

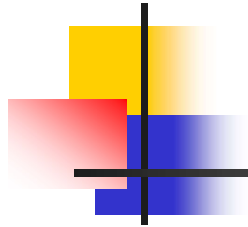


Chapitre3

**Formules de transport et quantification
des apports solides**
(cours d'eau jaugé et non jaugé)



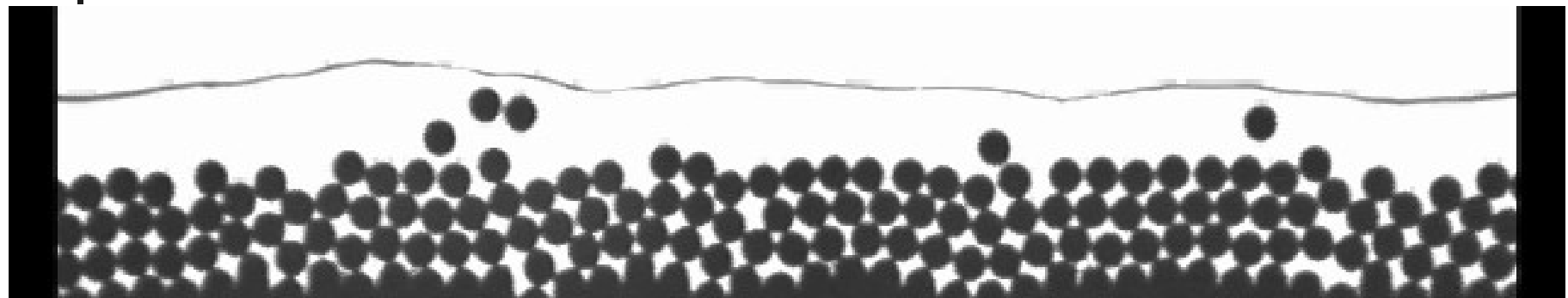
A.N.GHENIM



Le transport solide par charriage

DEFINITION

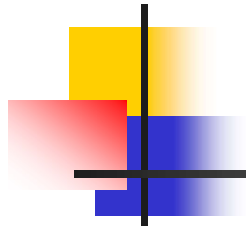
Le transport solide par charriage représente le déplacement des sédiments plus ou moins grossiers à proximité du fond par roulement, glissement ou par petits sauts.



Le charriage est un phénomène discontinu dans le temps et dans l'espace

Le charriage progresse à des vitesses plus petites que celles de l'écoulement, et sur des distances relativement petites

CAPACITE DE TRANSPORT PAR CHARRIAGE



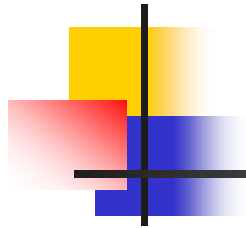
L'établissement des formulations empiriques et semi-empiriques pour la détermination des débits solides charriés par les canaux et les cours d'eau est basée sur trois critères essentiels :

- Les modèles tirés des lois de la mécanique.
- Les expériences effectuées au laboratoire.
- Les mesures faites dans la nature (in situ).

Ces formules ont été développés suivant trois approches :

- Celles basées sur les forces de frottement sur le lit du canal.
- Celles basées sur la relation entre le débit liquide et le débit solide.
- Celles basées sur des considérations statistiques concernant les forces hydrodynamiques et les vitesses d'écoulement.

Modèle de DuBoys (1879)



DuBoys considère que le sédiment est transporté sur des couches très minces au dessus du lit du canal. Ces couches se déplacent grâce aux forces d'entraînement.

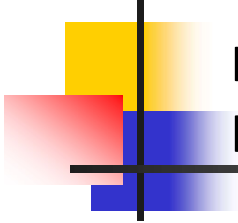
$$q_{sc} = \chi \cdot \tau_0 (\tau_0 - \tau_{cr}) \quad (m^3.s^{-1}.m^{-1})$$

χ a été déterminé expérimentalement pour des grains de sable et de porcelaine, il a pour valeur :

$$\chi = \frac{0,54}{(\rho_s - \rho)}$$

χ est aussi déterminé à partir de courbes théoriques en fonction du diamètre des sédiments transportés.

Formule de Shields (1936)



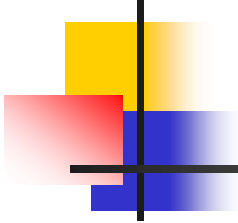
Shields fût le premier à obtenir une formule de calcul du transport solide par des considérations d'analyse dimensionnelle. Sa formule est basée sur l'approche utilisant la théorie des forces de frottement.

$$q_{sc} = q \frac{10.i}{(\rho_s - \rho)^2 . g^2 . d} . (\tau_0 - \tau_{cr}) \quad (m^3.s^{-1}.ml^{-1})$$

Cette équation a conduit à d'assez bons résultats, pas trop dispersés, pour le transport par charriage et saltation de granulats ayant :

- 0,36 à 3,44 mm de diamètre médian
- 1,06 à 4,30 de densité

La formule de Meyer-Peter et Müller (1948)



La formule empirique de Meyer-Peter et Müller donne la capacité de transport solide par charriage pour des sédiments de taille **uniforme**. C'est une formule dite à seuil, c'est à dire qu'elle fait intervenir le paramètre de Shields critique considéré comme constant.

Les limites de validité de cette loi sont :

- granulométrie uniforme comprise entre 0,4 et 30 mm
- pente entre 0,4 et 20 mm/m
- hauteur d'eau entre 0,01 et 1,2 m
- débit liquide entre 2 et 4000 m³/m.s

Sous sa forme complète adimensionnelle, elle s'écrit :

$$\frac{q_{sc}}{\sqrt{\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right) \cdot g \cdot d^3}} = 8(\beta \cdot A - 0,047)^{3/2}$$

avec

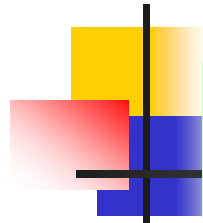
$$A = \frac{R_H \cdot i}{\left(\frac{\gamma_s}{\gamma} - 1\right) \cdot d}$$

q_{sc} : débit solide en m³/s par mètre de largeur de lit, exprimé en volume de grains, c'est à dire sans tenir compte du volume des vides

A : paramètre de Shields (sans dimension)

d : diamètre des sédiments (m)

En remplaçant g par $9,8 \text{ m/s}^2$, il vient plus simplement :


$$q_{sc} = 32(\beta.A - 0,047)^{3/2} .d^{3/2} \quad \text{pour} \quad \frac{\gamma_s}{\gamma} = 2,6 \text{ à } 2,65$$

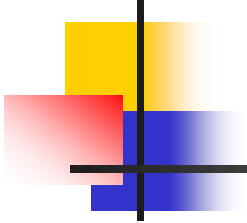
$$q_{sc} = 33(\beta.A - 0,047)^{3/2} .d^{3/2} \quad \text{pour} \quad \frac{\gamma_s}{\gamma} = 2,7 \text{ à } 2,75$$

où :

$$\beta = \left(\frac{K_f}{K_{\text{grains}}} \right)^{3/2}$$

β est un paramètre adimensionnel compris entre 0,35 et 1 qui dépend de la rugosité des grains et de la rugosité du fond.

Formule de Smart et Jaeggi (1983)



Smart et Jaeggi complétèrent les expériences de Meyer-Peter et Muller en procédant à 77 essais pour des pentes de fond s'étalant de 0,03 à 0,2 . Leur formule s'exprime :

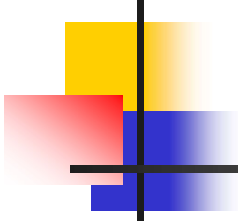
$$q_{sc} = 2,5 \cdot i^{0,6} \cdot q \cdot \left(i - \frac{d_m}{12,1 \cdot h} \right) \quad (m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-1})$$

avec :

d_m : diamètre médian, défini comme le diamètre égal ou supérieur à celui de la moitié des granulats.

h : hauteur d'eau.

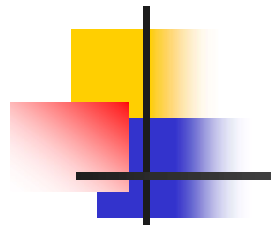
Formule de Nielsen (1992)



Cette formule est une variante de la formule Meyer-Peter et Muller. Elle semble s'étendre plus facilement pour les valeurs faibles du paramètre de Shields ($<0,25$).

$$q_{sc} = \frac{12,1 \times 10^{-5}}{\frac{\rho_s}{\rho}} \sqrt{\tau_0} \left[\tau_0 - 461 \cdot \frac{\rho_s}{\rho} \cdot d \right]$$

Formule de SCHOKLITCH (1962) :


$$q_{sc} = \frac{2,5}{\frac{\rho_s}{\rho}} . i^{\frac{3}{2}} . (q - q_c) \quad (m^3.s^{-1}.m^{-1})$$

où :

$$q_c = 0,26 . \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)^{\frac{5}{3}} . \frac{d_{40}^{\frac{3}{2}}}{i^{\frac{7}{6}}} \quad \text{ou} \quad q_c = g^{0,5} . d_r^{\frac{3}{2}} . 0,21 . i^{-1,12}$$

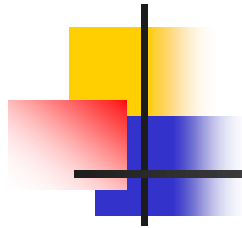
q_{sc} : Débit solide en charriage par unité de largeur ($m^3.s^{-1}.m^{-1}$)

q : Débit liquide ($m^3.s^{-1}.m^{-1}$)

q_c : Débit liquide critique ($m^3.s^{-1}.m^{-1}$)

d_r : d_{16} ou $0,8 d_m$

Formule de H.A.EINSTEIN (1950) :



Le modèle probabiliste d'EINSTEIN est basé sur le raisonnement qui suppose que chaque sédiment, en mouvement, progresse par bonds de longueurs moyennes constantes. C'est un raisonnement qui est proche de la réalité du phénomène. Ce modèle est représenté par la relation fonctionnelle des deux nombres sans dimensions Ψ et Φ :

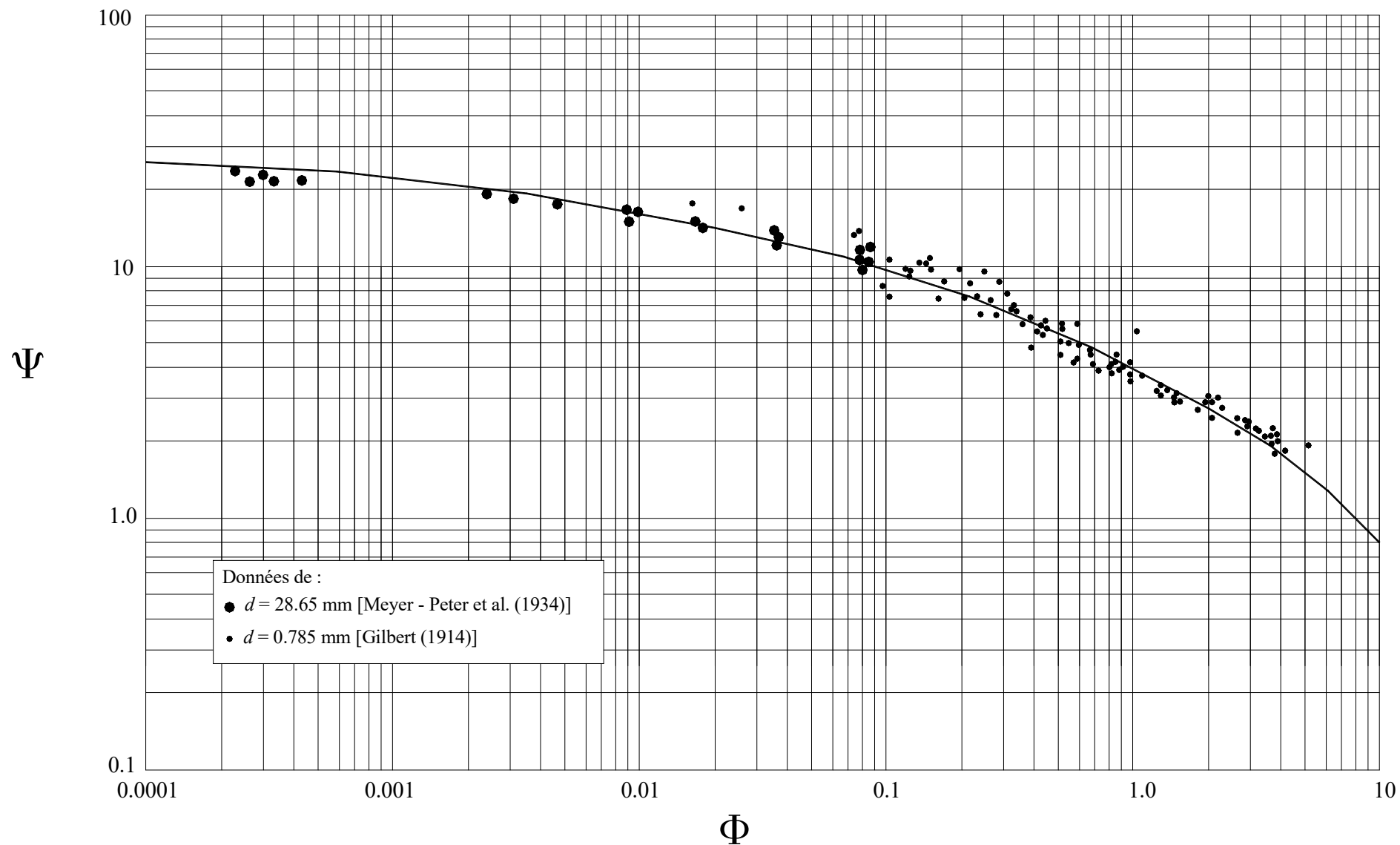
$$\Phi = f(\Psi)$$

Pour des sédiments de taille non uniforme
 $d = d_{35}$

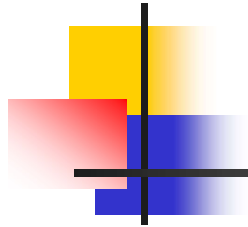
où :

$$\Psi = \frac{q_{sc} \rho^{1/2}}{[g (\rho_s - \rho) d]^{3/2}}$$

$$\Phi = \frac{g (\rho_s - \rho) d}{\rho V_*^2} = \frac{g (\rho_s - \rho) d}{\tau_0} = \frac{(\rho_s - \rho) d}{\rho h I}$$

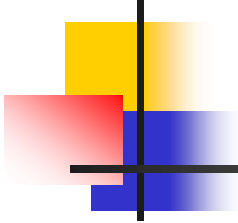


EQUATION DE CHARRIAGE , $\Phi = f(\Psi)$, SELON EINSTEIN ,1950



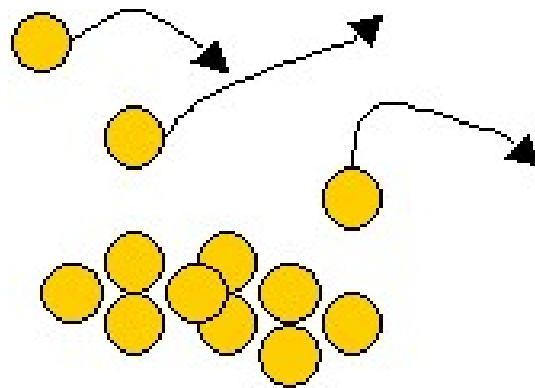
Le transport solide en suspension

DEFINITION

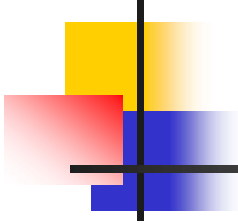


Le transport solide en suspension se fait par envols et ne comporte que très épisodiquement des retombées des sédiments sur le fond. La turbulence est le facteur principal de la suspension des sédiments.

La suspension est essentiellement conditionnée par le niveau de la **turbulence**, les **vitesse**s d'écoulement et la **concentration** des particules en mouvement près du fond.



Transport des Sédiments
en Suspension



Les particules en suspension au sein de l'écoulement ont tendance à suivre les particules fluides à leur vitesse de chute près et avec une certaine inertie.

L'équilibre entre la force de traînée exercée par le fluide sur une particule en suspension et son poids déjaugé détermine sa vitesse de chute.

Plus une particule est petite ou plus sa densité est proche de celle de l'eau, plus sa vitesse de chute et son inertie sont faibles, et plus la particule solide suit la trajectoire des particules fluides.

Lorsque l'écoulement est laminaire autour de la particule, la vitesse de chute s'écrit (Stokes, 1851) :

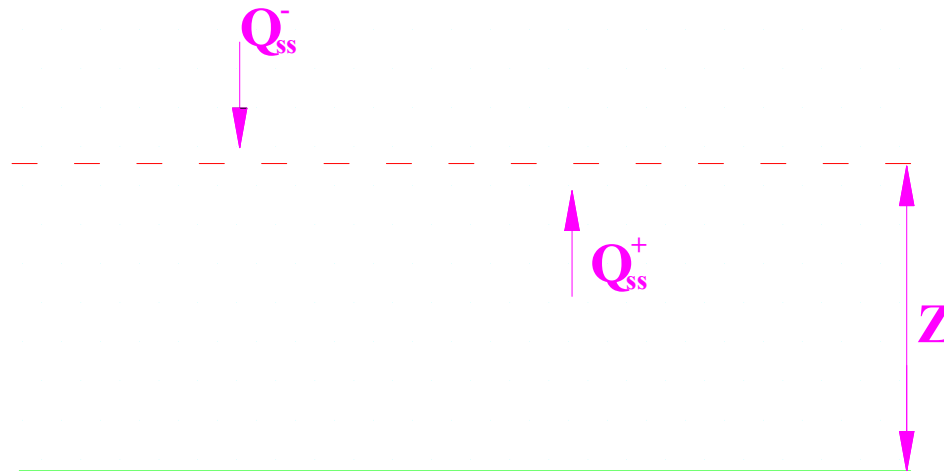
$$V_c = \frac{g}{18.\eta} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot d^2$$

Lorsque l'écoulement est turbulent autour de la particule, la vitesse de chute s'écrit (Clift et al, 1978) :

$$V_c = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{g}{C_D Re_p} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot d}$$

Inventaire des méthodes de calcul

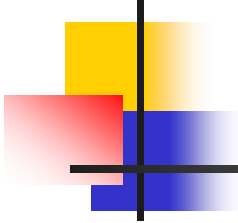
En s'appuyant sur des considérations élémentaires d'équilibre, plusieurs chercheurs dont O'BRIEN, KALINSKE, PIEN et EINSTEIN se sont attachés à définir une concentration moyenne en fonction de la profondeur [la fonction $C(z)$]. En effet, dans un écoulement turbulent, on retrouve deux formes de débit solide en suspension schématisées comme suit :



Q_{ss}^{-} : débit solide en suspension descendant.

Q_{ss}^{+} : débit solide en suspension ascendant.

Z : Cote fictive à partir du fond.



Ainsi, les particules en suspension subissent deux forces verticales opposées :

- D'une part, l'effet de la pesanteur ou la chute libre des particules dans un liquide.
- D'autre part, l'effet de la turbulence qui a tendance à repousser les particules du bas vers le haut.

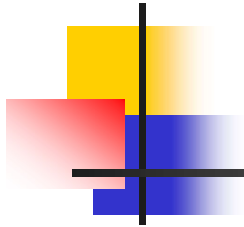
Plus une particule est petite ou plus sa densité est proche de celle de l'eau, plus sa vitesse de chute et son inertie sont faibles, et plus la particule solide suit la trajectoire des particules fluides.

Lorsque l'écoulement est laminaire autour de la particule, la vitesse de chute s'écrit (Stokes, 1851) :

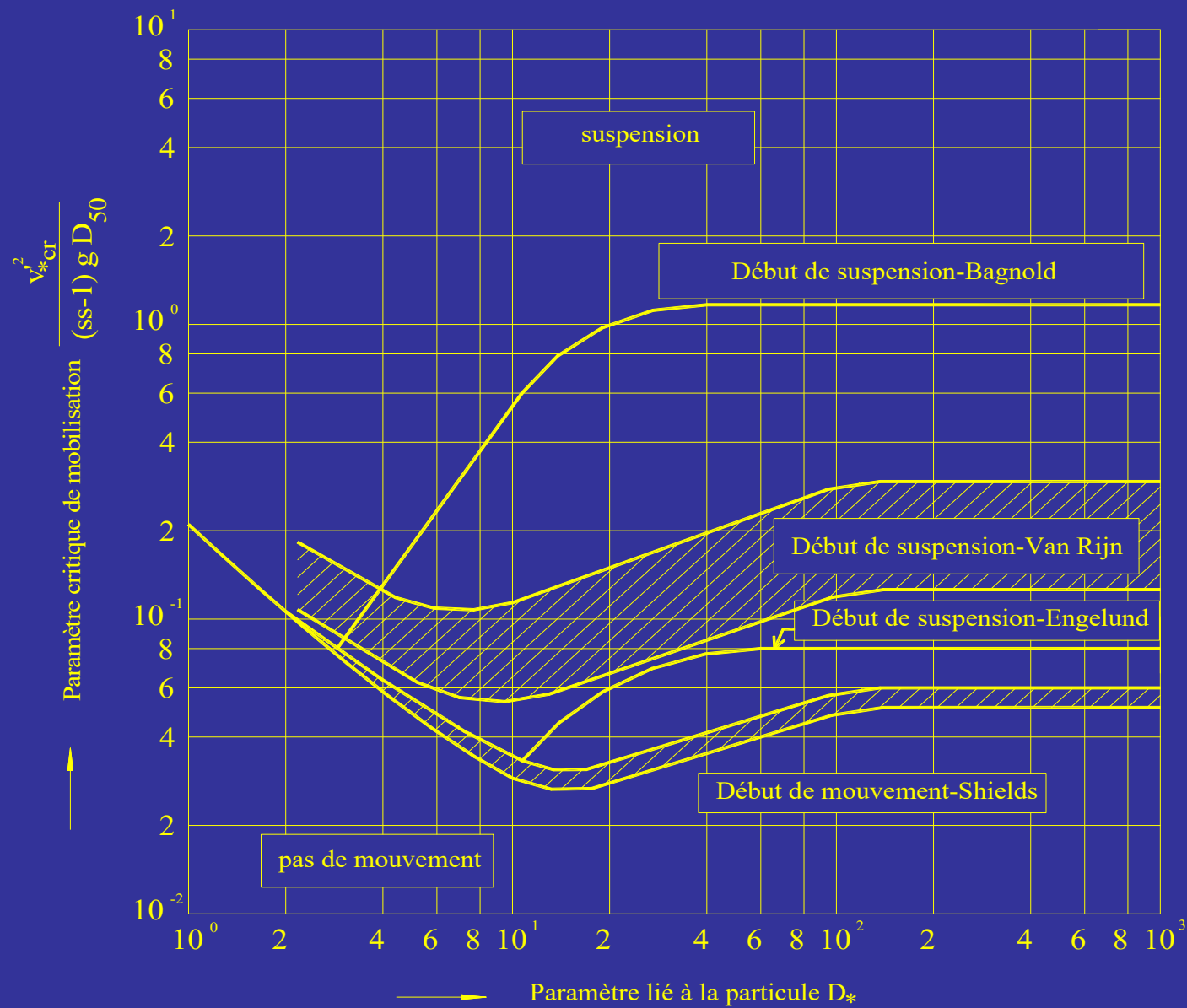
$$V_c = \frac{g}{18.\eta} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot d^2$$

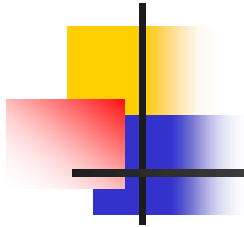
Lorsque l'écoulement est turbulent autour de la particule, la vitesse de chute s'écrit (Clift et al, 1978) :

$$V_c = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{g}{C_D Re_p} \cdot \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \cdot d}$$



La concentration en sédiments n'est jamais parfaitement uniforme, mais l'équilibre entre le flux ascendant et le flux descendant des particules brassées dans l'agitation turbulente du liquide lui assigne une valeur moyenne constante qui dépend de la cote **Z** à laquelle on la mesure au-dessus du fond.



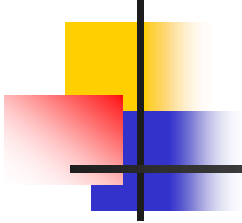


Le poids des particules en suspension qui traversent l'unité de surface vers le haut dans l'unité de temps est proportionnel à la dérivée de la concentration pondérale C par rapport à l'ordonnée Z . Il s'exprime par :

$$-\epsilon_z \frac{\partial C}{\partial Z}$$

le signe $(-)$ signifie que le flux des particules provient des zones à forte concentration.

Coefficient d'échange turbulent qui caractérise l'aptitude des particules à passer de part et d'autre d'un plan horizontal fictif.



Le poids des particules en suspension qui traversent l'unité de surface vers le bas dans l'unité de temps est égal à :

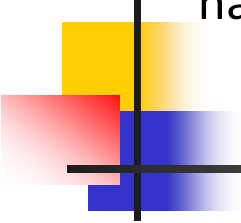
$$C.W$$

- **C** : Concentration pondérale à la cote Z
- **W** : Vitesse de chute libre des particules de diamètre médian dans le liquide

L'équilibre entre le flux ascendant et le flux descendant des particules à la cote z donne:

$$C.W + \varepsilon_z \cdot \frac{dC}{dz} = 0$$

Les théories de PRANDTL et VON KARMAN relatives aux écoulements turbulents montrent que la loi de répartition des vitesses dans la hauteur du liquide est une loi logarithmique :

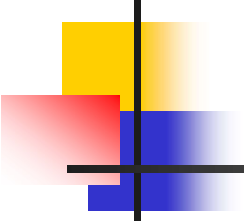

$$\frac{dV}{V_*} = \frac{dz}{K.z}$$

- **K** : Constante de VON KARMAN (K = 0,4).
- **V** : Vitesse d'écoulement du liquide à la cote Z
- **V_{*}** : Vitesse d'écoulement sur le lit du canal.

et, que le coefficient d'échange turbulent des molécules liquides ε [qui ne diffère pas de ε_Z] a pour valeur :

$$\varepsilon \approx \varepsilon_Z = \frac{V_*^2}{\frac{dV}{dz}}$$

on obtient donc :


$$\frac{dC}{C} + \frac{W}{K.V_*} \cdot \frac{dz}{z} = 0$$

et, s'il y a peu de granulats en suspension pour que l'on puisse considérer leur vitesse de chute indépendante de la concentration, l'intégration de cette équation différentielle donne :

$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{z_0}{h-z_0} \right)^{W/KV_*}$$

ou

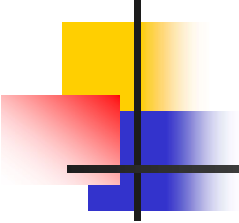
$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{z_0}{h-z_0} \right)^{CR}$$

$CR = \frac{W}{KV_*}$: Coefficient de ROUSE.

h : Hauteur du liquide qui s'écoule.

C_0 : Concentration à la cote z_0 au-dessus du fond.

2 cas peuvent se présenter en fonction des valeurs de CR :



1°/ Si CR est petit c'est à dire :

- Soit les sédiments sont de petite taille ($W \ll 1$)
- Ou la turbulence est très forte ($V_* > W$)



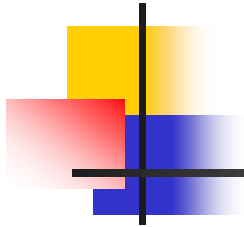
La concentration moyenne se répartit uniformément sur une verticale de l'écoulement.

2°/ Si CR est grand c'est à dire :

- Soit les sédiments sont de grande taille ($W \gg 1$)
- Ou la turbulence est très faible ($V_* < W$)



La concentration en sédiments est beaucoup plus forte sur le lit qu'à la limite de la surface.



Ainsi :

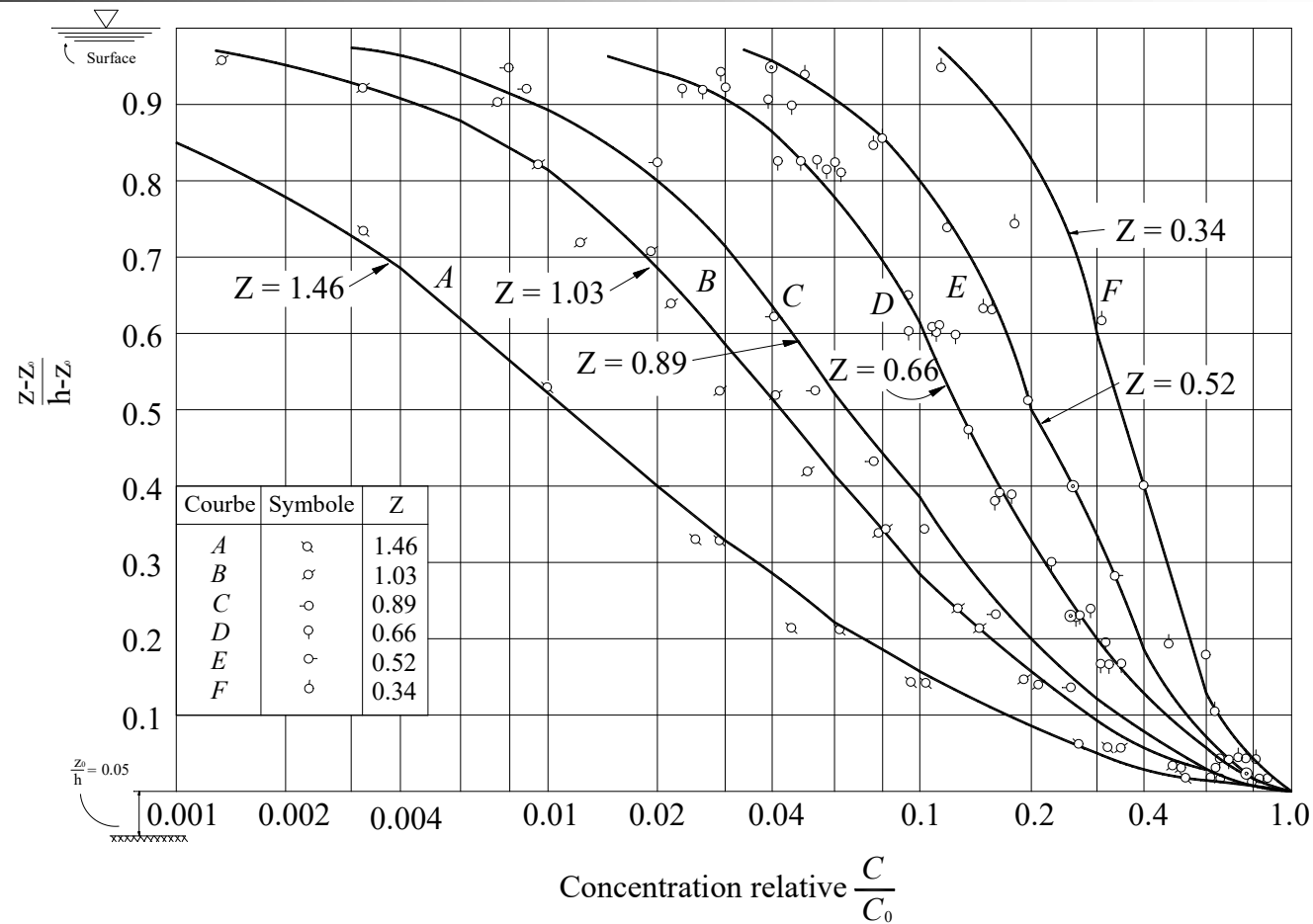
$C_R > 2.5$: Le sédiment est transporté en **Charriage**

$1.2 < C_R < 2.5$: à **50% en suspension**

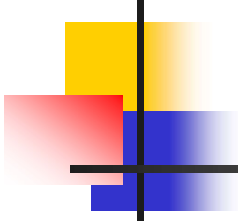
$0.8 < C_R < 1.2$: à **100% en suspension**

$C_R < 0.8$: en **suspension intrinsèque**

Devant les difficultés à déterminer la concentration de référence C_0 , de nombreuses expériences au laboratoire et in situ ont permis d'apprécier l'évolution de la concentration relative en fonction des caractéristiques du cours d'eau et de l'écoulement.



DISTRIBUTION VERTICALE DE LA CONCENTRATION RELATIVE EN SUSPENSION



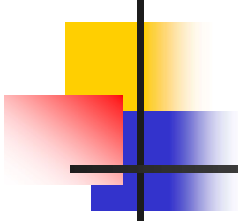
Le débit solide en suspension (en kg par unité de temps et de largeur) est déduit alors, après la détermination de $C(Z)$, par l'expression :

$$q_{ss} = \int_{Z_f}^h C(z).V(z)dz$$

- $C(z)$: concentration locale à la profondeur z .
- $V(z)$: vitesse d'écoulement locale à la profondeur z .
- Z_f : cote du fond généralement prise égale à : $0,05 h$ ou $2.d$
- h : cote de la surface libre.

Le calcul de q_{ss} nécessite donc la détermination de la répartition des vitesses d'écoulement du liquide et des concentrations des sédiments transportés, à différentes profondeurs, afin d'intégrer le produit des vitesses par les concentrations sur une verticale d'une section de mesure du cours d'eau.

Formules de calcul du débit solide en suspension

- 
- **Formule d'EINSTEIN (1950)** : En se basant sur des expériences au laboratoire et in-situ, EINSTEIN a développé un modèle permettant de calculer le débit solide en suspension dans un canal ou cours d'eau.

En remplaçant C par son expression dans l'équation précédente, on obtient :

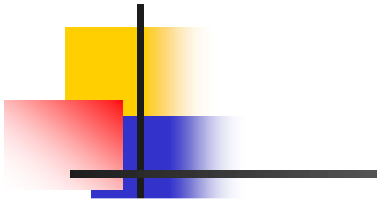
$$q_{ss} = \int_{z_f}^h C_0 \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{z_0}{h-z_0} \right)^{CR} \cdot V(z) dz$$

Or d'après EINSTEIN, la distribution des vitesses peut être déterminée par :

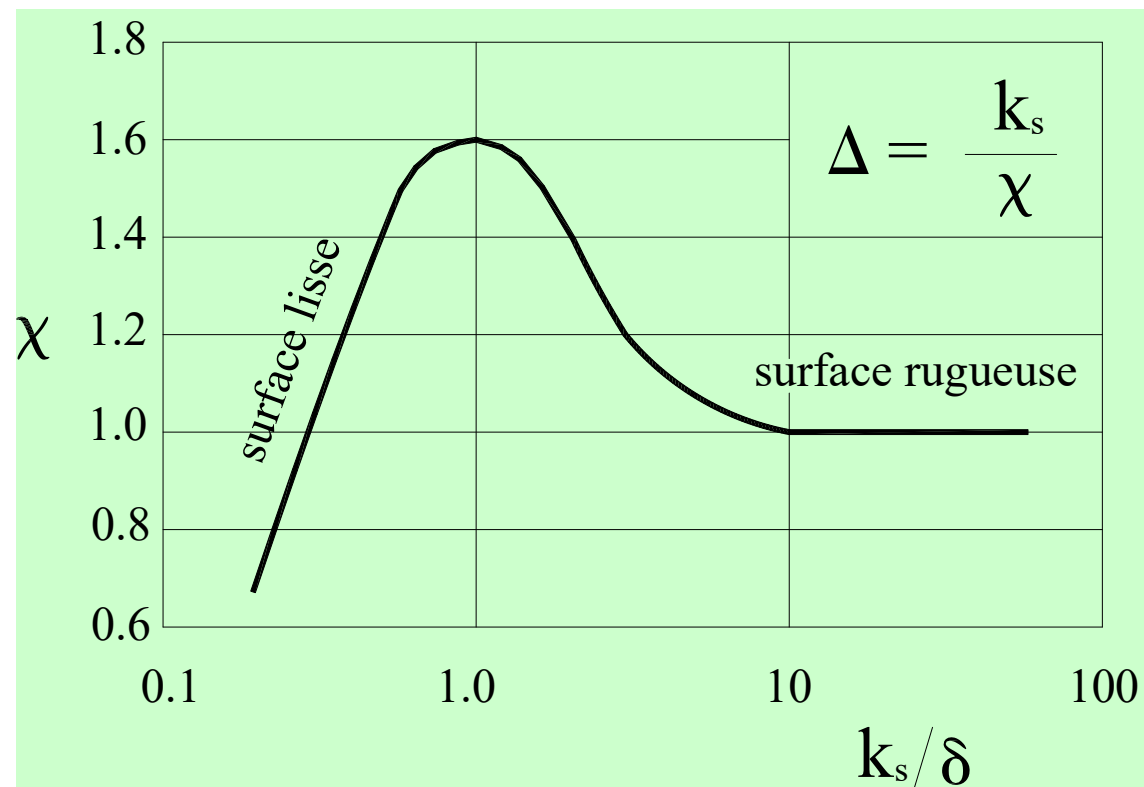
$$\frac{V(z)}{V_*} = 5,75 \log \left(\frac{h}{k_s} \right) + 6,25$$

↑
Rugosité standard du lit du canal, en mm.

ou encore,

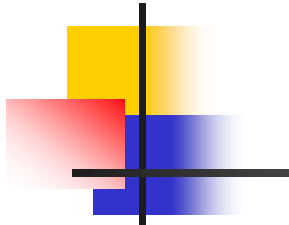

$$\frac{V(z)}{V_*} = 5,75 \log \left(30,2 \frac{z}{\Delta} \right)$$

Δ : un terme correcteur défini par $\Delta = f(k_s, \chi)$ et déterminé d'après le graphe suivant :



COEFFICIENT DE CORRECTION Δ

L'équation donnant le débit solide en suspension, peut s'écrire alors :



$$q_{ss} = \int_{z_f}^h C_0 \left(\frac{h-z}{z} \cdot \frac{z_0}{h-z_0} \right)^{C_R} \cdot V_* \cdot 5,75 \log \left(30,2 \frac{z}{\Delta} \right) dz$$

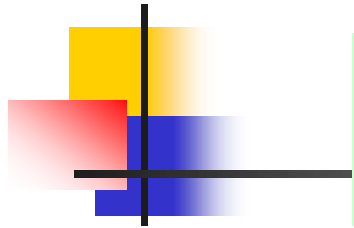
En posant $z_f = h_0$ et $\frac{z_f}{h} = \Omega$, on peut écrire aussi que :

$$q_{ss} = \int_{z_f}^h \bar{C}(z) V(z) dz = \int_{\Omega}^1 \bar{C}(z) V(z) h dz$$

d'où :

$$q_{ss} = C_0 V_* 5,75 h \left(\frac{\Omega}{1-\Omega} \right) \left[\log \left(30,2 \frac{h}{\Delta} \right) \int_{\Omega}^1 \left(\frac{1-z}{z} \right)^{C_R} dz + 0,434 \int_{\Omega}^1 \left(\frac{1-z}{z} \right)^{C_R} \ln z dz \right]$$

L'équation donnant le débit solide en suspension, peut être écrite selon EINSTEIN, sous la forme :



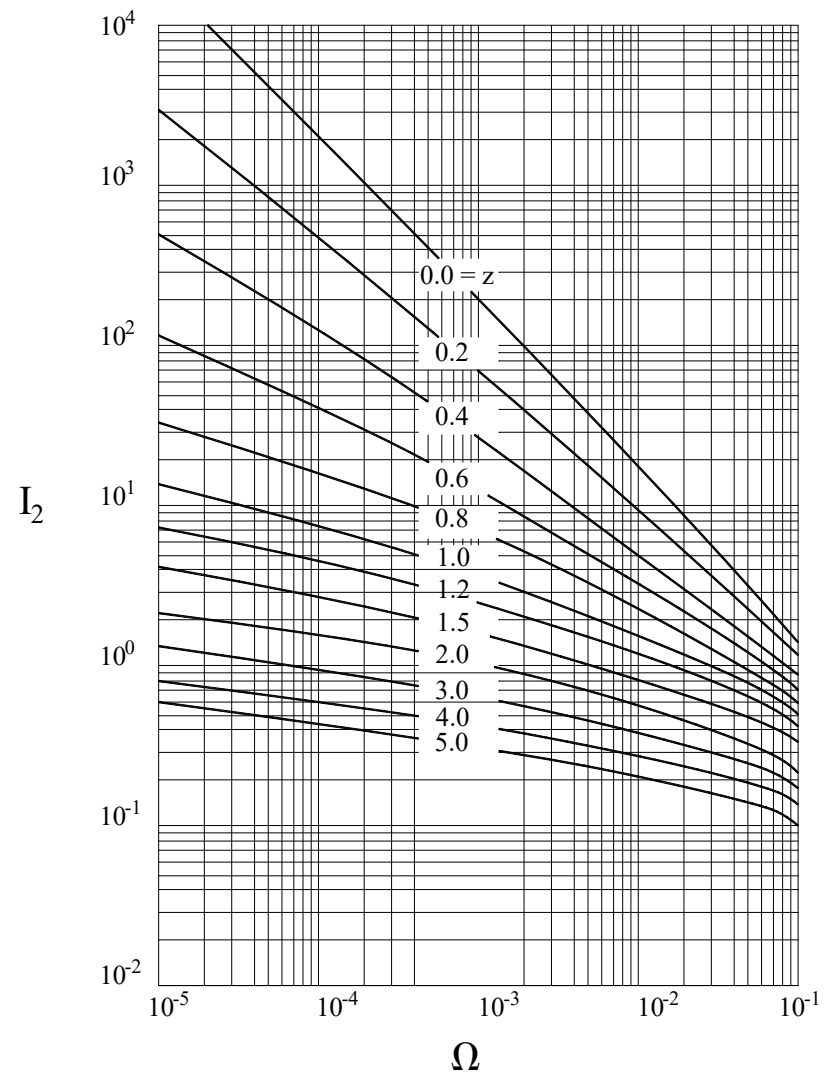
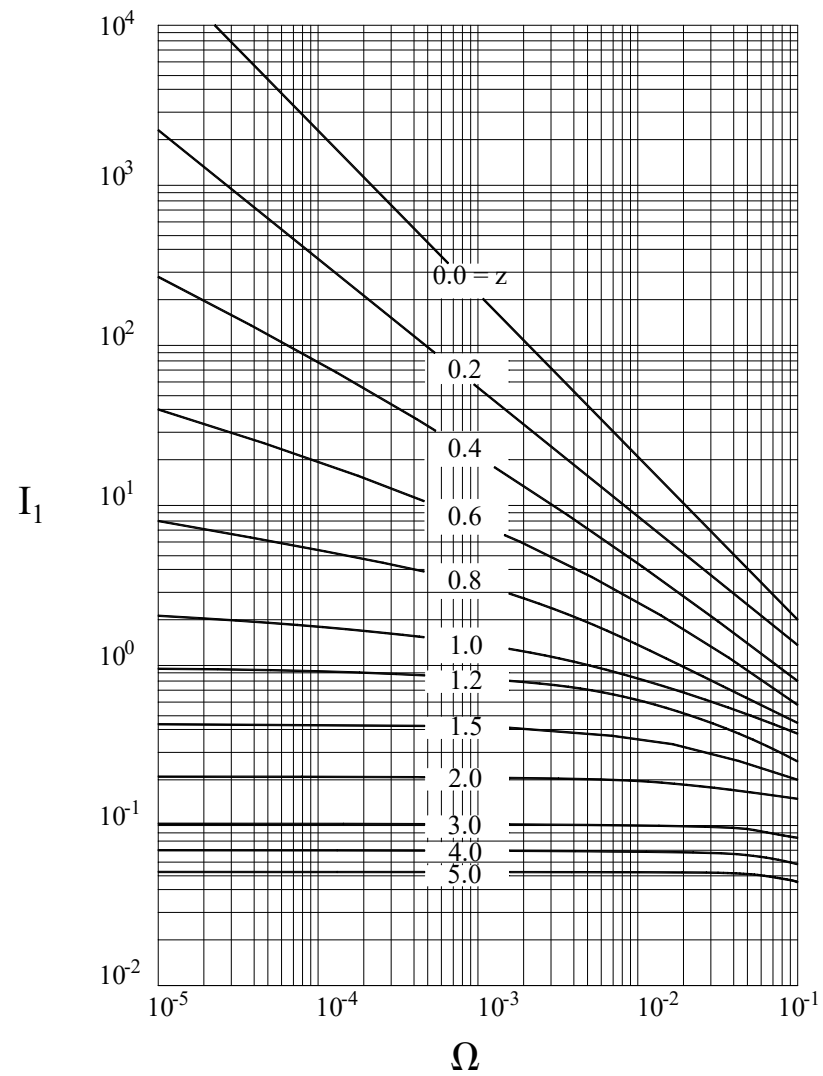
$$q_{ss} = 11,6 C_0 V_* \cdot z_f \left[2,303 \cdot I_1 \cdot \log \left(30,2 \frac{h}{\Delta} \right) + I_2 \right]$$

avec :

$$I_1 = 0,216 \frac{\Omega^{C_R - 1}}{(1 - \Omega)^{C_R}} \int_{\Omega}^1 \left(\frac{1 - z}{z} \right)^{C_R} dz$$

$$I_2 = 0,216 \frac{\Omega^{C_R - 1}}{(1 - \Omega)^{C_R}} \int_{\Omega}^1 \left(\frac{1 - z}{z} \right)^{C_R} \ln z dz$$

I_1 et I_2 sont évalués d'après les graphes de la figure suivante :



INTEGRALES D'EINSTEIN

