

Chapitre 5

Observateur non linéaire

5.1 Description mathématique d'un observateur

Considérons un système non linéaire général décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{5.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, et f , h régulières.

On a besoin d'observateur lorsque $p < n$, dans ce cas, on ne connaît pas les conditions initiales d'une partie des états.

Généralement, un observateur est décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= g(z, u, y) \\ \hat{x} &= l(z)\end{aligned}\tag{5.2}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, est l'état de l'observateur et $\hat{x}$ est l'estimé de l'état x tel que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \hat{x}\| = 0$$

(5.2) est une description générale d'un observateur. En pratique, il n'est pas facile de déterminer les fonctions g et l pour n'importe quelle dynamique donnée par (5.1). Pour cela généralement, on impose une certaine structure pour un observateur donné comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + \psi(y - h(\hat{x})) \\ y_{obs} &= \hat{x}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Une telle structure est intéressante puisque lorsque $y(t) - h(\hat{x}(t)) = 0$ après un certain temps t_1 , alors les systèmes (5.1) et (5.3) deviennent identiques et $\hat{x}(t) = x(t)$ pour tout $t \geq t_1$ à cause de l'unicité de la solution.

Finalement, la synthèse d'observateur revient à déterminer la fonction ψ telle que l'erreur $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \hat{x}\| = 0$.

Pour pouvoir synthétiser un observateur il faut que le système soit observable.

Définition 5.1. *Un système est dit observable sur un temps $[0, T]$, si pour deux conditions initiales distinctes $x_0, \bar{x}_0$, il existe une entrée définie sur $[0, T]$ telle que les sorties $y(x_0, u, t)$ et $\bar{y}(\bar{x}_0, u, t)$ correspondantes à ces deux conditions initiales lorsque $u(t)$ est appliquée, sont aussi distinctes.*

En d'autres termes : pour deux conditions initiales différentes, on doit obtenir deux sorties différentes.

Notons que la définition précédente suggère que l'observabilité d'un système dépend des entrées appliquées au système. Alors que pour les systèmes linéaires, cette définition est vraie pour toutes les entrées même lorsque $u = 0$. De plus, l'observabilité ne dépend que de la paire (A, C) .

5.2 Difficultés liées à la synthèse d'observateurs non linéaires

La difficulté majeure liée à la synthèse d'observateur NL réside en l'existence d'entrées singulières.

Les entrées singulières sont les entrées qui rendent le système non observable. Une telle situation ne se produit pas en linéaire.

Exemple 5.1. *Soit le système à deux dimensions suivant :*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + ux_2 \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y &= x_1\end{aligned}$$

Pour $u = -1$, ce système n'est pas observable.

En effet : prenons 2 sorties identiques $y(t)$ et $\bar{y}(t)$:

$$\begin{aligned}y(t) &= \bar{y}(t) \\ x_1(t) &= \bar{x}_1(t) \\ \dot{x}_1(t) &= \dot{\bar{x}}_1(t) \\ x_2(t) + u(t)x_2(t) &= \bar{x}_2(t) + u(t)\bar{x}_2(t) \\ [x_2(t) - \bar{x}_2(t)] &= u(t)[x_2(t) - \bar{x}_2(t)] \\ [x_2(t) - \bar{x}_2(t)][1 + u(t)] &= 0 \quad \forall t \text{ particulièrement à } t = 0\end{aligned}$$

Donc $1 + u(t) = 0$ ou $x_2(t) - \bar{x}_2(t) = 0$

Pour un système observable il faut que $1 + u(t) \neq 0 \Rightarrow u(t) \neq -1$

sinon $1 + u(t) = 0$ il se peut que pour $y = \bar{y}$, $x_{02} \neq \bar{x}_{02}$!
 $u(t) = -1$ est une entrée singulière ou une "mauvaise entrée"
 si on envoie $u(t) = -1$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0 \\ \dot{x}_2 &= 0\end{aligned}$$

alors il est impossible de retrouver x_2 à partir de la mesure $y = x_1$, il faut qu'il y ait un couplage entre x_1 et x_2 .

Pour le cas linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x; \quad y = [1 \quad 0]; \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \det O = 0 \quad (5.4)$$

Lorsque les équations ne sont pas couplées, le système n'est pas observable.

Par conséquent :

1. On ne peut pas parler d'observabilité au sens large dans le cas non linéaire.
 2. On peut seulement synthétiser des observateurs que pour certaines classes.
 3. On a besoin de caractériser les classes des SNL pour les quelles il est possible de construire des observateurs.
- **Question :** Existe-t-il une classe de SNL observable quelle que soit l'entrée ?
 - **Réponse :** oui, une telle classe est dite système uniformément observable.

5.3 Synthèse d'observateur pour les systèmes affine en la commande uniformément observable

Soit le système mono-entrée, mono-sortie affine en la commande suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considérons la transformation suivante :

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Supposons que $z = \Phi(x)$ est un difféomorphisme, il a été montré que si le difféomorphisme $z = \Phi(x)$ transforme le système (5.5) en la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi(z_1, z_2, \dots, z_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi(z_1) \\ \phi(z_1, z_2) \\ \phi(z_1, z_2, z_3) \\ \vdots \\ \phi(z_1, \dots, z_{n-1}) \\ \phi(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix} u \quad (5.7)$$

avec $y = z_1$

alors le système (5.5) est uniformément observable.

Exercice : Montrer que le système (5.7) est uniformément observable pour tout u .

$$\begin{aligned}
 y &= \bar{y} \\
 z_1 &= \bar{z}_1 \\
 \dot{z}_1 &= \dot{\bar{z}}_1 \\
 z_2 + \psi_1(z_1)u &= \bar{z}_2 + \psi_1(\bar{z}_1)u \quad \text{car } z_1 = \bar{z}_1 \\
 \dot{z}_2 &= \dot{\bar{z}}_2 \\
 z_2 + \psi_2(z_1, z_2)u &= \bar{z}_2 + \psi_2(\bar{z}_1, \bar{z}_2)u \quad \text{mais } z_1 = \bar{z}_1 \text{ et } z_2 = \bar{z}_2 \\
 z_3 &= \bar{z}_3 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Finalement c'est grâce à la forme de ψ qui est triangulaire sinon il y aurait un problème.

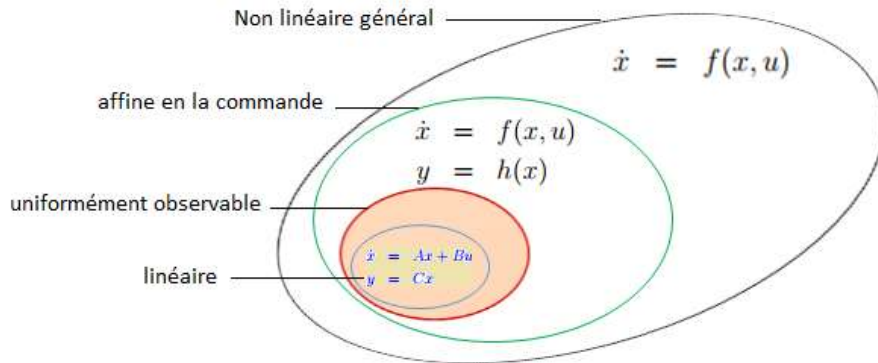


FIGURE 5.1 – Classe des systèmes uniformément observable.

Puise le système (5.7) paraît plus simple que le système initial (5.5), on commence par synthétiser un observateur pour (5.7).

Reécrivons (5.7) sous une forme compacte :

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= Az + \Psi(z) + \Phi(z)u \\
 y &= Cz
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \Psi(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi(z) \end{bmatrix}, \Phi(z) = \begin{bmatrix} \phi(z_1) \\ \phi(z_1, z_2) \\ \phi(z_1, z_2, z_3) \\ \vdots \\ \phi(z_1, \dots, z_{n-1}) \\ \phi(z_1, \dots, z_n) \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

La nonlinéarité $\Phi(z)$ est dite triangulaire (bas).

Un observateur pour (5.7) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \Psi(\hat{z}) + \Phi(\hat{z})u + L_\theta(y - C\hat{z}) \quad (5.9)$$

où

$$L_\theta = \Delta_\theta L \text{ avec } \Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n) \text{ et } \theta > 0$$

L est une matrice telle que la matrice $(A - LC)$ est stable.

Ensuite, un observateur pour le système (5.5) est déduit tel que :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x}(\hat{x})L_\theta(y - C\hat{x}) \quad (5.10)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} z &= \Phi(x) \\ \dot{z} &= \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \end{aligned}$$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \Psi(z) + \Phi(z)u \\ \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \Psi(\hat{z}) + \Phi(\hat{z})u + L_\theta(y - C\hat{z}) \end{aligned}$$

ensuite :

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \Phi(\hat{x}) \\ \dot{\hat{z}} &= \frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{x}} &= \frac{\partial \Phi^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} [A\hat{z} + \Psi(\hat{z}) + \Phi(\hat{z})u + L_\theta(y - C\hat{z})] \\ &= \frac{\partial \Phi^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} [A\hat{z} + \Psi(\hat{z}) + \Phi(\hat{z})u] + \frac{\partial \Phi^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} L_\theta(y - C\hat{z}) \\ &= \frac{\partial \Phi^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \Phi(\hat{x})}{\partial \hat{x}} [f(\hat{x}) + g(\hat{x})u] + \frac{\partial \Phi^{-1}(\hat{x})}{\partial \hat{x}} L_\theta(y - C\hat{z}) \\ &= f(\hat{x}) + g(\hat{x})u + \frac{\partial \Phi^{-1}}{\partial x}(\hat{x})L_\theta(y - C\hat{x}) \end{aligned}$$

d'un autre côté :

$$L_\theta = \Delta_\theta L \text{ avec } \Delta_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$$

θ est paramètre de réglage choisi suffisamment grand pour écraser les non linéarités (d'où le nom) et régler la convergence de l'observateur.

- L telle que $\sigma(A - LC)$ est stable

$$(A - LC) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\lambda I - (A - LC)| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda + l_1 & -1 \\ l_2 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \\
&= \lambda^2 + l_1\lambda + l_2 \equiv (\lambda + r_1)(\lambda + r_2)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
l_1 &= r_1 + r_2 \\
l_2 &= r_1 r_2
\end{aligned}$$

- L telle que $\sigma(A - L_\theta C)$ est stable

$$\begin{aligned}
(A - L_\theta C) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta l_1 & 1 \\ -\theta^2 l_2 & 0 \end{bmatrix} \\
|\lambda I - (A - \Delta_\theta LC)| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda + \theta l_1 & -1 \\ \theta^2 l_2 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \\
&= \lambda^2 + \theta l_1 \lambda + \theta^2 l_2 \equiv (\lambda + \theta r_1)(\lambda + \theta r_2)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
l_1 &= r_1 + r_2 \\
l_2 &= r_1 r_2
\end{aligned}$$

on retrouve la même condition. _

Ainsi, cela revient à multiplier tous les pôles par θ , ce qui permet de faire bouger tous les pôles.

5.4 Domaine d'application des observateurs

1. Dans les problèmes d'implémentation des contrôles.
2. Dans les problèmes d'identification des paramètres.
3. Dans les problèmes de détection et d'isolation de défauts.
4. Dans les communications sécurisées.