + 1 &= 3 \Rightarrow k_2 = 1 \\ 2k_2 + 4 + 8k_1 &= 2 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$u(x) = 0.5x_1 - x_2$$

Pour bénéficier encore de la théorie de contrôle linéaire, il existe une technique de commande basée sur des changements de coordonnées et des retours d'état linéarisants permettant de rendre les dynamiques non linéaires équivalentes à des dynamiques linéaires : c'est la linéarisation par bouclage.

4.4.2 Linéarisation exacte par bouclage

Lorsqu'on transforme un système via un changement de coordonnée, certaines de ses propriétés restent inchangées, par exemple, si un système est instable alors le système transformé est aussi instable, si un système est commandable, alors le système transformé est aussi commandable ; par contre quelques systèmes semblent non linéaires dans certaines coordonnées alors qu'ils peuvent apparaître sous une forme linéaire dans d'autres coordonnées et sous un certain feedback.

Aussi, il est intéressant lorsque cela est possible d'approcher des dynamiques par d'autres dynamiques plus facile à étudier. Cette procédure est faite à travers des difféomorphismes.

Difféomorphisme Un difféomorphisme est un changement de coordonnées non linéaire de la forme $z = \Phi(x)$.

où Φ est une fonction vectorielle

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \Phi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \Phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

possédant les propriétés suivantes :

- $\Phi(x)$ est une application bijective
- $\Phi(x)$ et Φ^{-1} sont des applications différentiables.

Si ces propriétés sont vérifiées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors Φ est un difféomorphisme global sinon Φ est un difféomorphisme local.

Proposition 4.1. *Si la matrice jacobienne de Φ , évaluée au point $x = x_0$ est non singulière alors $\Phi(x)$ est un difféomorphisme local.*

Deux procédures de linéarisation par bouclage sont possibles :

4.4.3 Linéarisation exacte par bouclage entrée-état

Étant donné un système affine en la commande :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.14)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, f et g sont supposées régulières.

- Il s'agit de trouver une transformation

$$z = \Phi(x)$$

et une commande

$$u(x) = \alpha(x) + \beta(x)v$$

telles que dans les nouvelles coordonnées, le système initial devient :

$$\dot{z} = Az + Bv$$

où A et B sont des matrices constantes.

- Ainsi, l'idée est de transformer le système (4.14) à travers un changement de coordonnées $z = \Phi(x)$ telle que dans les nouvelles coordonnées z , le système (4.14) s'exprime par :

$$\dot{z} = Az + \Psi(z) + Bu \quad (4.15)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \Psi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi(z) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Plus précisément :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_n \\ \psi(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Si une telle transformation $z = \Phi(x)$ existe, alors on peut appliquer un changement de contrôle

$$u(x) = -\Psi(z_1, \dots, z_n) + v \quad (4.16)$$

tel que le système transformé parait linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v \end{aligned} \tag{4.17}$$

v est un nouveau contrôle linéaire pouvant être déterminé par une méthode de synthèse linéaire telle que

$$v = -Kz$$

en boucle fermée le système en z devient :

$$\dot{z} = (A - BK)z \tag{4.18}$$

K est une matrice de gain choisie telle que $(A - BK)$ soit stable.

Dans ce cas, on dit que la transformation $z = \Phi(x)$ et le changement de contrôle $u(x)$ ont permis une linéarisation exacte du système (4.14) par bouclage ou par feed-back.

- **Question** : Comment obtenir le changement de coordonnées

$$z = \Phi(x)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{bmatrix}$$

- **Réponse** : Nous pouvons démontrer qu'une transformation possible et pas unique est donnée par :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \Phi_3(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ L_f \Phi_1(x) \\ L_f \Phi_2(x) \\ \vdots \\ L_f \Phi_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ L_f \Phi_1(x) \\ L_f^2 \Phi_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \Phi_1(x) \end{bmatrix}$$

Ainsi, trouver $\Phi(x)$ revient à trouver $\Phi_1(x)$ et par récurrence on trouve les autres composantes $\Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$.

Il reste maintenant à déterminer $\Phi_1(x)$?

Une façon de déterminer $\Phi_1(x)$ est de résoudre le système :

$$\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x} = (0 \ 0 \ \dots \ 1) C_{fg}^{-1}(x)$$

où $C_{fg}^{-1}(x)$ est la matrice inverse de commandabilité (supposée inversible si le système est commandable).

Par conséquent $\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x}$ peut être égale à la dernière ligne de la matrice inverse de commandabilité.

Preuve

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in R^n; u \in R$$

on cherche

$$z = \Phi(x) \longrightarrow \dot{z} = Az + \Psi(z) + Bu \quad (4.19)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad \Psi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \Psi(z) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z &= \phi(x) \\ \dot{z} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x)u \end{aligned} \quad (4.20)$$

De (4.19), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 & \text{c'est ce qu'on cherche} \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ z_{n-1} &= z_n \\ z_n &= \Psi(z) + u \end{aligned}$$

Si on compare (4.19) à (4.20), on aura :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) = AZ + \Psi(z) \quad (4.21)$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = B \quad (4.22)$$

de (4.22), on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Pour la 1ere ligne, il vient :

$$\underbrace{\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} g_1(x) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} g_2(x) + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} g_n(x)}_{L_g \phi_1(x)=0} = 0 \quad (4.24)$$

et par itérations, on peut déduire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} L_g \phi_i(x) &= 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ L_g \phi_n(x) &= 1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

à partir de (4.21)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_2(z) \\ \phi_3(z) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi(\phi(x)) \end{bmatrix}$$

De même :

$$\begin{aligned} L_f \phi_i(x) &= \phi_{i+1}(x) & i = 1, \dots, n-1 \\ L_f \phi_n &= \Psi(\phi(x)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \phi_3(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ L_f \phi_1(x) \\ L_f \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_f \phi_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ L_f \phi_1(x) \\ L_f L_f \phi_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_f^{n-1} \phi_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ L_f \phi_1(x) \\ L_f^2 \phi_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_f^{n-1} \phi_1(x) \end{bmatrix}$$

De (4.25) et (4.26), on peut écrire :

$$\begin{aligned} [L_g \phi_1(x) \quad L_g \phi_2(x) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad L_g \phi_{n-1}(x) \quad L_g \phi_n] &= [0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad 1] \\ [\frac{\partial \phi_1}{\partial x} g(x) \quad L_g L_f \phi_1(x) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad L_g L_f^{n-2} \phi_1 \quad L_g L_f^{n-1} \phi_1] &= [0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad 1] \\ [\frac{\partial \phi_1}{\partial x} ad_f^0 g(x) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x} ad_f^1 g(x) \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x} ad_f^{n-2} g(x) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x} ad_f^{n-1} g(x)] &= [0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad 1] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Pour écrire la dernière ligne de (4.27), il nous faut les rappels suivants :

Rappel 1 : Identité de *Liebniz-Jacobi*

$$L_{[f,g]}h = L_gL_fh - L_fL_g h \Rightarrow L_gL_fh = L_fL_g h + L_{[f,g]}h$$

Rappel 2 : crochet de *Lie* successifs :

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x) \\ ad_f^1 g(x) &= [f, g] \\ ad_f^2 g(x) &= [f, [f, g]] \\ ad_f^k g(x) &= [f, ad_f^{k-1} g(x)] \end{aligned}$$

tenant compte de ces rappels et de (4.25) :

$$L_gL_f\phi_1 = L_fL_g\phi_1 + L_{[f,g]}\phi_1 = 0 + L_{ad_f^1 g(x)}\phi_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial x}ad_f^1 g(x) \quad (4.28)$$

de (4.27) :

$$\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} ad_f^0 g(x) & ad_f^1 g(x) & \dots & ad_f^{m-1} g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x} C_{fg}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} C_{fg}^{-1} = q(x)$$

qui est la dernière ligne de la matrice inverse de commandabilité et donc, il va falloir résoudre $\frac{\partial\phi_1}{\partial x} = q(x)$ pour trouver $\phi_1(x)$.

Remarque 4.4. La résolution du système aux dérivées partielles n'est pas facile, de plus la solution n'est pas unique.

Définition 4.8. Un ensemble de m vecteurs indépendants $\{g_1, \dots, g_m\}$ dans Ω est dit involutif si pour tous les i et j le crochet $[g_i, g_j]$ est une combinaison linéaire des vecteurs $g_1, \dots, g_m$, c'est à dire qu'il existe des fonctions α_{ij}^k définies dans Ω telles que

$$[g_i, g_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ij}^k g_k.$$

Autrement dit, si pour tous les f et g dans Ω , alors $[f, g]$ appartient à Ω (Ω est fermée pour le crochet de Lie).

Théorème 4.3. (*Jacubezyk- Respondek*)

Le système (4.14) est entrée-état linéarisable dans un domaine D si et seulement si

1. Le rang de la matrice de commandabilité $C_{fg} = \{g, ad_{fg}, \dots, ad_{fg}^{n-1}\}$ est égal à n pour tout $x \in D$.

2. Le système $\{g, ad_{fg}, \dots, ad_{fg}^{n-2}\}$ est involutif dans D .

Exercice Déterminer le changement de coordonnées et le contrôle linéarisant par feedback le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 10 \sin x_1 + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u$$

Solution

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 10 \sin x_1 + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Commandabilité : $rg \ C = rg[g \ ad_{fg} \ ad_{fg}^2] = n$

$$ad_{fg} = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = -\frac{\partial f}{\partial x} g = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 \cos x_1 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ad_{fg}^2 &= [f, ad_{fg}] = \frac{\partial ad_{fg}}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} ad_{fg} \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 10 \cos x_1 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -100 \\ 900 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & -100 \\ 10 & 100 & 900 \end{bmatrix} \quad \det = 10 \cdot 100 = 1000 \Rightarrow \text{commandable}$$

- Involutivité : l'ensemble $\{g(x), ad_{fg}\}$ involutif?

$$[g, ad_{fg}] = \frac{\partial ad_{fg}}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} ad_{fg} = 0 = 0g + 0ad_{fg} \Rightarrow \text{l'ensemble est involutif}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = [0 \ 0 \ 1] C^{-1} = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.1 \\ -1 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = [0.1 \ 0 \ 0]$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = 0.1 \quad \Rightarrow \phi_1 = 0.1x_1 + c_1$$

particulièrement si on choisit $c_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0.1x_1$

Soit le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= 0.1x_1 = \phi_1 \\
 z_2 &= L_f \phi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 10 \sin x_1 + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} = 0.1x_2 = \phi_2 \\
 z_3 &= L_f \phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} f = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ 10 \sin x_1 + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} = \sin x_1 + 0.1x_3 \\
 \\
 z_1 &= 0.1x_1 & \Rightarrow x_1 = 10z_1 \\
 z_2 &= 0.1x_2 & \Rightarrow x_2 = 10z_2 \\
 z_3 &= \sin x_1 + 0.1x_3 & \Rightarrow x_3 = 10[z_3 - \sin 10z_1]
 \end{aligned}$$

en dérivant ces variables, on obtient un système partiellement linéaire

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= 0.1\dot{x}_1 = 0.1x_2 = z_2 \\
 \dot{z}_2 &= 0.1\dot{x}_2 = 0.1(10 \sin x_1 + x_3) = \sin x_1 + 0.1x_3 = z_3 \\
 \dot{z}_3 &= \dot{x}_1 \cos x_1 + 0.1\dot{x}_3 = x_2 \cos x_1 + 0.1[(-10x_2 - 10x_3) + 10u] \\
 &= x_2 \cos x_1 - x_2 - x_3 + u \\
 &= \underbrace{10z_2 \cos(10z_1) - 10z_2 - 10(z_3 - \sin 10z_1)}_{\Psi(z)} + u
 \end{aligned}$$

la commande $u(z)$ est choisie telle que :

$$\begin{aligned}
 u(z) &= -\Psi(z) + l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3 \\
 &= -10z_2 \cos(10z_1) + 10z_2 + 10(z_3 - \sin 10z_1) + l_1 z_1 + l_2 z_2 + l_3 z_3
 \end{aligned}$$

une fois $u(z)$ déterminée, il faut ensuite revenir à $u(x)$ par le changement de coordonnées inverse car $u(x)$ est la vraie commande du SNL d'origine.

$$u(x) = -x_2 \cos x_1 + x_2 + x_3 + 0.1l_1 x_1 + 0.1l_2 x_2 + l_3(\sin x_1 + 0.1x_3)$$

4.4.4 Linéarisation exacte par bouclage entrée-sortie

Exemple

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 10 \sin x_1 + x_3 \\ -10x_2 - 10x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

avec

$$y = x_1$$

Dérivons y jusqu'à faire apparaître l'entrée u

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = 10 \sin x_1 + x_3 + u \end{aligned}$$

Le degré relatif associé à cet exemple est 2.

Dans ce cas, on ne peut linéariser que le sous système formé des deux premières équations en choisissant u pour éliminer $10\sin x_1$ telle que :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 10\sin x_1 + x_3 + u \end{aligned} \tag{4.29}$$

la commande u est choisie telle que :

$$10\sin x_1 + x_3 + u = l_1 x_1 + l_2 x_2$$

d'où :

$$u(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 - 10\sin x_1 - x_3$$

en boucle fermée :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= l_1 x_1 + l_2 x_2 \\ \dot{x}_3 &= -10x_2 - 10x_3 \end{aligned} \tag{4.30}$$

la troisième dynamique est dite dynamique de zéro dont il faut vérifier la stabilité.

Pour ce système, elle est linéaire et stable car la variable x_2 est bornée et stabilisée et pourrait être vue comme une entrée

de manière générale, le degré relatif associé à un système est le nombre de dérivation successives de la sortie pour faire apparaitre l'entrée. pour un système mono entrée :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{4.31}$$

Dérivons la sortie :

$$\begin{aligned}\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} &= \frac{\partial h}{\partial x} (f + gu) \\ &= \frac{\partial h}{\partial x} (f) + \frac{\partial h}{\partial x} (gu) \\ &= L_f h + L_g h u\end{aligned}$$

Si $L_g h \neq 0$ alors le degré relatif $r = 1$

Si $L_g h = 0$ alors on continue de dériver

$$\begin{aligned}\ddot{y} = \frac{d}{dt} L_f h &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} \dot{x} \\ &= \frac{\partial L_f h}{\partial x} (f + gu) \\ &= L_f^2 h + L_g L_f h u\end{aligned}$$

Si $L_g L_f h \neq 0$ alors le degré relatif $r = 2$

Si $L_g L_f h = 0$ alors on continue de dériver, à l'ordre r :

$$y^{(r)} = L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h u$$

Si $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$ alors le degré relatif est r

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}y &= h(x) \\ \dot{y} &= L_f h(x) \\ \ddot{y} &= L_f^2 h(x) \\ &\vdots \\ y^{(r-1)} &= L_f^{r-1} h(x)\end{aligned}$$

Définition 4.9. *Le degré relatif associé au système (4.31) dans une région $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est donné par l'entier r tel que*

$$\begin{aligned}L_g h(x) &= L_g L_f h(x) = \dots = L_g L_f^{r-2} h(x) = 0 \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0\end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$

L'idée de la linéarisation exacte par bouclage entrée-sortie est de générer des équations linéaires entre la sortie y et une certaine entrée v à travers un difféomorphisme $z = \phi(x)$ constitué de la sortie et de ses dérivées par rapport au temps jusqu'à l'ordre $n - 1$ lorsque le degré relatif r associé à ce système est égal à n .

$$\begin{aligned}\phi(x)_1 &= h(x) \\ \phi(x)_2 &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \phi(x)_n &= L_f^{n-1} h(x)\end{aligned}\tag{4.32}$$

Le système ainsi transformé est écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= L_f^n(\phi^{-1}(z)) + L_g L_f^{n-1}(\phi^{-1}(z))u\end{aligned}\tag{4.33}$$

en choisissant un u de la forme

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1}(\phi^{-1}(z))} (v - L_f^n(\phi^{-1}(z)))\tag{4.34}$$

pour un $L_g L_f^{n-1}(\phi^{-1}(z)) \neq 0$, le système devient

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = v$$

Remarquons que dans ce cas, la forme (4.33) est la même que dans (4.17). En fait, lorsque $r = n$ les deux linéarisations sont équivalentes. Ainsi, les conditions d'application de la deuxième linéarisation seront les mêmes que pour la première.

Évidemment, pour un degré relatif $r < n$, le système n'est plus linéarisable complètement par feedback. Dans ce cas on parle d'une linéarisation partielle par feedback.

Linéarisation partielle par bouclage

Lorsque $r < n$ il n'est possible de linéariser un système de la forme (4.31) que partiellement à travers le difféomorphisme constitué en partie par la sortie $h(x)$ et ses dérivées successives à l'ordre $r - 1$: $z = \phi_i(x)$ pour $1 < i < r$, et complété, par le théorème de Frobenius, par $n - r$ autres fonctions : $\eta = \phi_i(x)$ pour $r + 1 \leq i \leq n$, choisies de telle manière que $L_g \phi_i = 0$ pour $r + 1 \leq i \leq n$

Dans les coordonnées (z, η) les équations du système sont :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= L_f^r(z, \eta) + L_g L_f^{r-1}(z, \eta)u \\
 \dot{\eta} &= q(z, \eta) \\
 \text{avec} \\
 y &= z_1
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

cette forme est dite forme normale.

Pour un $L_g L_f^{n-1}(z, \eta) \neq 0$, u peut être choisie encore de la forme

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1}(z, \eta)}(v - L_f^r(z, \eta))$$

dans ce cas, le système prend la forme

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r \\
 \dot{z}_r &= v \\
 \dot{\eta} &= q(z, \eta)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Clairement, il apparaît que ce système est composé d'un sous système linéaire de dimension r commandable par v et "responsable" du comportement entrée-sortie et d'un sous système non linéaire de dimension $n - r$ dont le comportement n'est pas affecté par la commande.

Il s'en suit que le comportement global du système dépend de cette dynamique interne et que la vérification de sa stabilité est une étape indispensable.

En fait, il a été montré que l'étude de la stabilité de la dynamique interne peut être ramenée à celle de la dynamique de zéro. Celle ci est obtenue lorsqu'on applique une commande u qui porte la sortie y à zéro et l'y maintient.

Autrement dit, la dynamique de zéro est donnée par le système $\dot{\eta} = q(0, \eta)$.

Remarque 4.5. 1. Lorsque $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ est (localement) asymptotiquement stable alors le système associé est dit (localement) à minimum de phase à l'équilibre x^* .

2. Lorsque $\dot{\eta} = q(0, \eta)$ est instable alors le système associé est dit à non minimum de phase.

Résumé

- Les deux méthodes de linéarisation exacte par feedback sont connues pour leur manque de robustesse car si $\Psi(z)$ n'est pas connue avec précision, on ne peut pas l'éliminer complètement.
- $C_{fg}^{-1}(x)$ est lourd à faire mathématiquement.
- De plus, nécessite l'intégration des équations aux dérivées partielles.
- La linéarisation entrée-sortie peut être partielle lorsque $r < n$ et donne lieu à une dynamique de zéro dont il est difficile de vérifier la stabilité!

4.4.5 Méthode directe de *Lyapunov* pour les systèmes dissipatifs

Considérons à nouveau le système (4.14)

Définition 4.10. *Un système affine en la commande est dit dissipatif s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ telle que $L_f V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

Supposons que (4.14) est dissipatif, alors il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ telle que $L_f V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, de plus :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} \\
 &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \\
 &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} (f(x)) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} (g(x)u) \\
 &= L_f V(x) + L_g V(x)u
 \end{aligned}$$

Si on choisit :

$$u(x) = -\alpha L_g V(x)$$

où $\alpha > 0$, alors l'origine du système est AS.

En effet, on a :

$$\dot{V}(x) = L_f V(x) - \alpha (L_g V(x))^2 < 0$$

Cette méthode n'élimine pas les non linéarités comme les méthodes de linéarisation, ce qui permet de préserver les propriétés naturelles du système.