Université Abou Bakr Belkaïd
Tlemcen

Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

Résistance des Matériaux

CHAPITRE VI

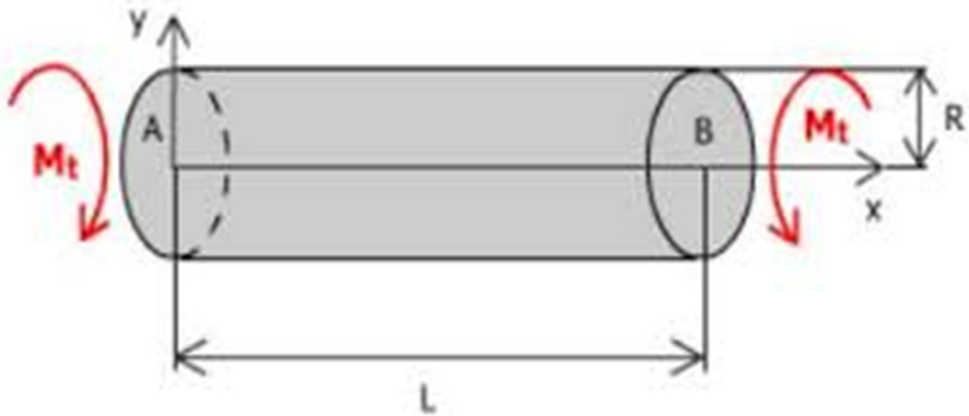
Torsion simple

A.N.GHENIM

I. Définition

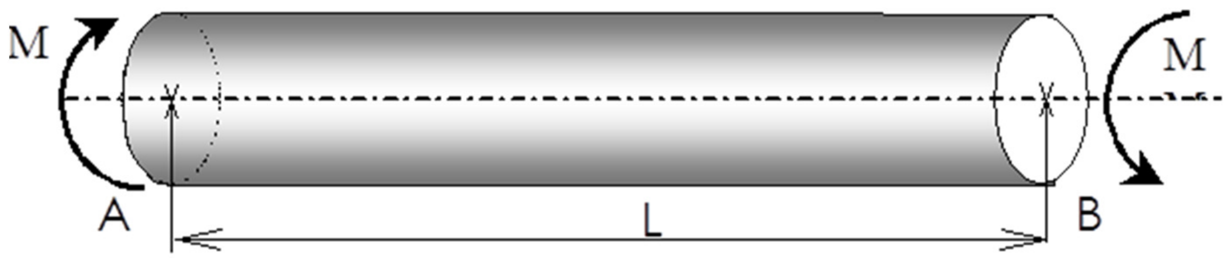
Une poutre est sollicitée à la torsion pure si **le seul élément de réduction** au centre de gravité de chaque section des forces de cohésion est un moment autour de la ligne moyenne appelé **moment de torsion**.

$$\Rightarrow N=T_y=T_z=0 \text{ , } M_{fy}=M_{fz}=0 \text{ , } \mathbf{M_t \neq 0}$$



II. Hypothèses

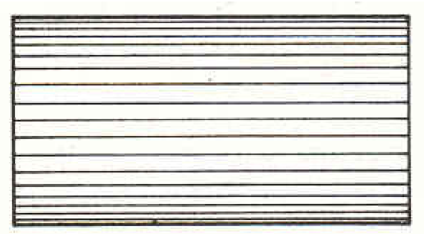
- Le solide est composé d'un matériau homogène et isotrope,
- Sa ligne moyenne est rectiligne,
- Les actions extérieures dans les sections extrêmes sont modélisables par deux moments opposés portés par la ligne moyenne.



II. Hypothèses

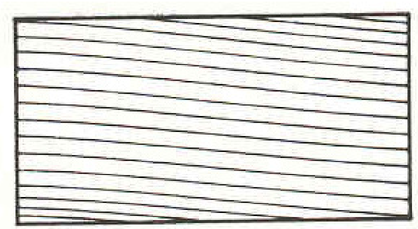
➢ La section droite est constante sur toute la longueur et **circulaire.**

En effet, pour rester dans le domaine de la RDM, il faut que notre solide vérifie l'hypothèse de Bernoulli (les sections droites planes et perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation).



Section circulaire

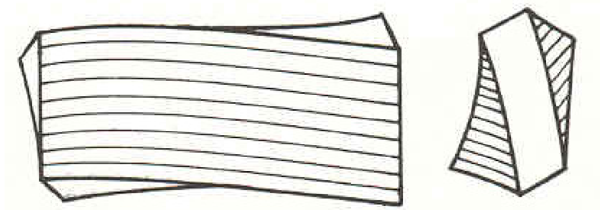
(avant déformation)



Après déformation: rotation des sections les unes / aux autres autour de Gx

Section rectangulaire

(avant déformation)

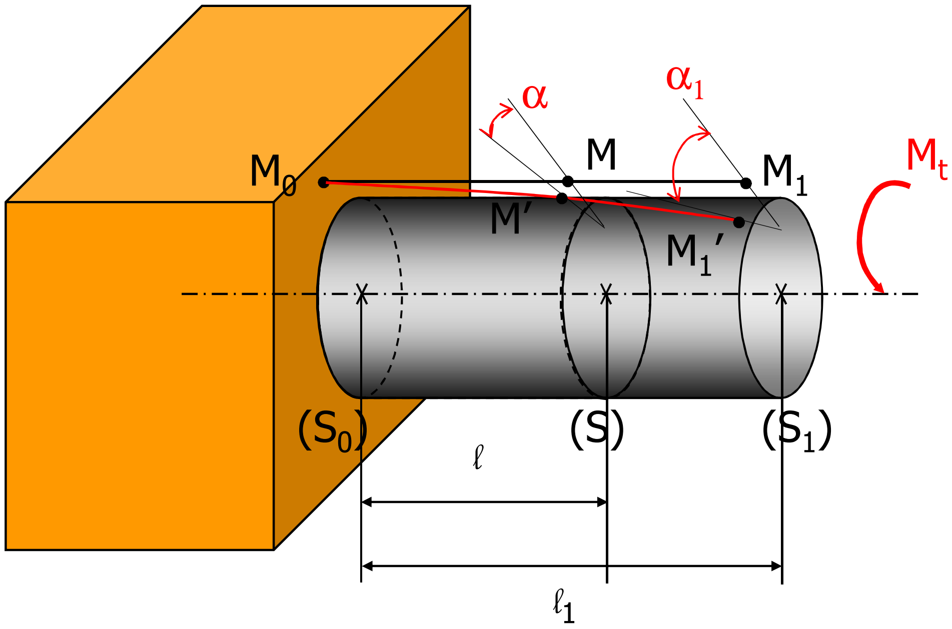


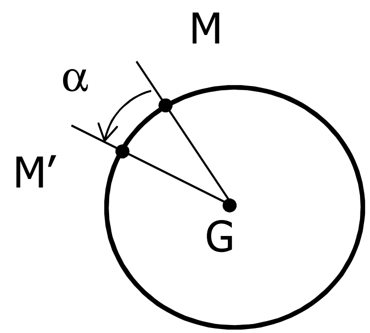
Après déformation: gauchissement des sections

III. Etude des déformations

Essai de torsion

Soit une poutre circulaire pleine, parfaitement encastrée en S_0 (section de référence), soumise à l'extrémité S_1 à un moment de torsion M_t:





L'expérience montre que, pour une section et un moment de torsion donnés, on a :

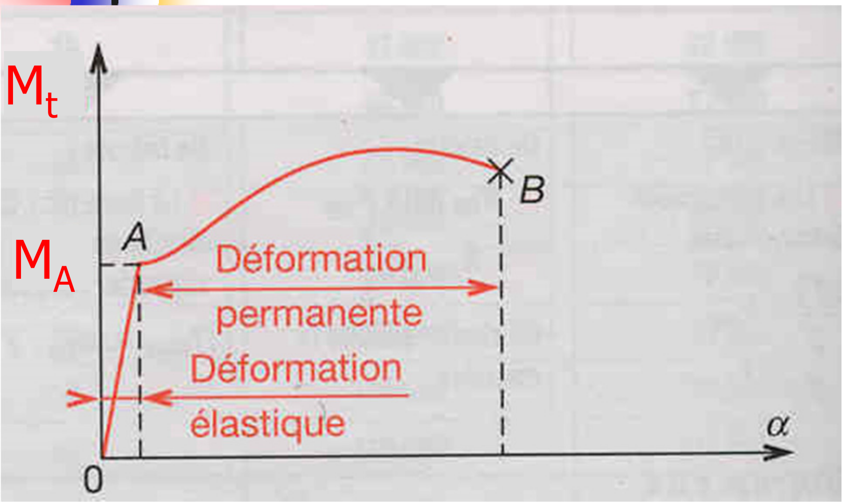
$$\frac{\alpha}{\ell} = \frac{\alpha_1}{\ell_1} = \ldots = \text{cste}$$

On pose :

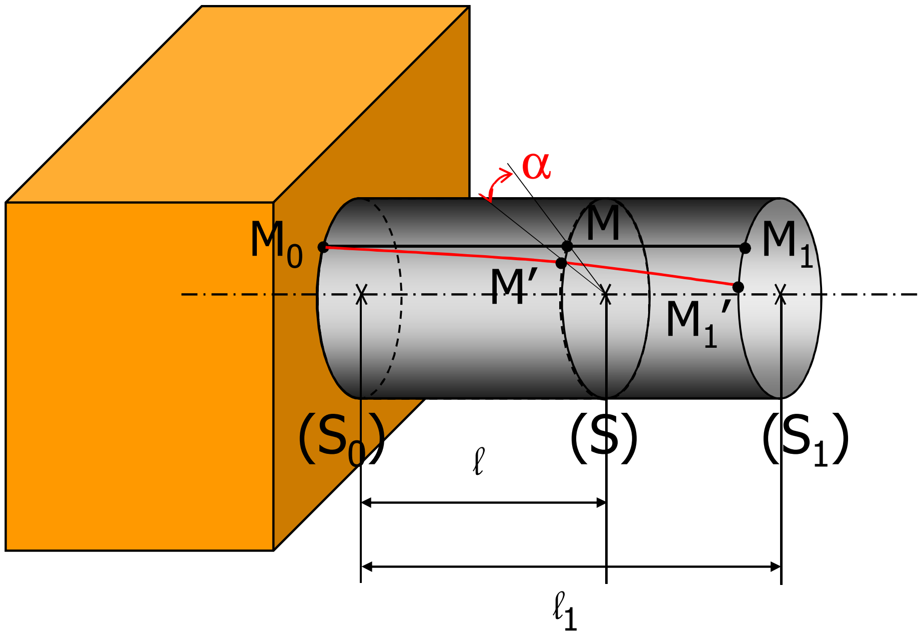
$$\boxed{\theta = \frac{\alpha}{\ell}}$$

- θ:angle de torsion unitaire (rad/mm)
- α: angle total de torsion de (S)/(S_0) (rad)
- ℓ: distance entre (S) et (S_0) (mm)

III. Etude des déformations



- Si $M_t<M_A$, on est dans le domaine élastique, l'angle α est proportionnel au moment appliqué
- Si $M_t>M_A$, on est dans le domaine plastique, l'angle α n'est plus proportionnel au moment appliqué

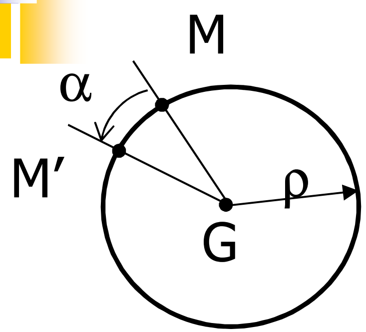


On appelle γ, l'angle MM_0M'. Cet angle représente l'angle de glissement de $(S)/(S_0)$ (ou distorsion).

On a :

$$\boxed{\frac{MM'}{MM_0} = \frac{MM'}{\ell} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma}$$

III. Etude des déformations



$$\gamma = \frac{MM'}{\ell} = \frac{\rho.\alpha}{\ell} = \rho.\theta$$

En torsion, les sections du solide sont soumises à une contrainte tangentielle (ou de cisaillement). Nous avons vu (cf. chapitre VI) la relation liant les contraintes et les déformations:

$$\tau = G.\gamma$$

On obtient donc:

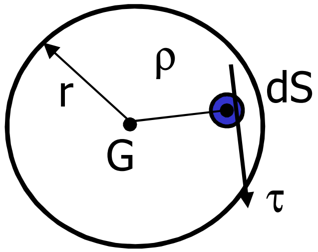
$$\tau = G.\theta.\rho$$

Avec:

τ : la contrainte de cisaillement,
G : le module de Coulomb,
θ : angle unitaire de torsion,
ρ : distance du point considéré à l'axe Gx.

IV. Etude des contraintes

On coupe le cylindre en une section (S) et on exprime que la partie isolée est en équilibre sous l'action du moment de torsion M_t et des forces de cohésion dans la section (S).



dS : élément de surface situé à une distance ρ de l'axe Gx, soumis à une contrainte de cisaillement τ

L'effort élémentaire de cisaillement dF vaut donc:

$$dF = \tau.dS$$

L'équilibre de l'élément isolé s'écrit donc:

$$M_t = \iint_S \rho.\tau.dS$$

Or : $\tau = G.\theta.\rho$

d'où : $M_t = \iint_S \rho^2.G.\theta.dS$

Comme $G.\theta$ est identique pour chaque dS, on obtient finalement :

$$M_t = G.\theta.\iint_S \rho^2.dS \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_t = G.\theta.I_0}$$

Moment d'inertie polaire de (S)/ à G

IV. Etude des contraintes

On a donc : $M_t = G.\theta.I_0$

On sait aussi que : $\tau = G.\theta.\rho$

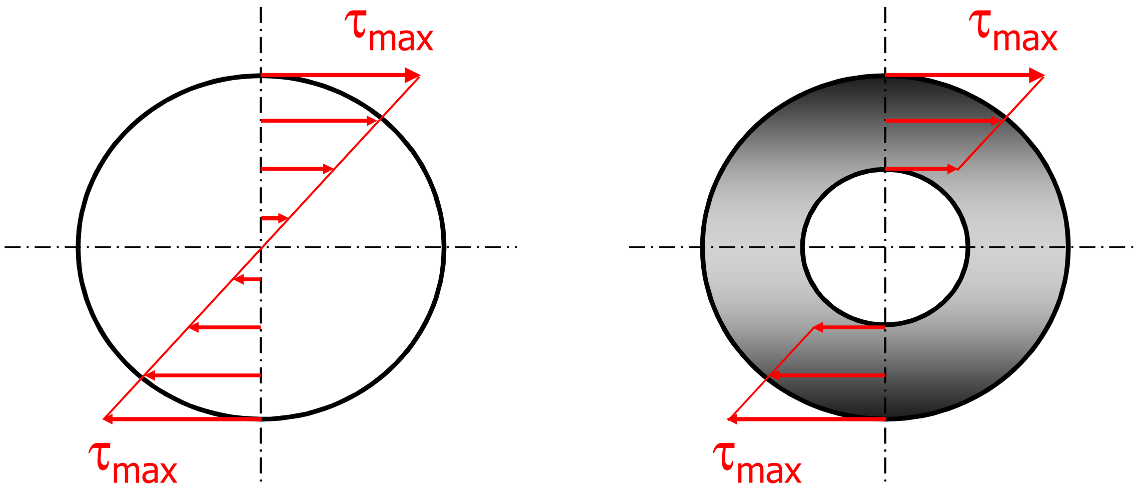
On peut donc exprimer la contrainte de cisaillement en fonction de M_t, on obtient:

$$\boxed{\tau = \rho.\frac{M_t}{I_0}}$$

La contrainte de cisaillement est donc proportionnelle à la distance / au c.d.g. de la section et est **maximale pour ρ = r** :

$$\boxed{\tau_{max} = r.\frac{M_t}{I_0}}$$

$\frac{I_0}{r}$: module de torsion (mm^3)



V. Dimensionnement

V.1. Condition de résistance

Le dimensionnement des solides soumis à la torsion pure se fera en limitant la valeur de la contrainte tangentielle à une valeur notée R_{pg} (résistance pratique au glissement = contrainte tangentielle admissible τ_{adm}) définie par :

$$R_{pg} = \frac{\tau_e}{s}$$

Limite élastique au cisaillement

Coefficient de sécurité

On obtient ainsi l'inéquation (d'équarrissage) suivante:

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0}.r \leq R_{pg}}$$

V. Dimensionnement

V.2. Condition de déformation

On utilise souvent l’angle limite de torsion pour dimensionner une pièce soumise à la torsion (surtout dans le cas d’arbres de grande longueur).

On obtient ainsi l’inéquation suivante:

$$\theta = \frac{M_t}{G.I_0} \leq \theta_{lim}$$

ou

$$\alpha = \frac{M_t.\ell}{G.I_0} \leq \alpha_{lim}$$

VI. Relation entre puissance et moment de torsion

$$\boxed{P = M_t.\omega}$$

Avec :

P : puissance en Watts

M_t : moment de torsion en N.m

ω : vitesse angulaire en rad/s

Si la vitesse de rotation est donnée en tours/min, il faut convertir :

$$\boxed{\omega = \frac{2.\pi.n}{60}}$$