



Chapitre 4

Calcul de sections en béton armé soumises à la flexion simple



A.N.GHENIM

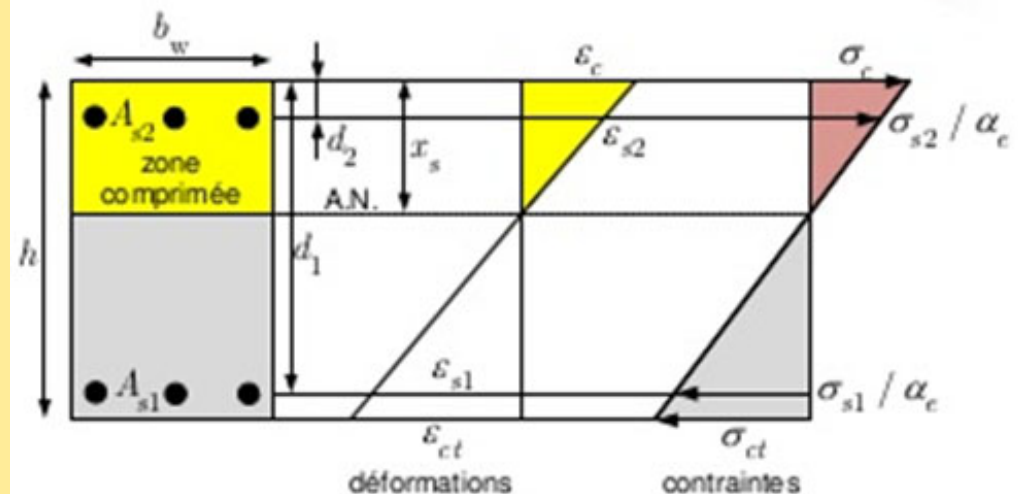
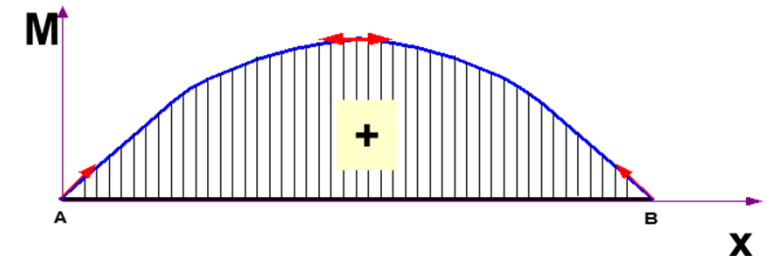
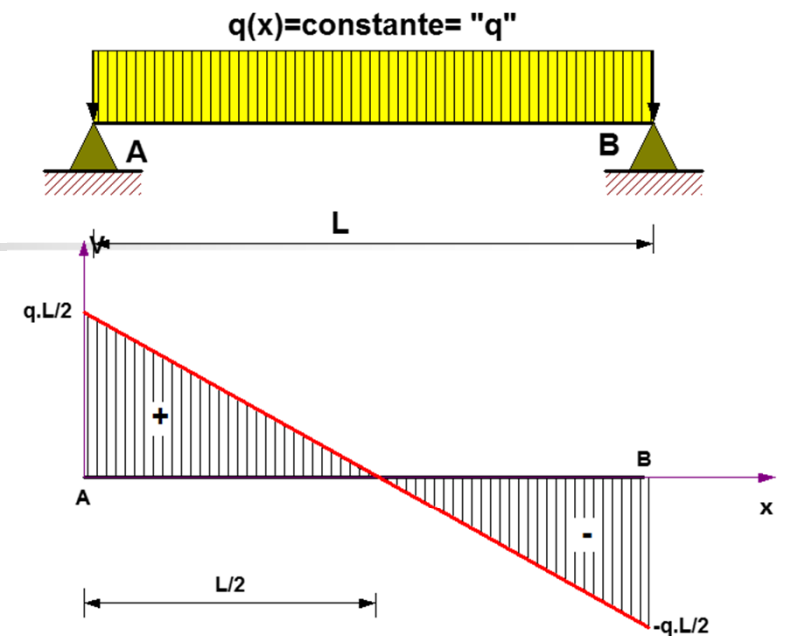
Définition

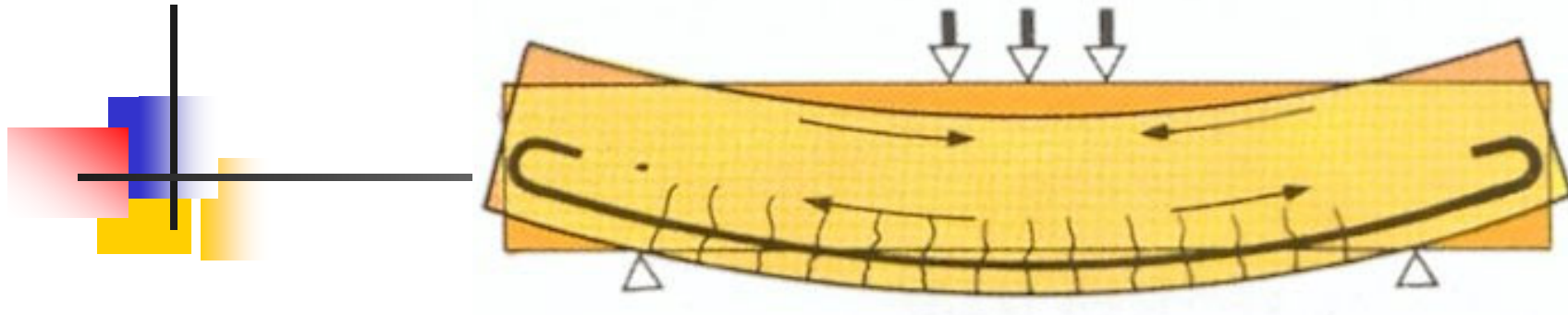
Une poutre est soumise à la flexion simple, si en toute section droite, les forces extérieures (actions des appuis et actions des charges), situées à gauche de la section considérée se réduisent, à **un moment de flexion (M)** et à **un effort tranchant (T)** appliqués au centre de gravité G de la section (S).

La contrainte normale dans une fibre de poutre est en fonction d'une part des sollicitations, d'autre part des caractéristiques géométriques de la poutre.

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y$$

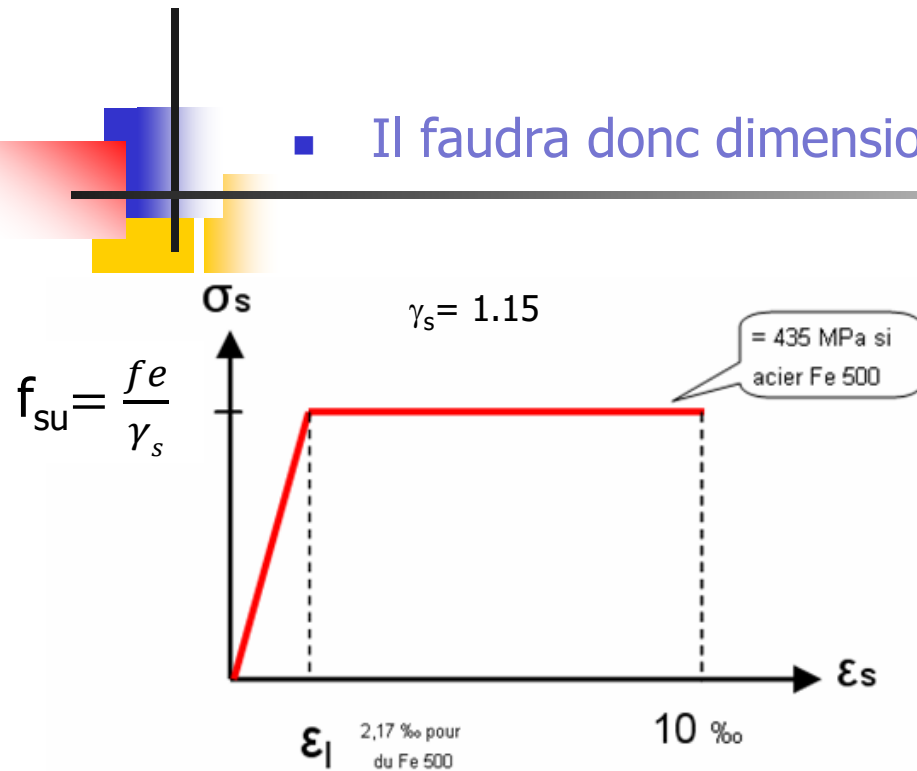
σ : contrainte normale dans une fibre
M : moment fléchissant dans la section
y : ordonnée de la fibre
I : moment d'inertie de la section





- Le principe du béton armé en flexion
 - le **béton** reprend les efforts de **compression**.
 - les **aciers** reprennent les efforts de **traction**.
- Un élément en béton armé est **optimisé** lorsque les matériaux béton et acier travaillent au **maximum** de leurs possibilités.
- (si l'acier travaille à seulement 80 % de ses possibilités, il faudra ajouter 20 % d'acier en plus pour assurer l'équilibre)

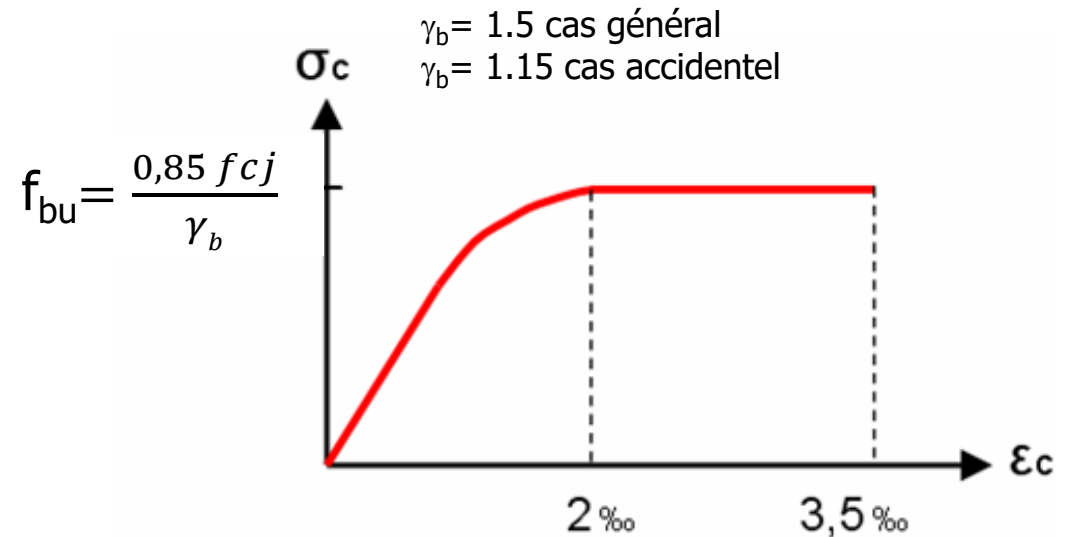
- Il faudra donc dimensionner nos éléments de manière à respecter :



$$\epsilon_l \text{ (2.17 ‰)} < \epsilon_s < 10 \text{ ‰}$$

Acier

L'acier travaillera au maximum à partir d'une contrainte f_{su} . On limite généralement l'allongement unitaire de l'acier à 10 ‰.



$$2 \text{ ‰} < \epsilon_c < 3,5 \text{ ‰}$$

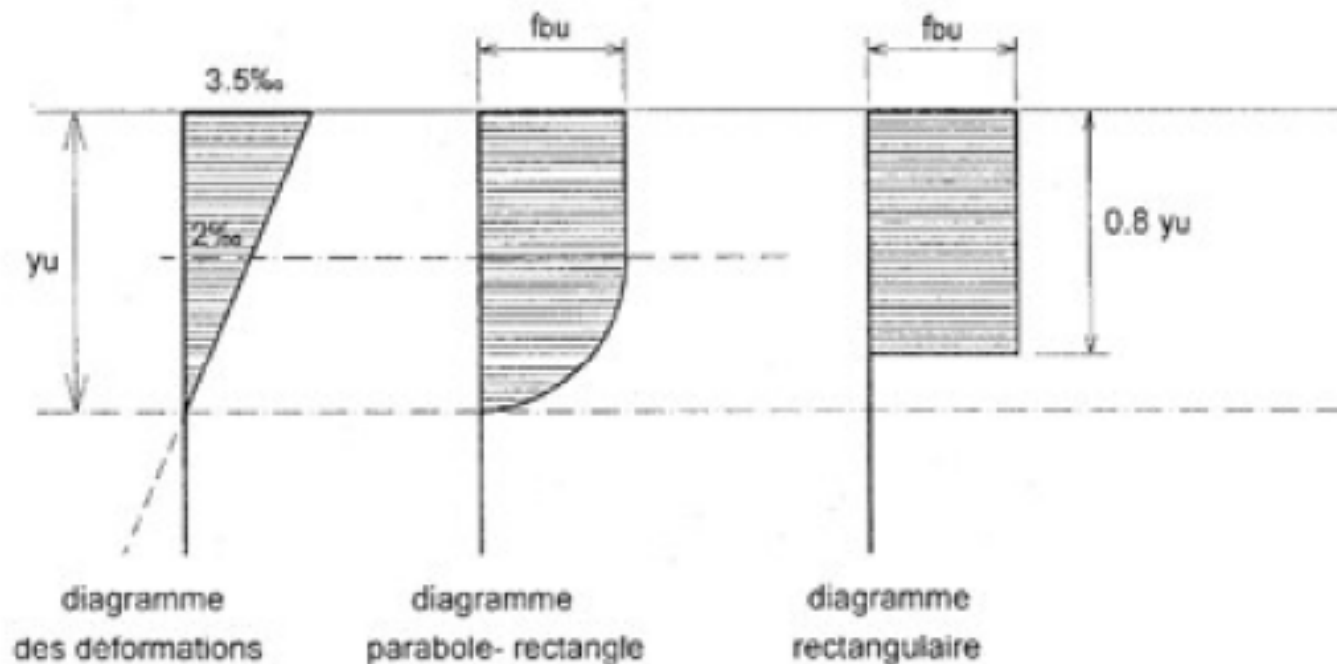
Béton

Le béton travaillera au maximum à partir d'une contrainte f_{bu} (pour un allongement unitaire du béton $\geq 2 \text{ ‰}$). On limite l'allongement unitaire du béton à 3,5 ‰.

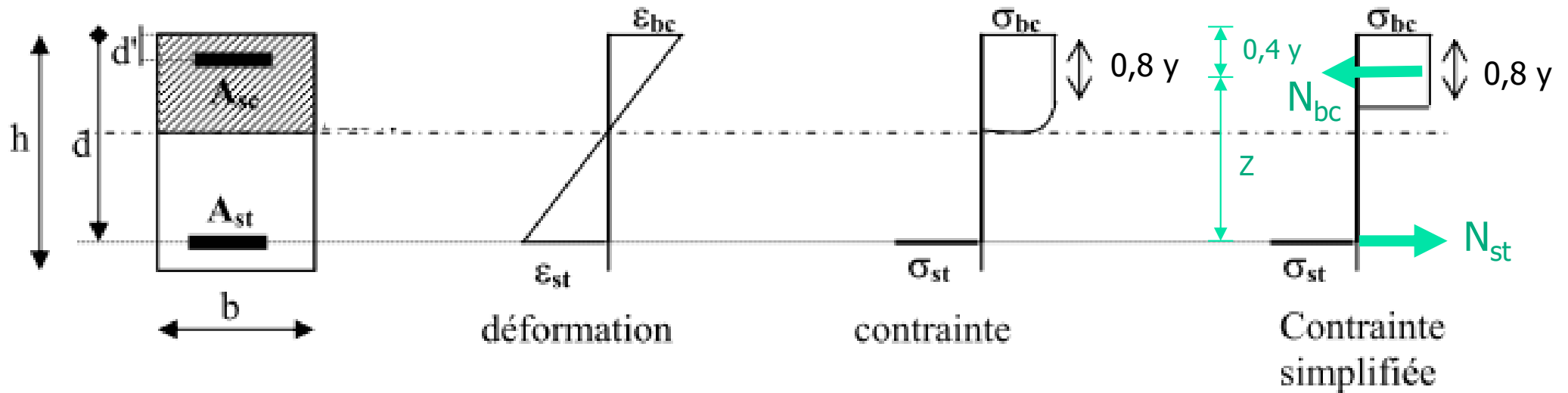
On respecte le règlement et on optimise l'élément en béton armé.

ETAT LIMITE ULTIME EN FLEXION SIMPLE

1) Diagramme rectangulaire du béton: Lorsque la section est partiellement comprimée (cas de la flexion simple), nous pouvons remplacer le **diagramme parabole-rectangle** par un **diagramme rectangulaire simplifié**.



2) Équilibre d'une section :



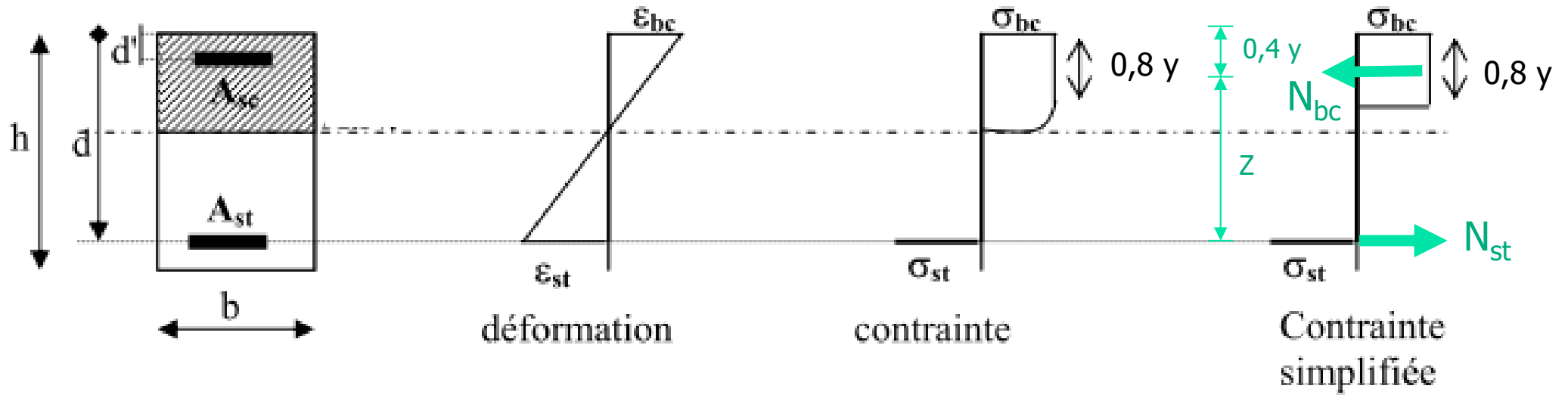
Les efforts normaux sont :

$$N_{bc} = 0,8 \cdot y_u \cdot b \cdot f_{bu}$$

$$N_{st} = A_{st} \cdot \sigma_{st}$$

Le bras de levier du couple interne :

$$z = d - 0,4 \cdot y_u = d \cdot (1 - 0,4 \alpha) \quad \text{avec } y_u = \alpha \cdot d$$



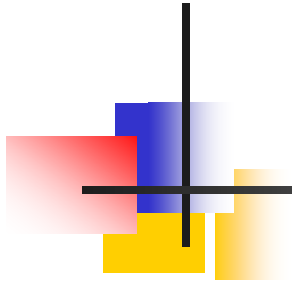
L'équilibre des efforts normaux s'écrit :

$$N_{st} = N_{bc} \quad \text{d'où} \quad A_{st} \cdot \sigma_{st} = 0,8 \cdot y_u \cdot b \cdot f_{bu}$$

L'équilibre des moments devient :

$$M_u = N_{bc} \cdot z = 0,8 \cdot b \cdot f_{bu} \cdot d^2 \cdot \alpha \cdot (1 - 0,4\alpha)$$

$$M_u = N_{st} \cdot z = A_{st} \cdot \sigma_{st} \cdot d \cdot (1 - 0,4\alpha)$$



Moment réduit : A partir de la relation précédente, on peut écrire:

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}} = 0,8\alpha(1 - 0,4\alpha)$$

Cette quantité est appelée **moment réduit** μ_u

NOTA:

Le moment réduit augmente avec la sollicitation et avec la diminution des dimensions de la section.

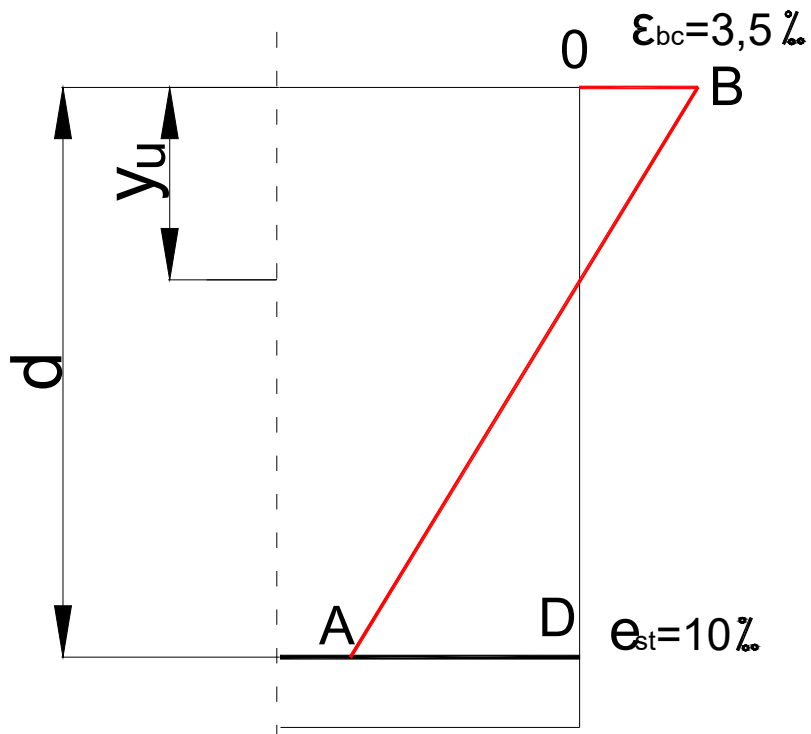
μ_u s'exprime aussi par une équation de 2° degré en α , qui une fois résolue donne:

$$\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$$

3) Règle des pivots

Cette règle se fixe pour objectif d'utiliser au mieux les matériaux **ACIER** et **BETON** d'une poutre fléchie.

La réflexion est menée à partir des diagrammes limites de déformation de la section.
[A ne pas confondre avec les déformations réelles de la pièce sous des charges réelles]



La déformation des matériaux étant connue, les paramètres α et μ sont alors connus.

$$\alpha_{AB} = \frac{\epsilon_{bc}}{\epsilon_{bc} + \epsilon_{st}} = 0,259$$

$$\mu_{AB} = 0,8 \cdot \alpha(1 - 0,4\alpha) = 0,186$$

Diagramme idéal

REMARQUES

1. Les termes α_{AB} et μ_{AB} définis uniquement par la déformation sont indépendants de la nuance d'acier.
2. A μ_{AB} correspond un moment $M_{AB} = \mu_{AB} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$. Si le moment sollicitant est différent de M_{AB} , le diagramme idéal ne sera pas obtenu.

3.1) Règle des pivots – Etude de cas

Si :

$$M_u < M_{AB}$$

$$\mu_u < \mu_{AB}$$

$$\alpha < \alpha_{AB}$$

Dans ces conditions, $y_u = \alpha \cdot d$ diminue. Si nous examinons le diagramme de Navier, 2 possibilités existent pour que la fibre neutre s'élève:

- ♦ Soit ε_{bc} diminue
- ♦ Soit ε_{st} augmente

La 2^{eme} possibilité est à rejeter car on est à la limite des déformations.

La 1^{ere} possibilité (**seule crédible**) se traduit par un mouvement de rotation du diagramme autour du point A.

C'est le PIVOT A

Si :

$$\begin{aligned} M_u &> M_{AB} \\ \mu_u &> \mu_{AB} \\ \alpha &> \alpha_{AB} \end{aligned}$$

Dans ces conditions, $y_u = \alpha \cdot d$ augmente. La fibre neutre descend dans la poutre, C.A.D :

- ♦ Soit ε_{bc} augmente
- ♦ Soit ε_{st} diminue

La 1^{ere} possibilité est à rejeter car ε_{bc} est à la limite.

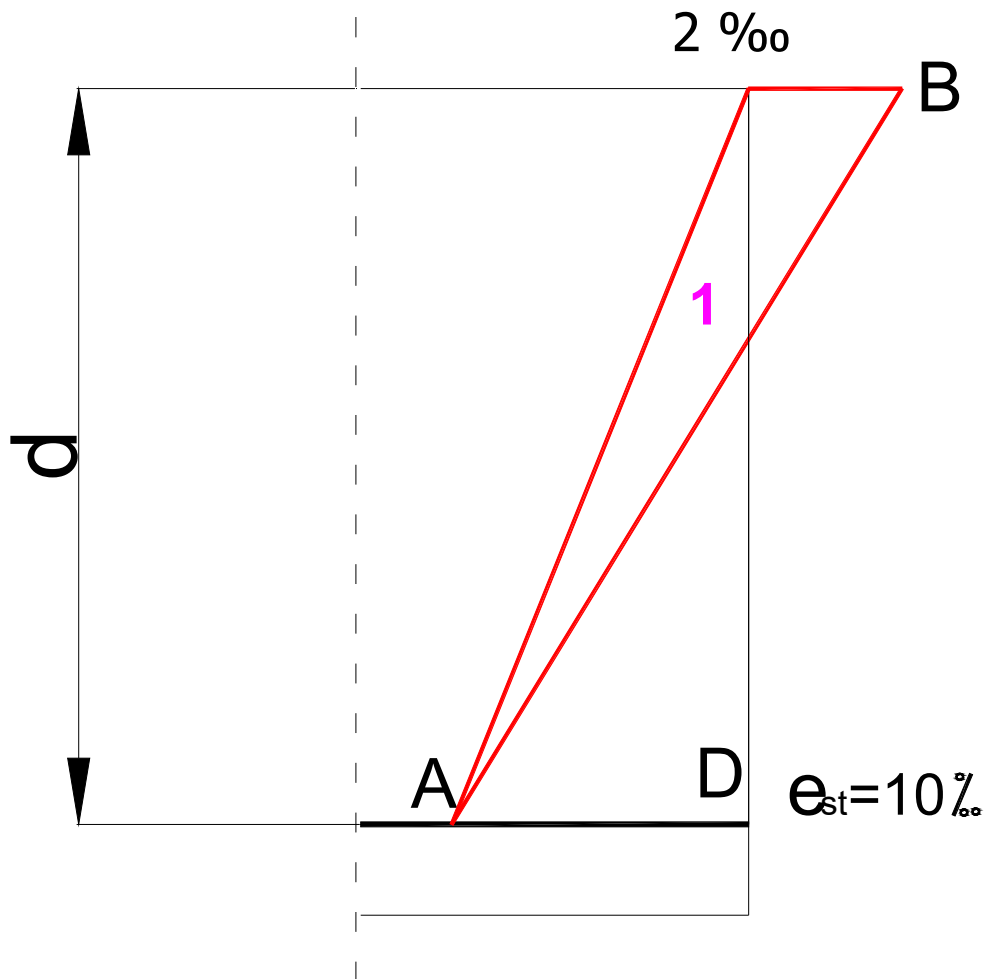
La 2^{eme} possibilité se traduit par un mouvement de rotation du diagramme autour du point B.

C'est le PIVOT B

3.1.1) Pivot A – Utilisation maximum de l'acier

Tous les diagrammes de déformation de sections soumises à un moment fléchissant tel que $M_u < \mu_{AB}$ vont décrire la région 1 et auront comme caractéristiques :

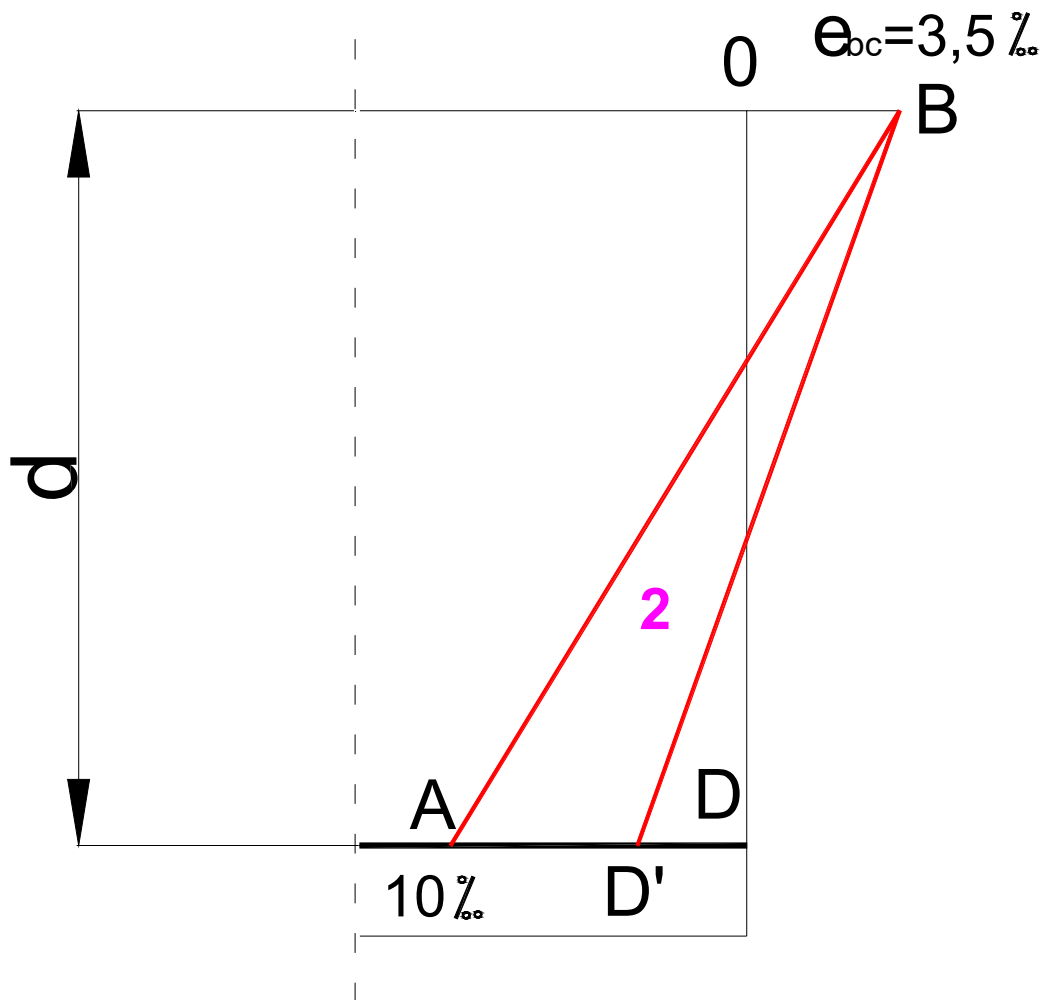
- ♦ $2\text{ ‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5\text{ ‰}$
- ♦ $\varepsilon_{st} = 10\text{ ‰}$
- ♦ $0 \leq \alpha \leq 0,259$
- ♦ $0 \leq \mu_u \leq 0,186$



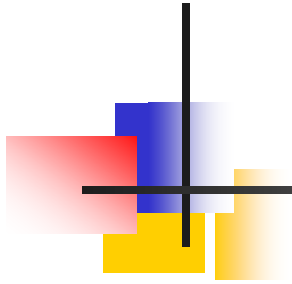
Ce pivot est bien celui qui utilise au mieux l'acier.

3.1.2) Pivot B – Utilisation maximum du béton

ε_L est l'allongement de l'acier obtenu pour une contrainte $\sigma_s = \frac{f_e}{\gamma_s}$.



La déformation de l'acier ne doit pas être inférieure à une certaine limite ε_L sinon, la section des armatures tendues n'est pas exploitée devant un effort de traction faible.

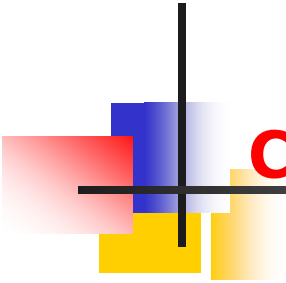


A cette déformation unitaire limite (3,5 ‰) correspond un moment ultime limite M_L . L'ensemble des diagrammes de déformation de sections soumises à un moment $M_L \geq M_u \geq M_{AB}$ décrira la région 2 et aura pour caractéristiques:

- ♦ $\varepsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$
- ♦ $10 \text{ ‰} \geq \varepsilon_{st} \geq \varepsilon_L$
- ♦ $\alpha_L \geq \alpha \geq 0,259$
- ♦ $\mu_L \geq \mu_u \geq 0,186$

Ce pivot est bien celui qui utilise au mieux le béton.

REMARQUE : Les grandeurs ε_L , μ_L , α_L dépendent entièrement du type et de la nuance d'acier



Calcul pratique pour une section à simples armatures

1. Données:

- Les dimensions de la section de béton
- L'enrobage inférieur
- La nature des matériaux utilisés
- Le moment ultime sollicitant

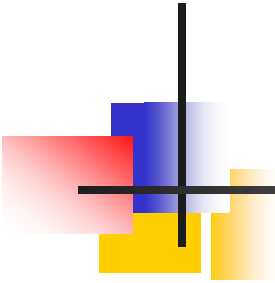
2. Recherche du pivot:

$$\mu_u = \frac{M_u}{b \cdot d^2 \cdot f_{bu}}$$

$$f_{bu} = \frac{0,85 f_{c28}}{1,5}$$

Si $\mu_u < 0,186 \Rightarrow$ Pivot A

Si $\mu_u > 0,186 \Rightarrow$ Pivot B



3. Recherche des paramètres de déformation:

$$\alpha = 1,25(1 - \sqrt{1 - 2\mu_u})$$

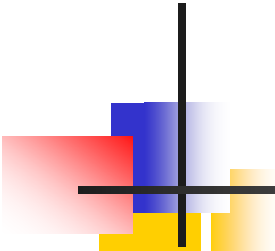
$$z = d. (1 - 0,4 \alpha)$$

$$y_u = \alpha . d$$

4. Recherche de la déformation de l'acier :

Pivot A: $\varepsilon_{st} = 10 \text{ ‰}$

Pivot B: $\varepsilon_{st} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \varepsilon_{bc} \quad \text{avec } \varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$



5. Efforts normaux :

$$N_{bc} = 0,8 \cdot y_u \cdot b \cdot f_{bu} \quad \text{ou} \quad N_{bc} = \frac{M_u}{Z}$$

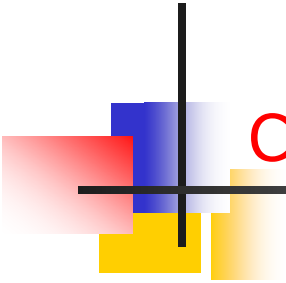
$$N_{st} = N_{bc}$$

6. Section d'acier :

$$N_{st} = A_{st} \cdot \sigma_{st}$$

σ_{st} est donné en fonction de ε_{st} sur les tableaux ou abaques

$$A_{st} = \frac{N_{st}}{\sigma_{st}} \quad \text{ou} \quad A_{st} = \frac{M_u}{Z \cdot \sigma_{st}}$$

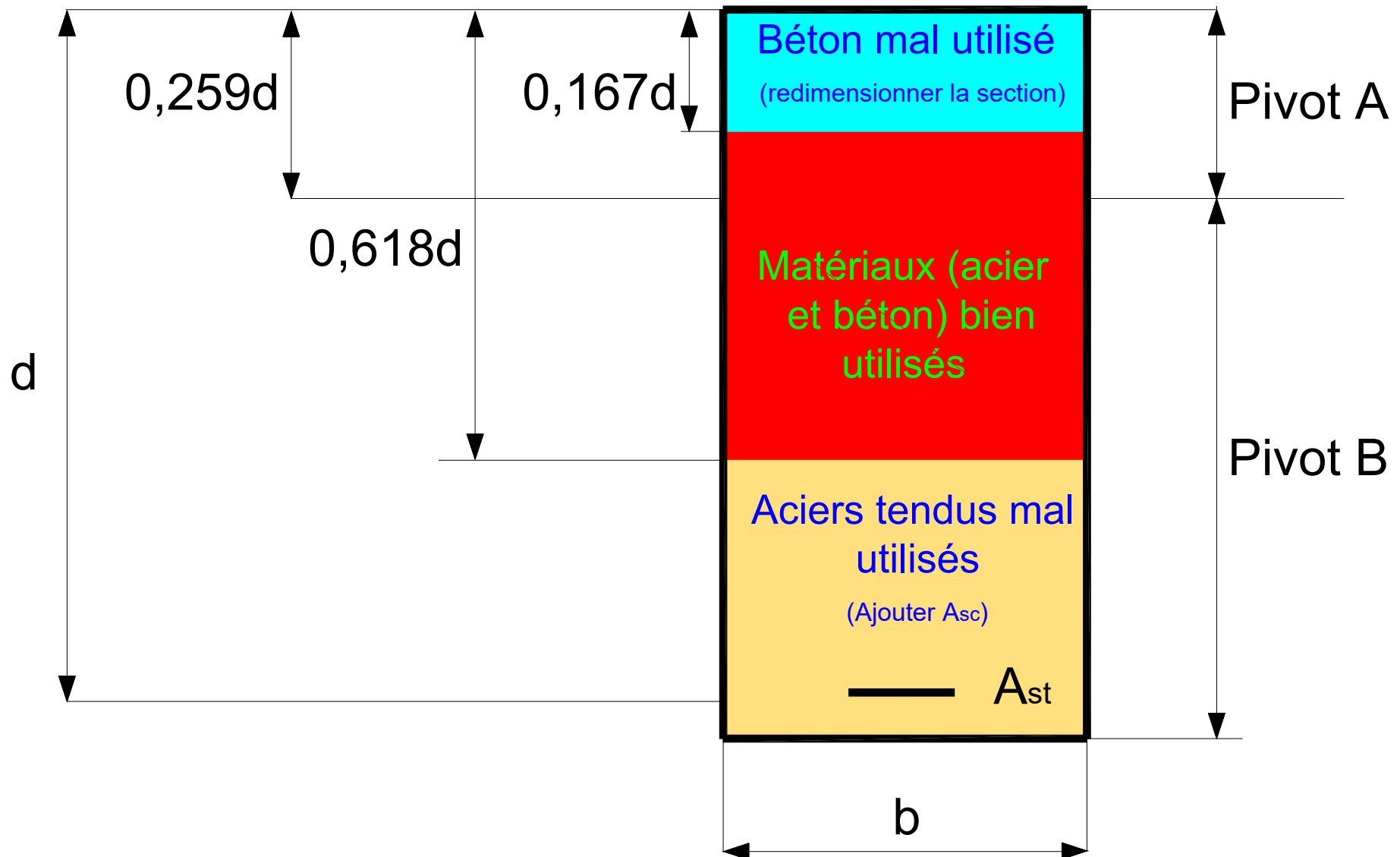


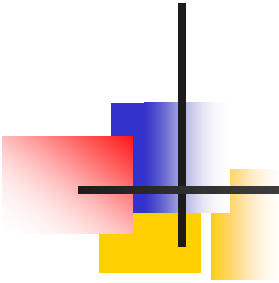
Condition de non fragilité

Pour respecter la condition de non fragilité, la section d'armatures minimale doit respecter l'inégalité suivante :

$$A_s \geq A_{min} = 0,23 \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{tj}}{f_e}$$

Conséquences de la position de l'axe neutre dans une section





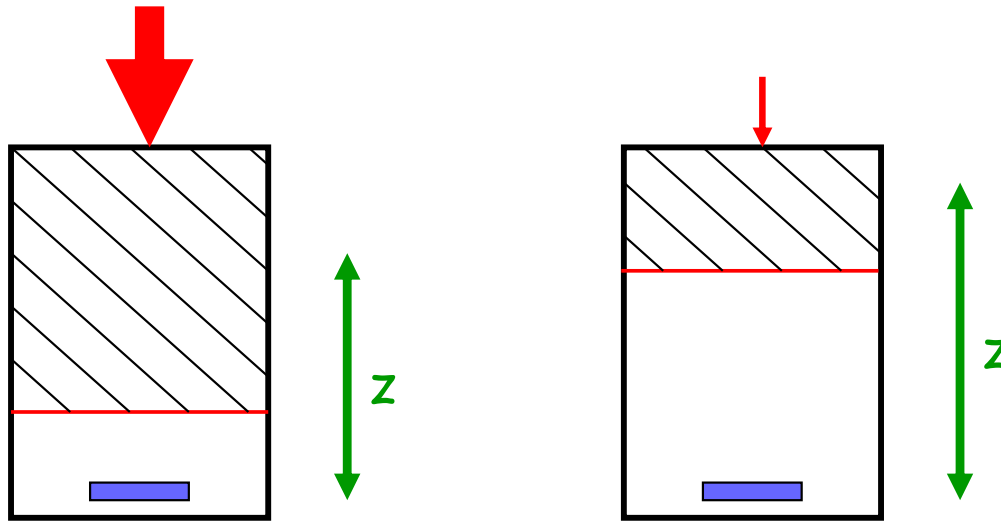
Cas particuliers

Cas 1 : Si $\varepsilon_{bc} > 2\text{‰}$ alors le béton travaille bien.

Si $\varepsilon_{bc} < 2\text{‰}$ alors le béton travaille mal (la section est surdimensionnée)

⇒ on redimensionne la section (ex : on diminue h)

Cas 2 : Lorsque $\varepsilon_s < 2,17 \text{ ‰}$ $\Rightarrow$ les aciers travaillent mal !



Les charges sont trop importantes / poutre

- $\Rightarrow$ besoin de plus de béton comprimé pour résister.
- $\Rightarrow$ l'axe neutre descend.
- $\Rightarrow$ le bras de levier entre le centre de poussée du béton et des aciers diminue
- $\Rightarrow$ N'ayant pas de bras de levier suffisant, les aciers travaillent dans de mauvaises conditions ($\varepsilon_s \leq 2,17 \text{ ‰}$)

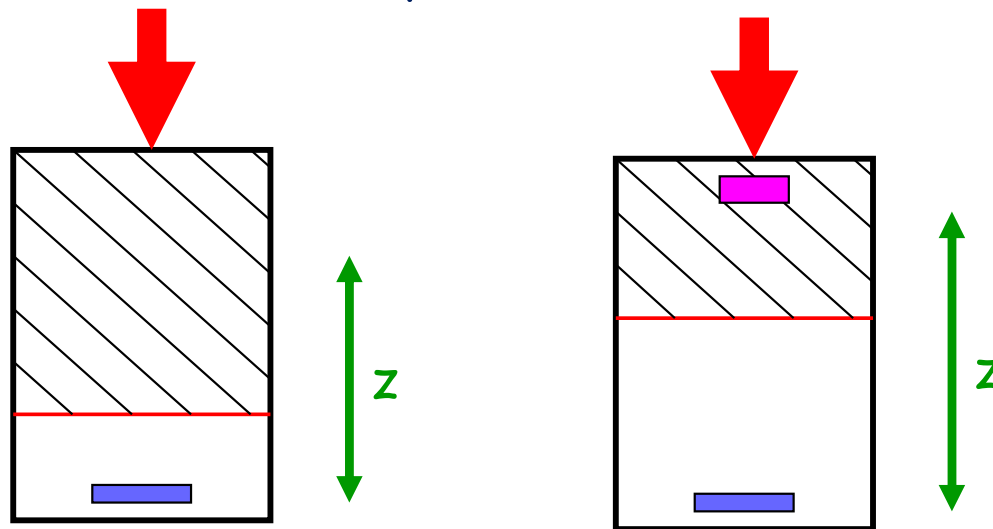
Solutions d'optimisation

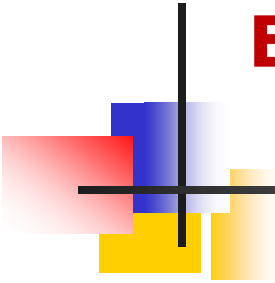
Soit:

♦ $\nearrow$ b ou $\underline{d}$

♦ Ajout Asc

- ⇒ Les aciers comprimés «aident» le béton comprimé
- ⇒ réduit la zone de béton comprimé
- ⇒ monte ainsi l'axe neutre
- ⇒ augmente le bras de levier z
- ⇒ permet aux aciers de bien travailler





ETAT LIMITE ULTIME EN FLEXION SIMPLE

Cas des sections avec armatures comprimées

Introduction

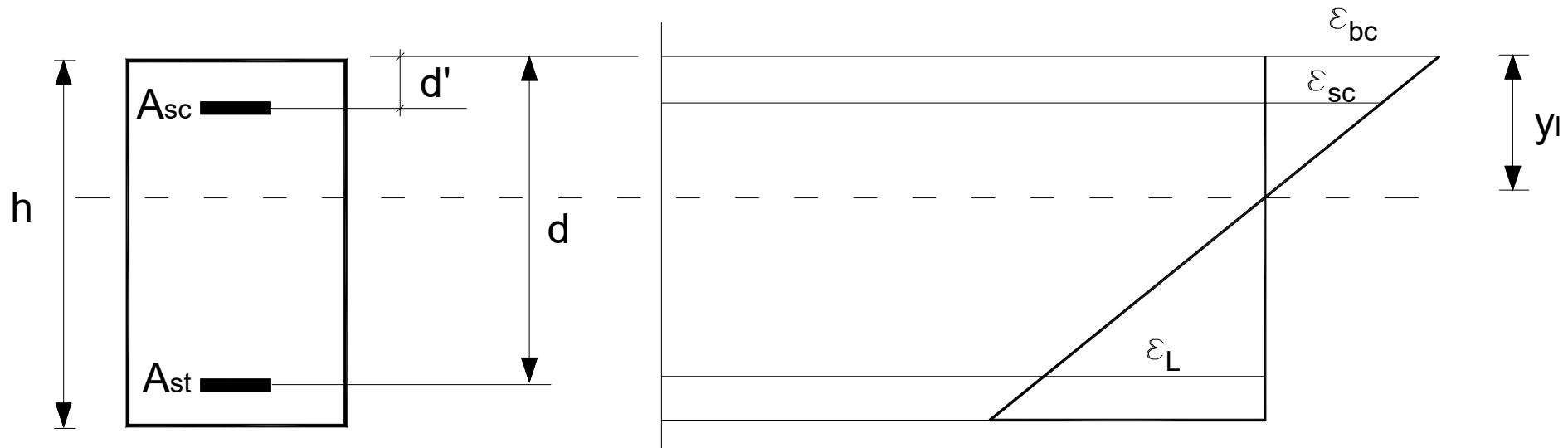
Lorsque le moment réduit μ_u est supérieur au moment réduit limite μ_L correspondant à l'acier choisi, 2 possibilités sont possibles:

- Soit changer l'équarissage (élancement) de la poutre en augmentant sa hauteur.
- Soit adjoindre au béton comprimé des armatures de compression.

Diagramme de déformation

Dans le cas où l'on désire utiliser des armatures doubles, on se fixe le diagramme de déformation tel que :

- $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$
- $\varepsilon_{st} = \varepsilon_L$ (propre à chaque type d'acier (ex: 2,17 ‰ pour HAE500))
- $y_L = \alpha_L \cdot d$





La connaissance de ε_{bc} , ε_L nous permet de calculer α_L . La compatibilité des déformations nous permet d'écrire :

$$\varepsilon_{sc} = \varepsilon_{bc} \frac{(y_l - d')}{y_l}$$

Moment résistant du béton et moment résiduel

Le moment résistant du béton est le moment ultime qui peut équilibrer la section sans lui adjoindre les armatures comprimées.

d'où :

$$M_{rub} = \mu_L \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{bu}$$

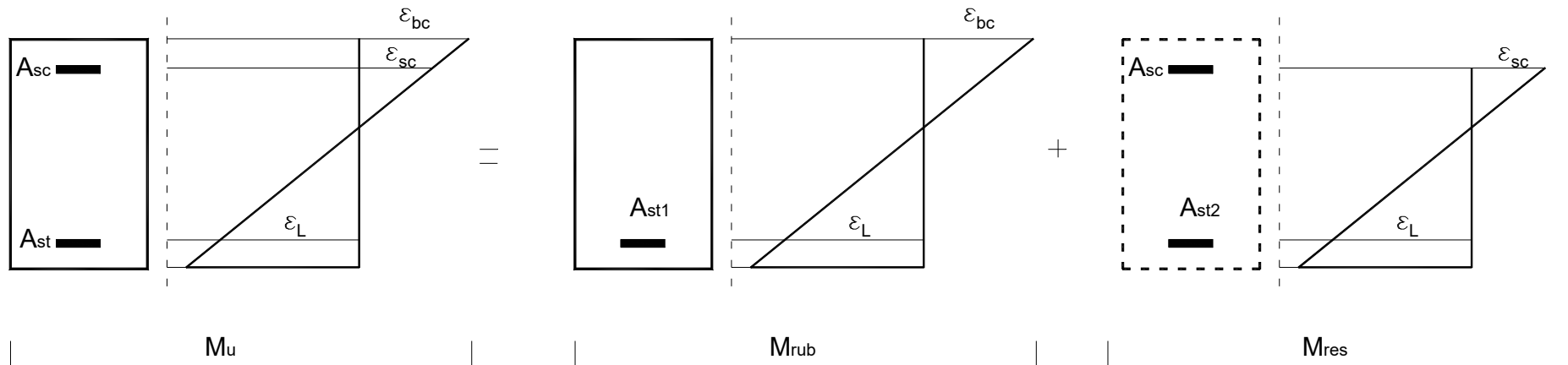
M_{rub} : moment résistant ultime du béton

Dans le cas où $\mu_u > \mu_L$ cela signifie que $M_u > M_{rub}$ et la section nécessite des armatures comprimées.

Le moment résiduel est la différence entre M_u (moment ultime sollicitant la section) et M_{rub} (moment résistant du béton).

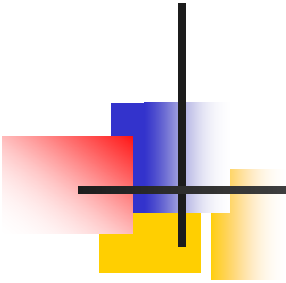
$$M_{res} = M_u - M_{rub}$$

Schéma de calcul



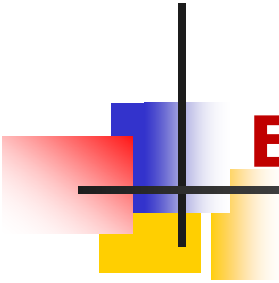
Pour équilibrer M_{rub} :

- Le bras de levier du couple interne est : $Z = d. (1 - 0,4 \alpha_l)$
- La contrainte de travail de l'acier tendu est : $\sigma_{st} = \frac{f_e}{1,15}$
- La section d'acier tendu nécessaire est alors : $A_{st1} = \frac{M_{rub}}{Z. \sigma_{st}}$



Pour équilibrer M_{res} :

- Le bras de levier du couple interne est : $d - d'$
- La contrainte de travail de l'acier tendu est inchangée : $\sigma_{st} = \frac{f_e}{1,15}$
- La contrainte de travail de l'acier comprimé est celle correspondant au raccourcissement unitaire ε_{sc} :
- La section d'acier tendu est alors : $A_{st2} = \frac{M_{res}}{(d-d').\sigma_{st}}$
- La section d'acier comprimé est alors : $A_{sc} = \frac{M_{res}}{(d-d').\sigma_{sc}}$
- La section totale d'acier tendu sera : $A_{st} = A_{st1} + A_{st2}$



ETAT LIMITE DE SERVICE EN FLEXION SIMPLE

- Sollicitations de calcul (combinaison d'action):

$$G_{max} + G_{min} + Q_1 + \sum \psi_i Q_i$$

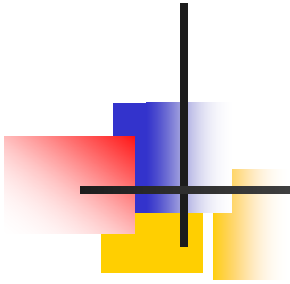
- Béton et acier : comportement élastique linéaire.
- Le coefficient d'équivalence **acier-béton** est conventionnellement fixé à **15**. Il correspond au rapport du module d'élasticité longitudinal de l'acier à celui du béton.

Le module d'élasticité longitudinal (module de Young) de l'acier est $E_s = 200\,000\text{ MPa}$.

Le module de Young du béton est : E_i (instantané) $\approx 30\,000\text{ MPa}$ et E_v (différé) $\approx 10\,000\text{ MPa}$

Le rapport $n = \frac{E_s}{E_b}$ varie de 7 à 20

Le règlement BAEL prend conventionnellement n égal à **15** pour considérer à la fois les charges de courtes durées et les charges de longues durées d'application.



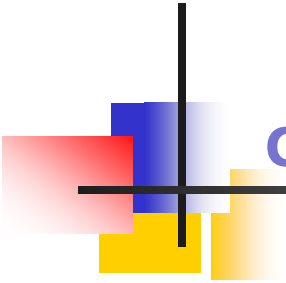
- En E.L.S, la contrainte de compression du béton est limitée à :

$$\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0,6 f_{c28}$$

- En E.L.S, la limitation d'ouverture des fissures impose que :

$$\sigma_s \leq \overline{\sigma_s}$$

$\overline{\sigma_s}$: contrainte limite de traction des aciers à l'E.L.S



Contraintes limites de traction de l'acier à l'E.L.S

- Fissurations peu préjudiciables (FPP) :

$$\overline{\sigma}_s = f_e$$

- Fissurations préjudiciables (FP) (Pièces exposées aux intempéries ou à des condensations):

$$\overline{\sigma}_s = \xi = \min \begin{cases} \frac{2}{3} f_e \\ \max(0, 5 f_e; 110 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \text{ (MPa)}) \end{cases}$$

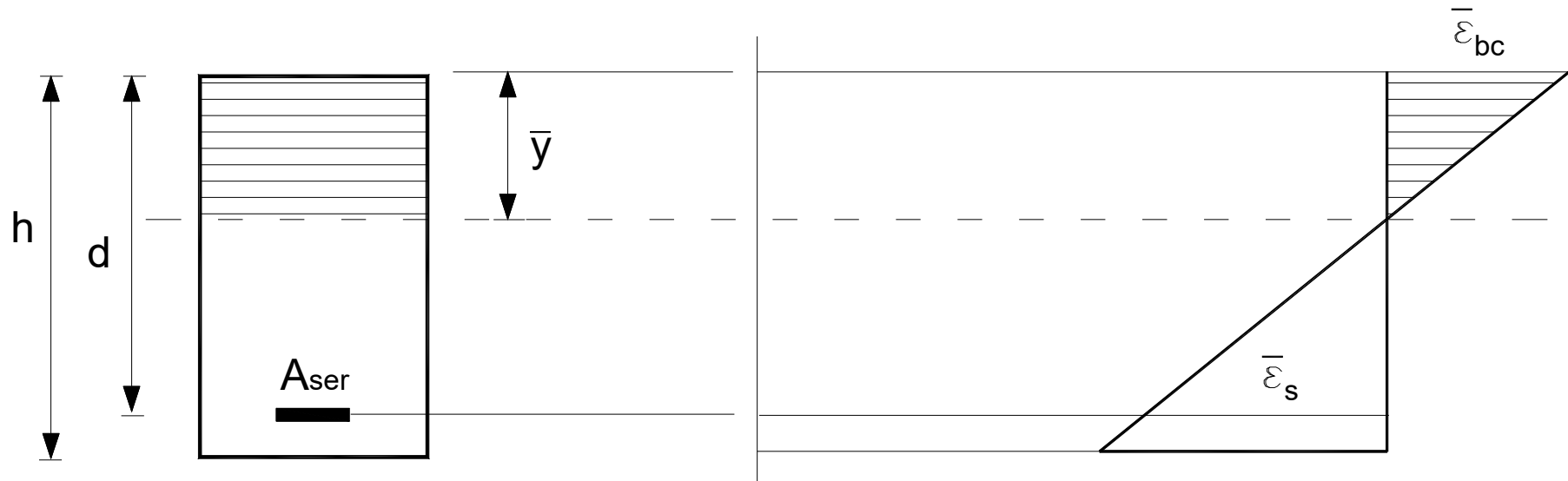
- Fissurations très préjudiciables (FTP) (Pièces placées en milieu très agressif):

$$\overline{\sigma}_s = 0,8 \xi \text{ (MPa)}$$

ξ : contrainte limite dans le cas de la FP

Dimensionnement

Moment résistant du béton M_{rb} : moment de service pour lequel l'état limite de compression du béton et l'état limite d'ouverture des fissures sont atteints simultanément :



$$\frac{\bar{\varepsilon}_s}{d - \bar{y}} = \frac{\bar{\varepsilon}_{bc}}{\bar{y}} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_s \cdot \bar{y} = \bar{\varepsilon}_{bc} \cdot (d - \bar{y})$$

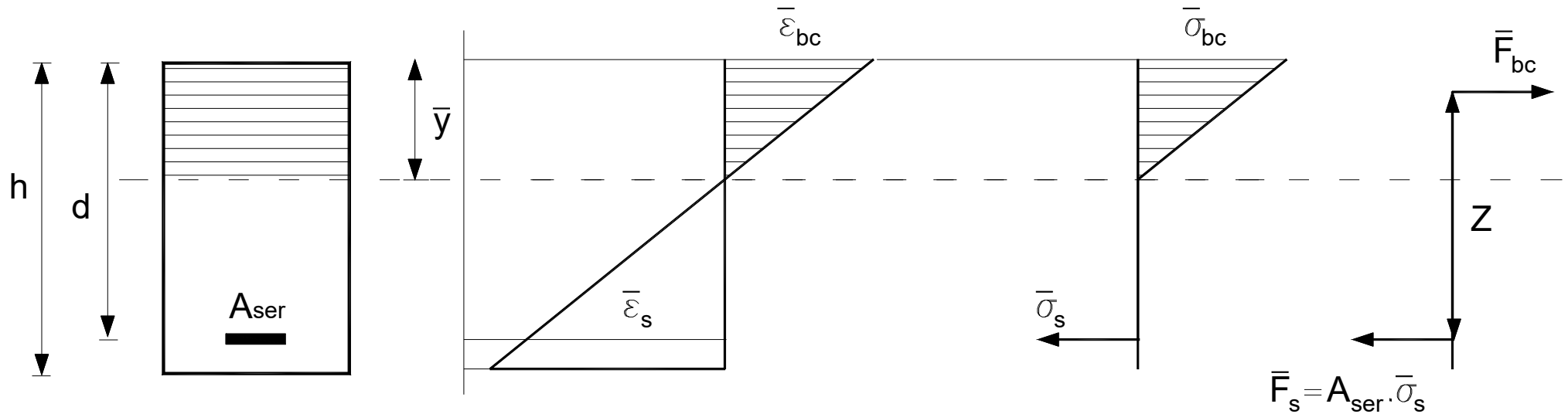
$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{y}}{d}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\varepsilon}_{bc}}{\bar{\varepsilon}_s + \bar{\varepsilon}_{bc}}$$

$$\bar{\varepsilon}_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_{bc}}{E_b} \quad \bar{\varepsilon}_s = \frac{\bar{\sigma}_s}{E_s} = \frac{\bar{\sigma}_s}{15 E_b}$$

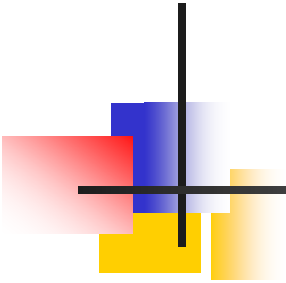
Dimensionnement

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\varepsilon}_{bc}}{\bar{\varepsilon}_s + \bar{\varepsilon}_{bc}} = \frac{\bar{\sigma}_{bc}/E_b}{\bar{\sigma}_s/15.E_b + \bar{\sigma}_{bc}/E_b} = \frac{15.\bar{\sigma}_{bc}}{\bar{\sigma}_s + 15.\bar{\sigma}_{bc}}$$



Equations d'équilibre élastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{bc} = \bar{F}_s = A_{ser} \cdot \bar{\sigma}_s \\ M_{rb} = \bar{F}_{bc} \cdot Z \end{array} \right.$$



Dimensionnement

$$\overline{F}_{bc} = \frac{1}{2} \overline{\sigma}_{bc} \cdot \bar{y} \cdot b = \frac{1}{2} \overline{\sigma}_{bc} \cdot \bar{\alpha} \cdot d \cdot b$$

$$Z = d - \frac{\bar{y}}{3} = d - \frac{\bar{\alpha} \cdot d}{3} = d \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{3}\right)$$

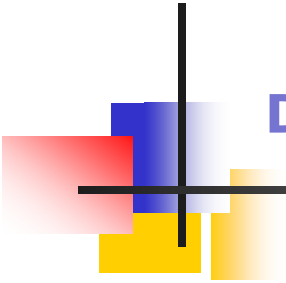
$$M_{rb} = \frac{\bar{\alpha}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{3}\right) \cdot \overline{\sigma}_{bc} \cdot b \cdot d^2$$

Si $M_{ser} \leq M_{rb} \Rightarrow$ Pas besoin d'armatures comprimées

$$M_{ser} = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \sigma_{bc} \cdot b \cdot d^2$$



$$A_{ser} = \frac{M_{ser}}{Z \cdot \overline{\sigma}_s}$$



Dimensionnement

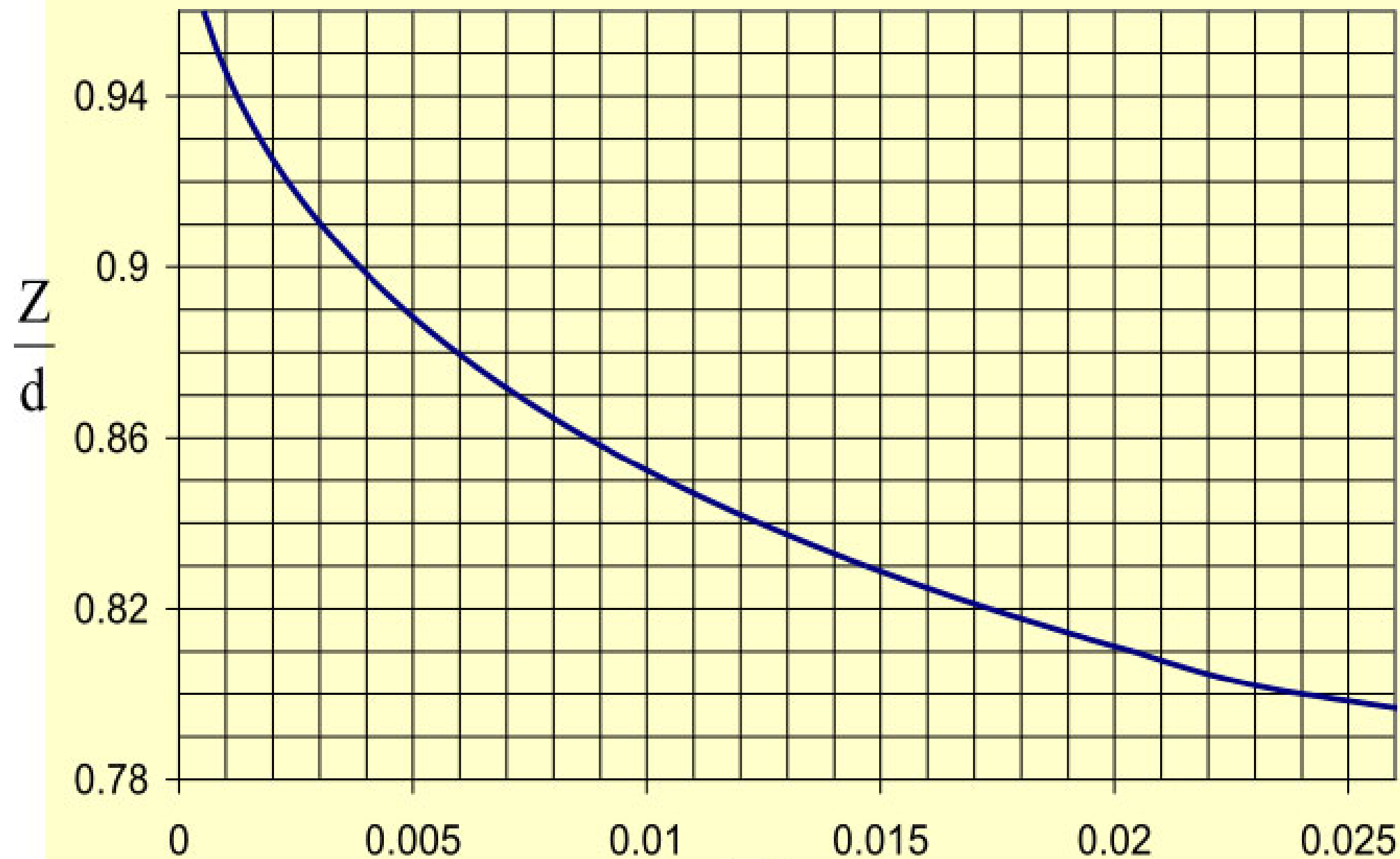
$$\sigma_{bc} = \frac{\overline{\sigma_s}}{15} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

$$M_{ser} = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \frac{\overline{\sigma_s}}{15} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot b \cdot d^2$$

$$M_{ser} = \frac{\overline{\sigma_s}}{30} \cdot \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \cdot b \cdot d^2$$

$$Z = d \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right) \Rightarrow \frac{Z}{d} = 1 - \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \alpha = 3 \left(1 - \frac{Z}{d}\right)$$

$$\mu = \frac{M_{ser}}{\overline{\sigma_s} \cdot b \cdot d^2} = \frac{3}{10} \cdot \frac{Z}{d} \cdot \frac{\left(1 - \frac{Z}{d}\right)^2}{1 - 3\left(1 - \frac{Z}{d}\right)}$$



$$\mu = \frac{M_{\text{ser}}}{\sigma_s b d^2}$$

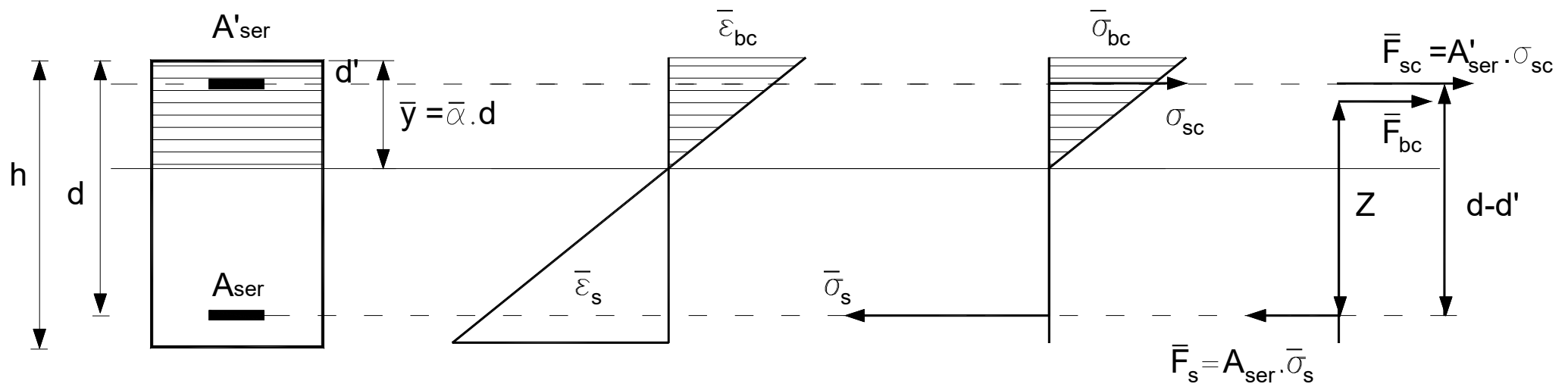
Dimensionnement

Si $M_{\text{ser}} > M_{\text{rb}} \Rightarrow \sigma_{\text{bc}} > \overline{\sigma}_{\text{bc}}$

Armatures comprimées nécessaires

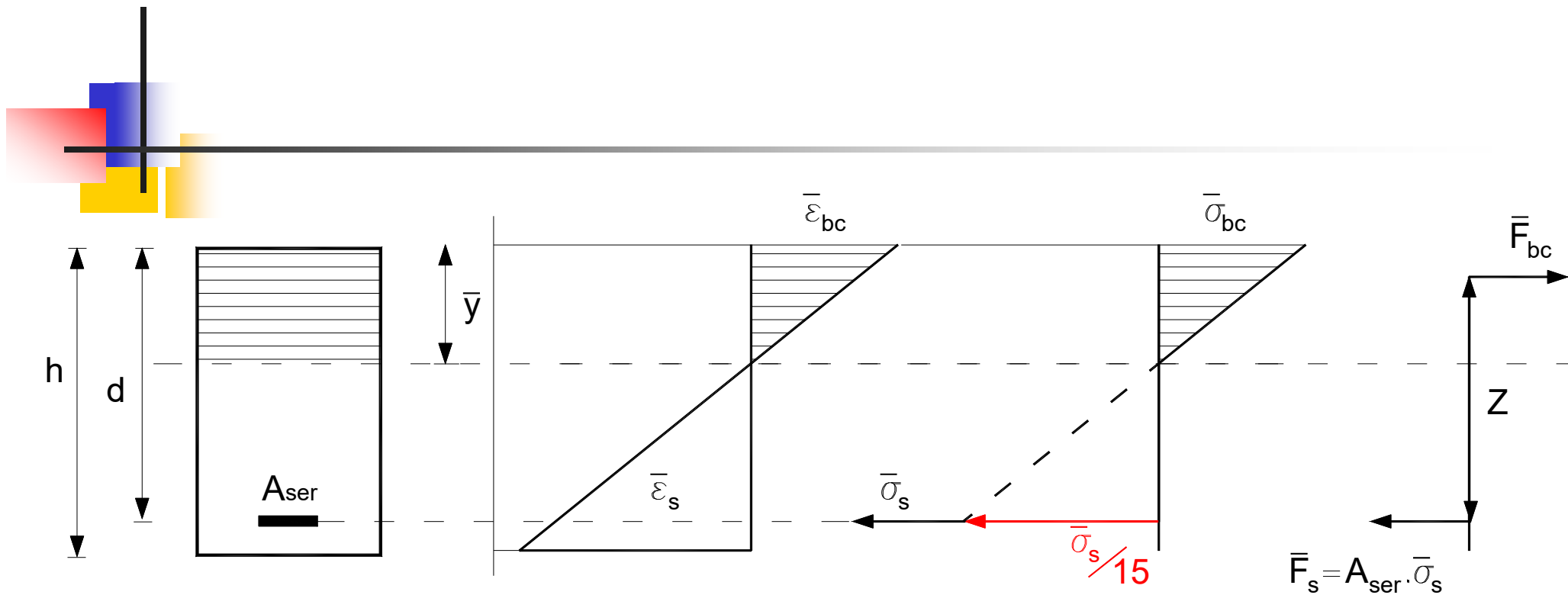
$$\sigma_{\text{sc}} = 15 \cdot \overline{\sigma}_{\text{bc}} \cdot \frac{\overline{\alpha} - \delta'}{\overline{\alpha}} \quad \text{avec} \quad \delta' = \frac{d'}{d}$$

$$M_{\text{ser}} = M_{\text{rb}} + M_2$$



$$A'_{\text{ser}} = \frac{M_{\text{ser}} - M_{\text{rb}}}{\sigma_{\text{sc}} \cdot (d - d')}$$

$$A_{\text{ser}} = \frac{M_{\text{rb}}}{d \cdot \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{3}\right) \cdot \overline{\sigma}_{\text{s}}} + A'_{\text{ser}} \cdot \frac{\sigma_{\text{sc}}}{\overline{\sigma}_{\text{s}}}$$

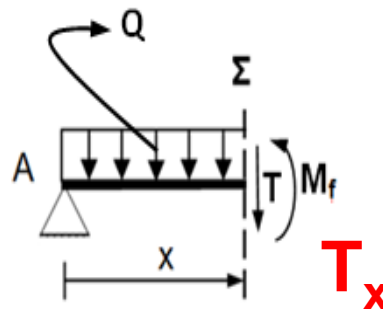
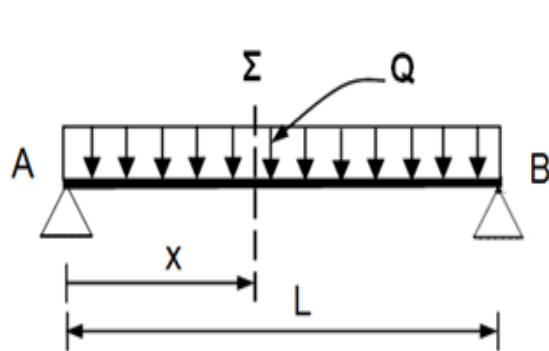


Justification à l'Effort tranchant

1.1 Introduction

Nous avons vu au début du chapitre que dans le cas de la flexion simple, une section quelconque de la pièce étudiée est soumise à:

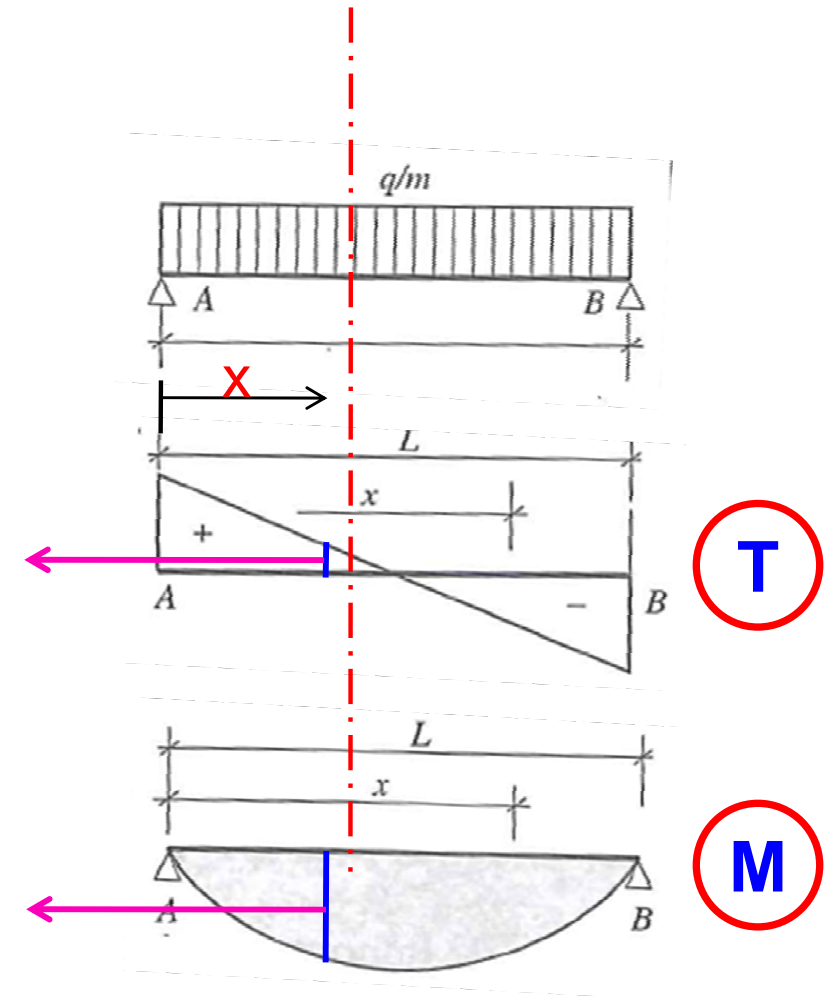
- un moment de flexion
- un effort tranchant



$$N = 0$$

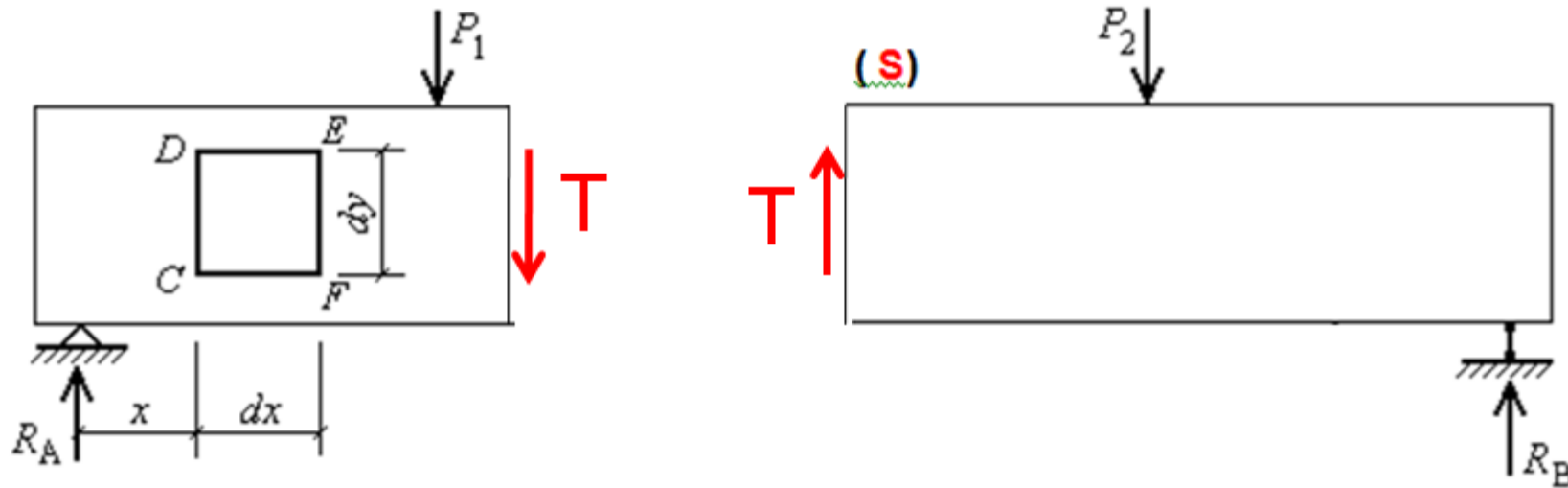
$$T \neq 0$$

$$M \neq 0$$



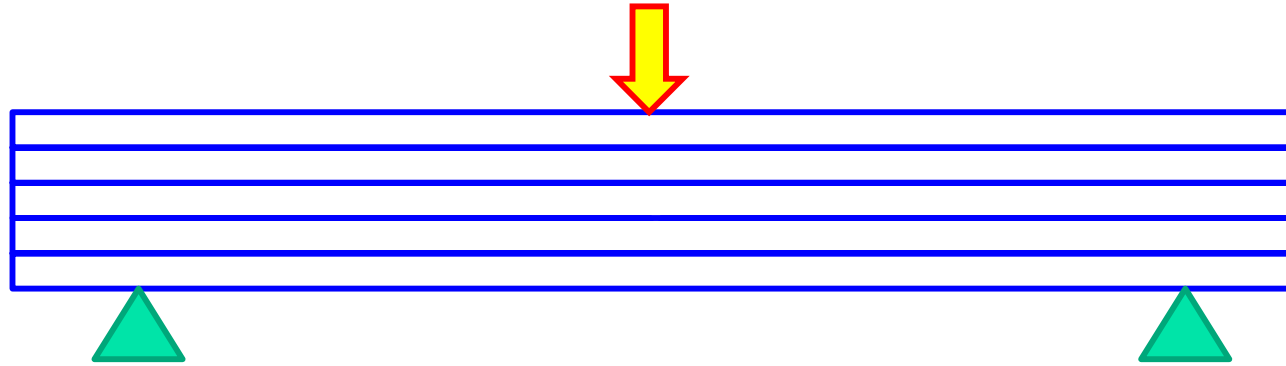
1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

■ Pour une poutre soumise à la flexion simple, l'effort tranchant T , tend à faire glisser la partie de la poutre située à gauche d'une section quelconque (S) , perpendiculaire à la ligne moyenne, par rapport à la partie située à droite de cette section ; c'est le **glissement transversal**.

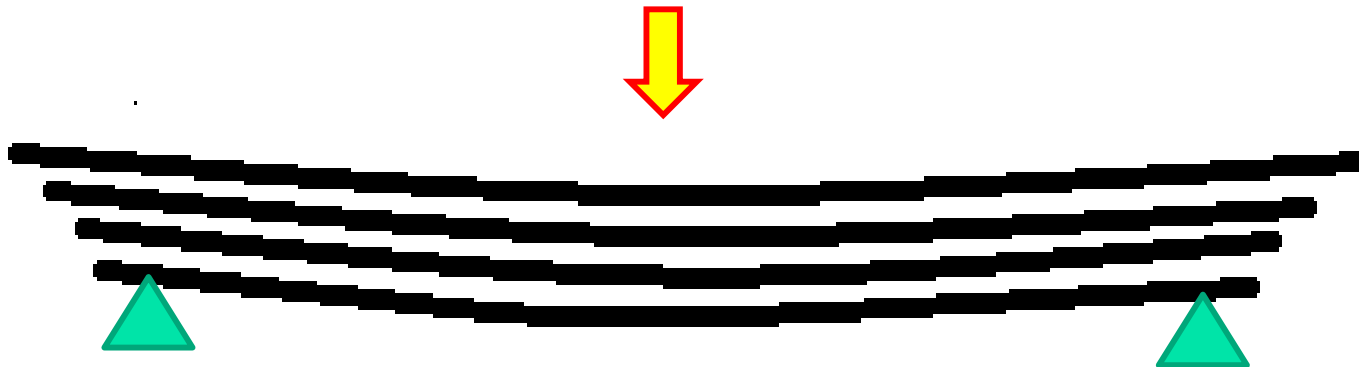


■ Il en résulte dans (S) des contraintes de cisaillement τ , appelées également **contraintes tangentielles**, qui forment un système en équilibre avec l'effort tranchant T .

1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

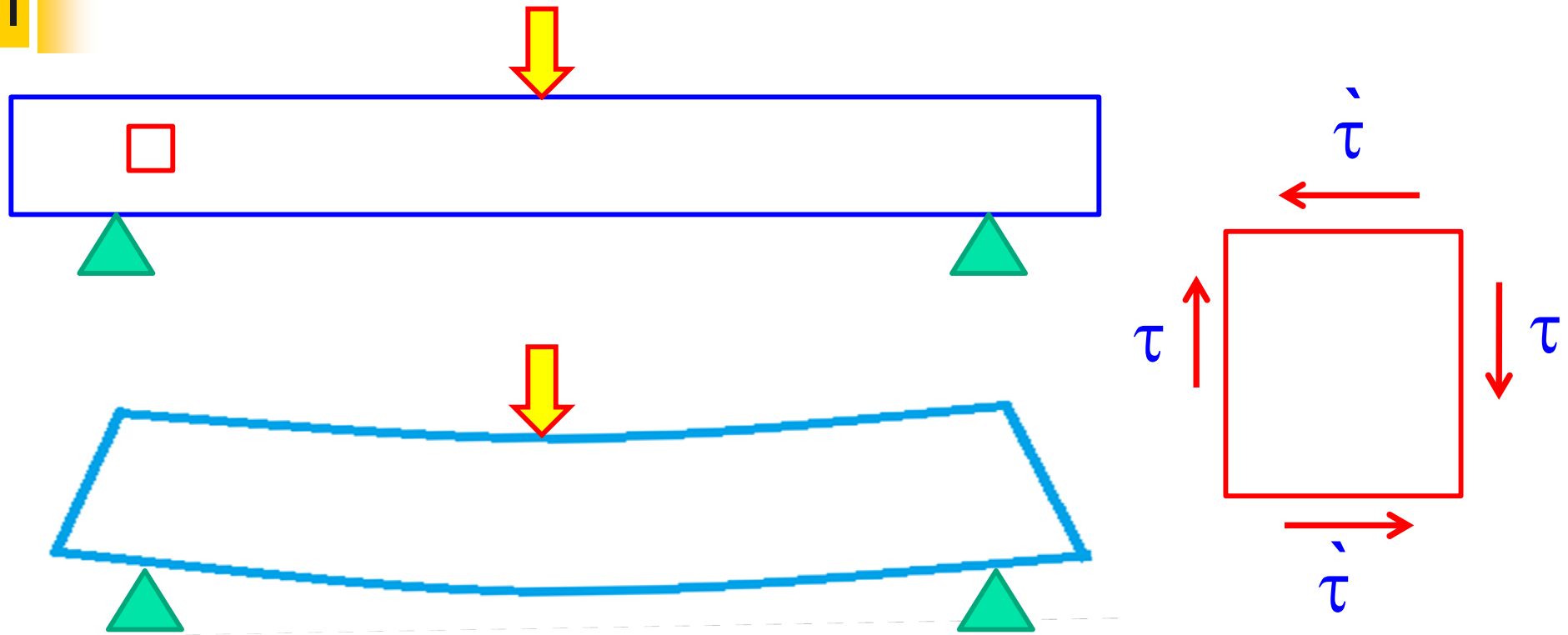


Les plaques ne sont pas collées



Le comportement des plaques

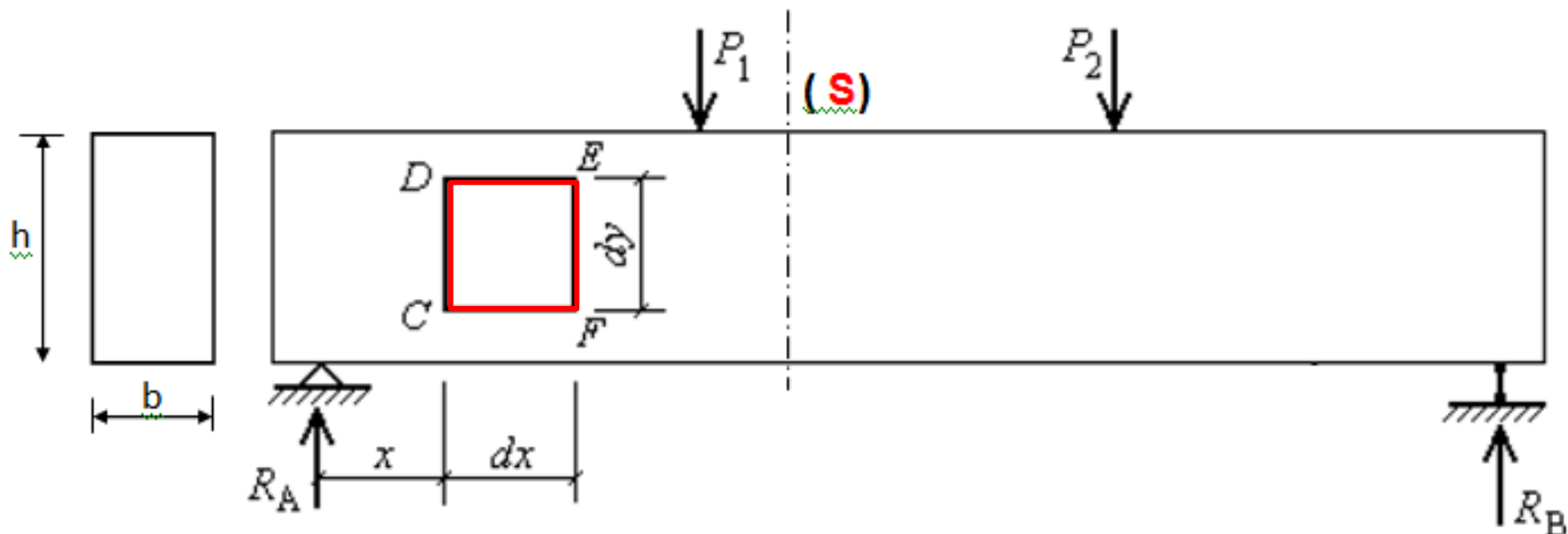
1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant



■ En dehors de ces contraintes transversales de cisaillement, l'effort tranchant provoque également des contraintes longitudinales de cisaillement.

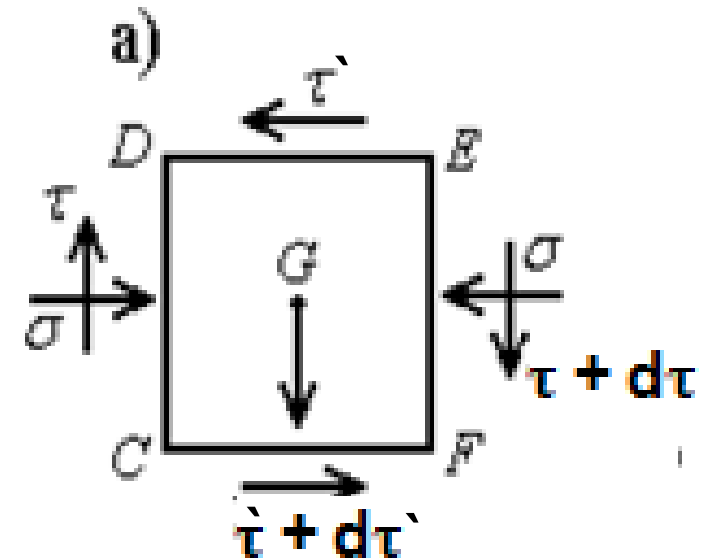
1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

■ On considère l'équilibre d'un petit parallélépipède **CDEF**, de côtés **dx** et **dy** (**dx** et **dy** étant très petits) et de hauteur égale à la largeur **b** de la poutre.



1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

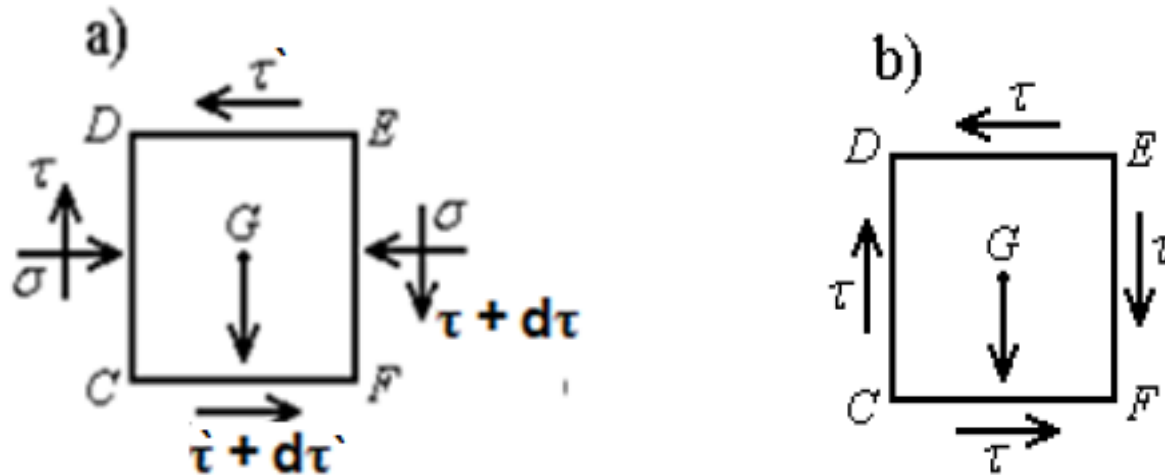
■ Le parallélépipède **CDEF** est en équilibre, donc le moment, par rapport à son centre de gravité **G**, des forces qui lui sont appliquées est nul.



■ Les forces appliquées sont :

- le poids propre, dont la résultante passe par **G** à un moment nul par rapport à ce point ;
- les contraintes normales sur **CD** et **EF** qui, étant donné que **dy** est petit, auront également une résultante passant par **G**, donc un moment nul par rapport à **G** ;
- les contraintes tangentielles, τ , $\tau + d\tau$, τ' , $\tau' + d\tau'$.

1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant



■ La somme des moments par rapport à **G** des forces appliquées s'écrit donc:

$$\tau b dy \frac{dx}{2} + (\tau + d\tau) b dy \frac{dx}{2} - \tau' b dx \frac{dy}{2} - (\tau' + d\tau') b dx \frac{dy}{2} = 0$$

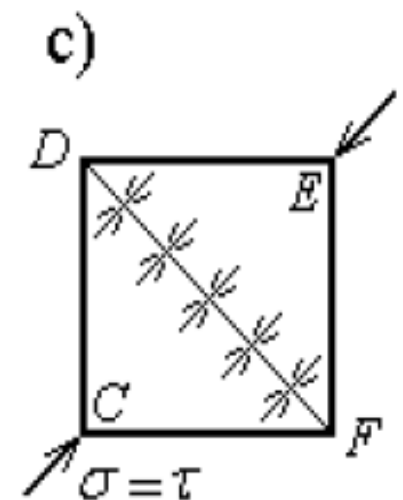
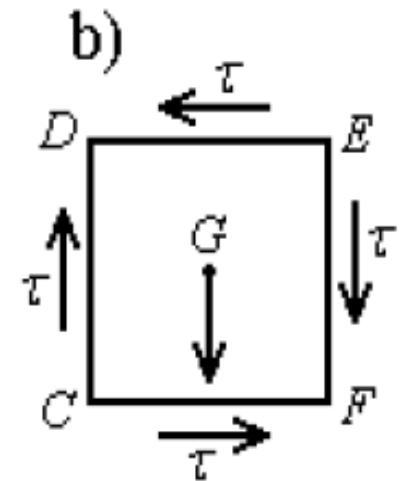
■ En négligeant $d\tau dy (dx/2)$ et $d\tau' dx (dy/2)$ (comme des valeurs Infinitement petites), on obtient:

$$\tau = \tau'$$

1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

■ Par conséquent, sur deux surfaces rectangulaires entre elles et ayant leur origine au même point, surfaces telles que **CD** et **CF**, les contraintes tangentes ont la même valeur et ces contraintes convergent toutes deux vers **C** ou s'éloignent toutes deux de **C**

- On suppose : $dx = dy$
- On a deux forces concourant en **C** ont pour valeur $\tau \cdot b \cdot dx$ et leur résultante est $\tau \cdot b \cdot dx \sqrt{2}$
- Il en sera de même pour les deux forces concourant en **E**.

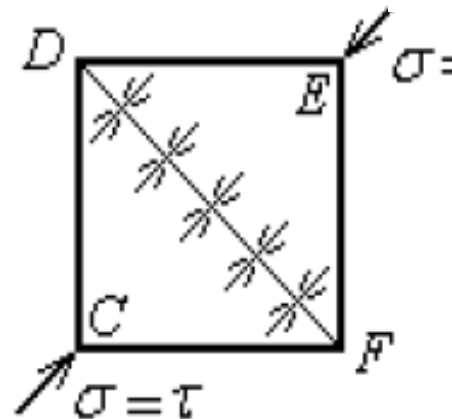


1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

■ Donc le plan passant par **DF** sera soumis à un effort de compression $\tau \cdot b \cdot dx \sqrt{2}$, comme la surface du plan considéré, située à l'intérieur de l'élément, a pour valeur $b \cdot dx \sqrt{2}$, il en résulte que la contrainte de compression sur **DF** sera égale à :

$$\frac{\tau \cdot b \cdot dx \sqrt{2}}{b \cdot dx \sqrt{2}} = \tau$$

c)

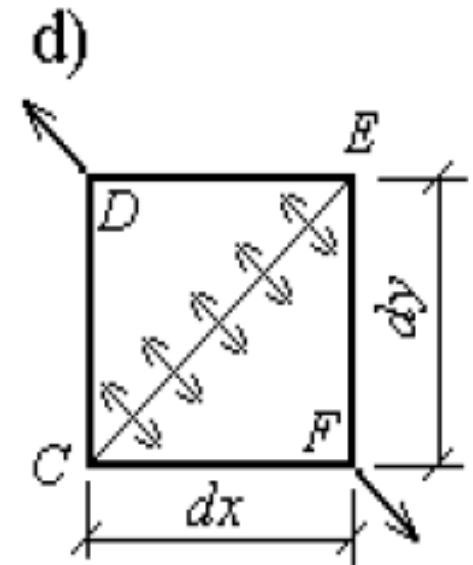


1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

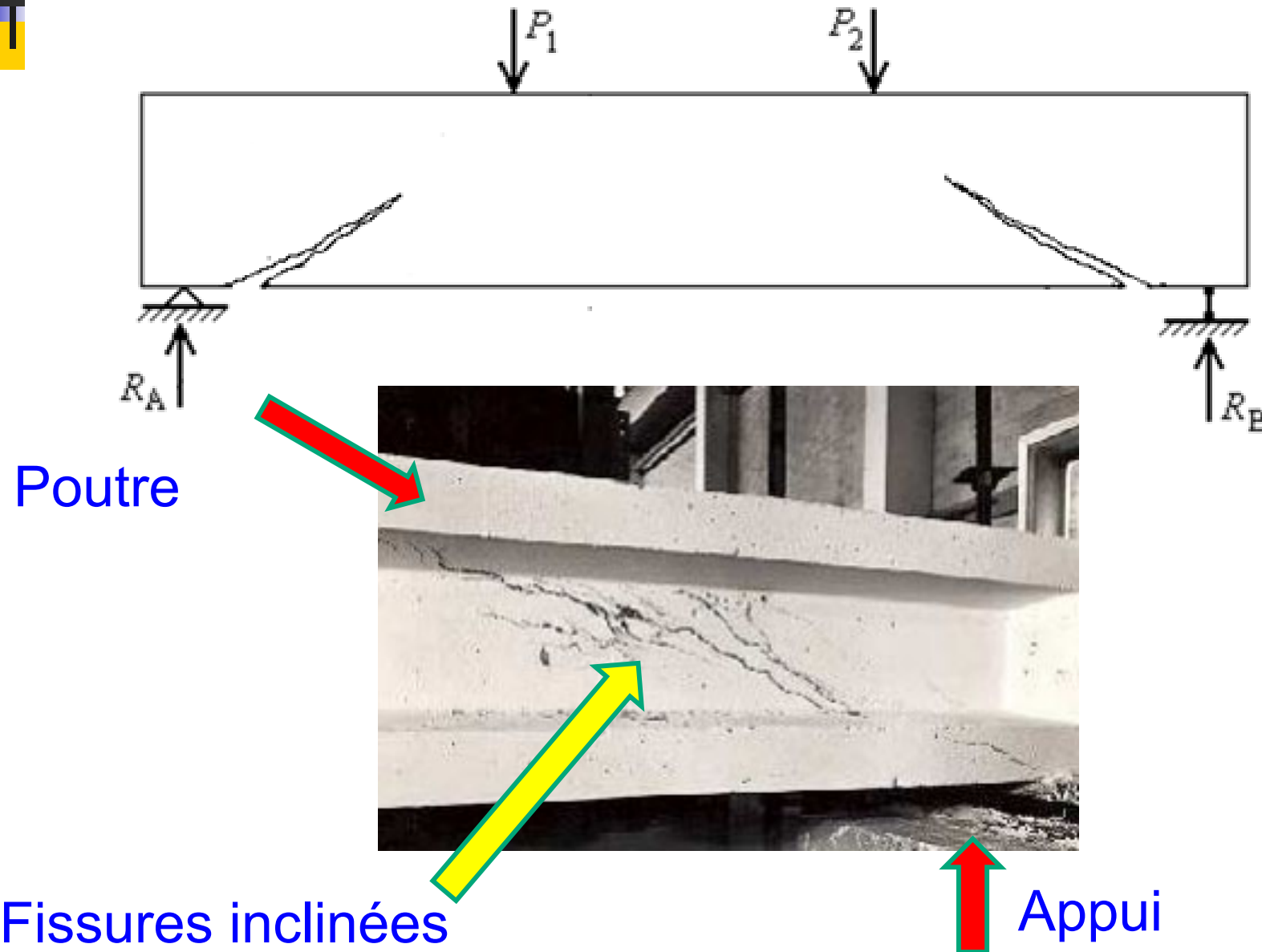
■ On peut montrer de la même manière, que le plan passant par **CE** est soumis à une contrainte de traction égale à τ .

■ Comme la résistance du béton à la traction est faible, les efforts de traction sur les plans inclinés à 45° risquent, s'ils sont assez élevés, de créer des fissures.

■ Ces fissures se produisent là où l'effort tranchant est le plus élevé, c'est-à-dire près des appuis.

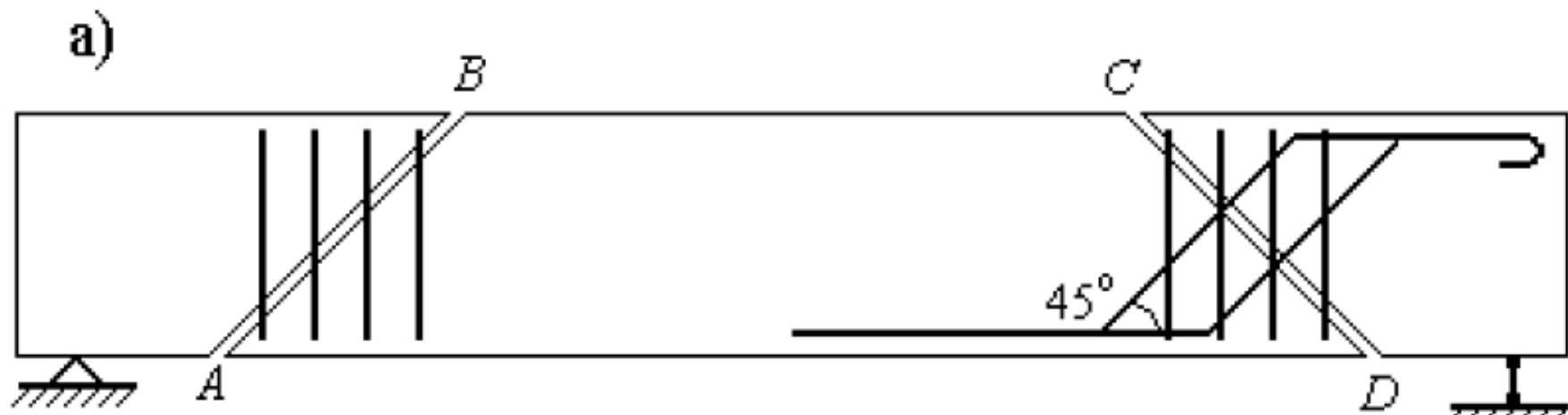


1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant



1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

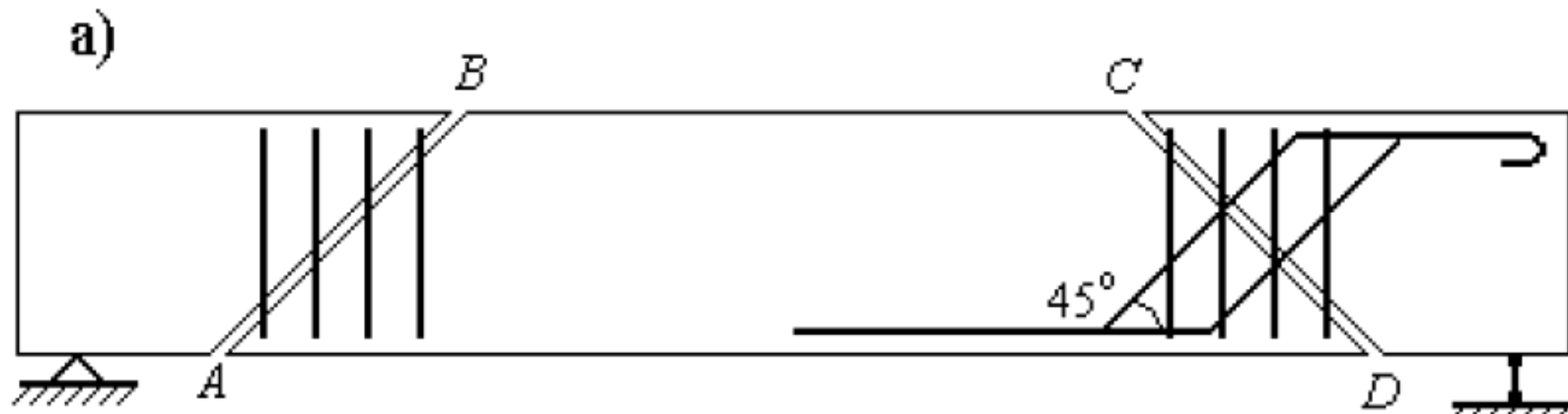
- , On a vu que l'effort tranchant avait pour effet de créer des fissures inclinées sensiblement à 45° sur la ligne moyenne.
- On peut donc dire, schématiquement, que si de telles fissures apparaissent, la partie $ABCD$ de la poutre (tendra à se détacher et à tomber).
- Donc il est nécessaire de rattacher cette partie $ABCD$ au reste de la poutre à l'aide d'armatures transversales.



1.2 Glissement transversal, Glissement longitudinal, Fissures provoquées par l'effort tranchant

On peut utiliser trois types d'armatures:

- Les armatures inclinées ($45 \leq \alpha < 90^\circ$);
- Les armatures droites ($\alpha = 90^\circ$);
- Les armatures mixtes : cadres (90°) et barres relevées (45°)

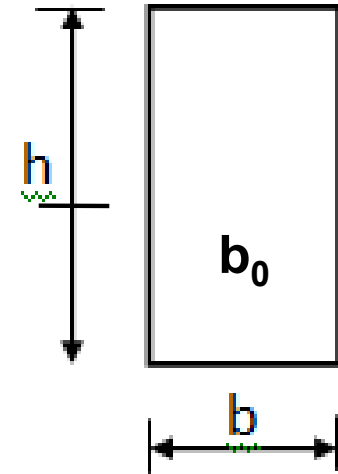


1.3 Contrainte tangente conventionnelle

Justifications de l'âme d'une poutre :

$$\tau_u = \frac{T_u}{b_0 \cdot d}$$

$$\tau_u = \frac{V_u}{b_0 \cdot d}$$



Avec :

τ_u : Contrainte tangente conventionnelle

V_u : la valeur de calcul de l'effort tranchant vis-à-vis de l'état limite ultime (**1.35G + 1.5Q**),

b_0 : la largeur de l'âme,

d : la hauteur utile de la poutre.

1.4 Contrainte tangente limite ultime

■ La détermination de la contrainte tangente limite ultime $\bar{\tau}_{su}$ dépend des cas rencontrés.

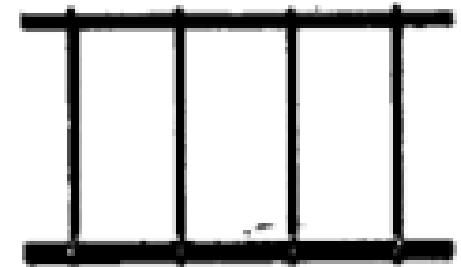
■ Cas des armatures transversales droites ($\alpha = \pi/2$)

➤ Fissuration peu préjudiciable :

$$\bar{\tau}_{su} = \min (0.2 f_{cj}/\gamma b ; 5 \text{ MPa})$$

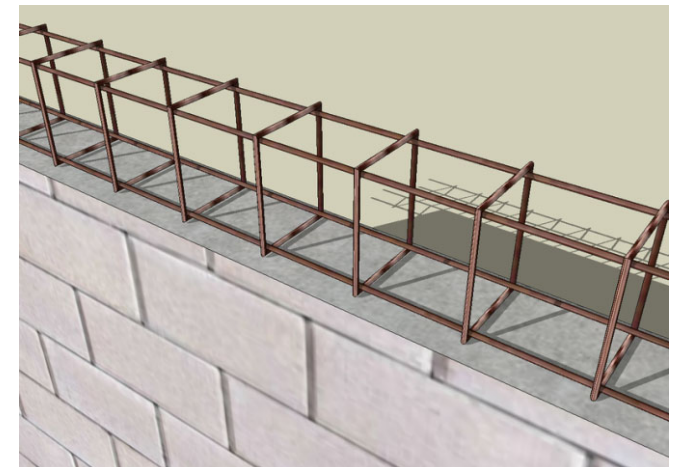
➤ Fissuration préjudiciable et très préjudiciable

$$\bar{\tau}_{su} = \min (0.15 f_{cj}/\gamma b ; 4 \text{ MPa})$$



Armatures droites

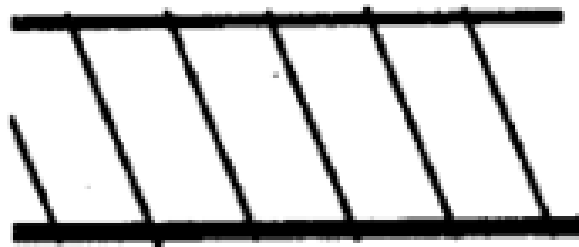
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$



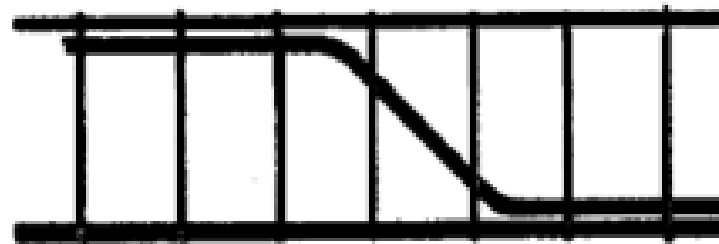
1.4 Contrainte tangente limite ultime

+ Cas des armatures transversales inclinées à 45° :

$$\bar{\tau}_{su} = \min (0.27 \underline{f_{cj}}/\gamma_b ; 7 \text{ MPa})$$



Armatures inclinées
 $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$



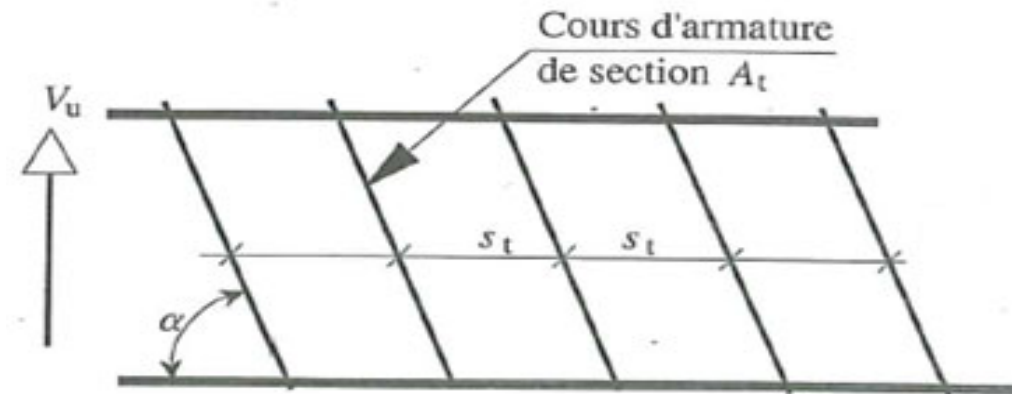
**Armatures droites et
barres relevées à 45°**

1.5 Armatures transversales d'une poutre

1.5.1 Détermination des armatures d'âme

■ La justification vis-à-vis de l'état limite ultime des armatures d'âme s'exprime par la relation :

$$\frac{A_t}{b_0 s_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} k)}{0,9 f_e (\cos \alpha + \sin \alpha)}$$



Avec :

- A_t : section d'un cours d'armatures transversales ;
- s_t : espacement entre deux cours successifs de cadres ou d'étriers ;
- b_0 : épaisseur de l'âme ;
- f_{tj} : contrainte caractéristique de traction du béton à j jours ;
- α : angle d'inclinaison des cadres ;

□ $K = 0$, dans le cas de reprises de bétonnage, ou lorsque la fissuration est jugée très préjudiciable,

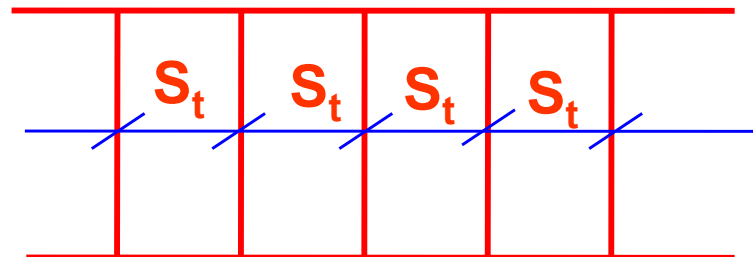
□ $K = 1$, cas de flexion simple , sans reprise de bétonnage

1.5 Armatures transversales d'une poutre

Espacements des armatures transversales dans les cas courants :

Avec : $\alpha = \pi/2$ (armatures droites), $K = 1$, A_t fixé (section des cadres, étriers)

$$s_t \leq \frac{A_t \times 0,9 \times f_{et}}{(\tau_{u0} - 0,3 \times k \cdot f_{t28}) \gamma_s \times b_0}$$



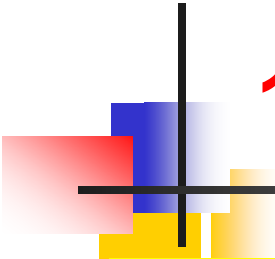
1.5 Armatures transversales d'une poutre

Exemple :

Calcul de la contrainte tangente conventionnelle.

Données

- Poutre de section rectangulaire: 20 cm $\times$ 45 cm; $d = 41$ cm
- Portée: 5,80 m
- Appuis simples en A et B
- Charges uniformément réparties:
 - permanentes y compris poids propre: $g = 18\,500$ N/m
 - d'exploitation: $q = 4\,600$ N/m.



1.5 Armatures transversales d'une poutre

Réponse:

- Effort tranchant à l'appui A (ou B):

$$V_A = (1,35 G + 1,5 Q) L/2$$

$$V_A = 92\,438 \text{ N}$$

- Contrainte tangente conventionnelle:

$$\tau_u = \frac{0,092\,438 \text{ MN}}{0,20 \text{ m} \times 0,41 \text{ m}} = 1,127 \text{ MPa}$$

1.5 Armatures transversales d'une poutre

1.5.2 Règle de Caquot pour la détermination pratique des espacements

■ Conditions d'application

- Charges uniformément réparties
- Section constante de poutre
- Cas de flexion simple et $k = 1$.

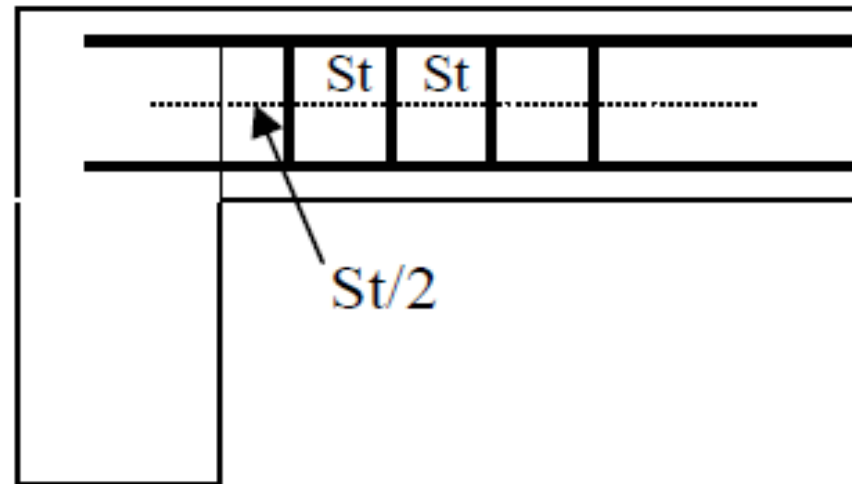
■ Démarche à suivre

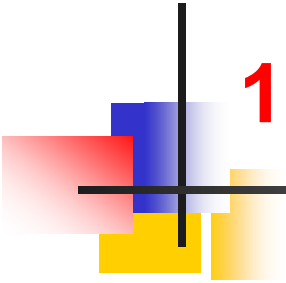
1. Calcul de l'espacement s_{t0} à l'appui: A_t étant fixe, on utilise la formule présentée dans le paragraphe 1.5.1.

$$s_t \leq \frac{0,9 A_t \cdot f_e}{\gamma_s \cdot b_0 (\tau_u - 0,3 f_{tj})}$$

1.5 Armatures transversales d'une poutre

2. Position du premier cours à une distance $s_{t0}/2$ de l'appui .





1.5 Armatures transversales d'une poutre

3- Espacements suivants en prenant la suite des valeurs en cm:

7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 40

⚡ Chaque valeur d'espacement est **répétée** autant de fois **(N)** qu'il y a de mètres dans la demi-portée.

$$N \text{ (en mètres)} = L / 2$$

1.5 Armatures transversales d'une poutre

1.5.3 Méthode analytique pour la détermination pratique des espacements

- Calculer le premier espacement S_{t0} pour V_{u0} à $x = 0$ et placer le premier cadre à $S_{t0}/2$.
- Répéter ensuite l'espacement n fois (avec « n » nombre de mètres dans la 1/2 portée) .
- Calculer l'effort tranchant pour cette nouvelle abscisse
$$x = S_{t0}/2 + n \cdot S_{t0},$$
- Calculer le nouvel espacement S_t pour ce nouveau V_u ,
- Répéter l'opération jusqu'à atteindre $V_u = 0$ ou S_{tmax} (voir 1.5.1).

1.5 Armatures transversales d'une poutre

1.5.4 Dispositions constructives minimales :

✚ Pourcentage minimal d'armatures transversales (A.5.1,22)

Il faut vérifier que:

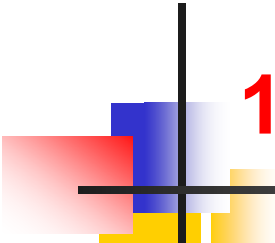
- $st \leq \min (0.9 d, 40 \text{ cm});$
- $st \leq A_t \cdot f_e / 0.4 \cdot b_0$

✚ Diamètre des aciers transversaux (A.7.2,2)

Il faut vérifier que:

$$\emptyset_t \leq \min (h / 35, b_0 / 10, \emptyset_l)$$

$\emptyset_l$: diamètre des armatures longitudinales



1.5 Armatures transversales d'une poutre

Exemple :

Calcul de l'espacement initial près de l'appui pour la poutre

Données complémentaires

Armatures droites ($\alpha = 90^\circ$)

Cadres simples, diamètre 6 mm, acier Fe E 215

Béton: $f_{c28} = 30$ MPa

Pas de reprise de bétonnage

Fissuration peu préjudiciable

1.5 Armatures transversales d'une poutre

Réponse:

- Utilisation de la formule (6):

$$s_t \leq \frac{0,9 A_t \cdot f_e}{\gamma_s \cdot b_0 (\tau_u - 0,3 f_{tj})}$$

$$s_t \leq \frac{0,9 \times 0,57 \times 10^{-4} \times 215}{1,15 \times 0,20 (1,127 - 0,3 \times 2,4)} \text{ cm}$$

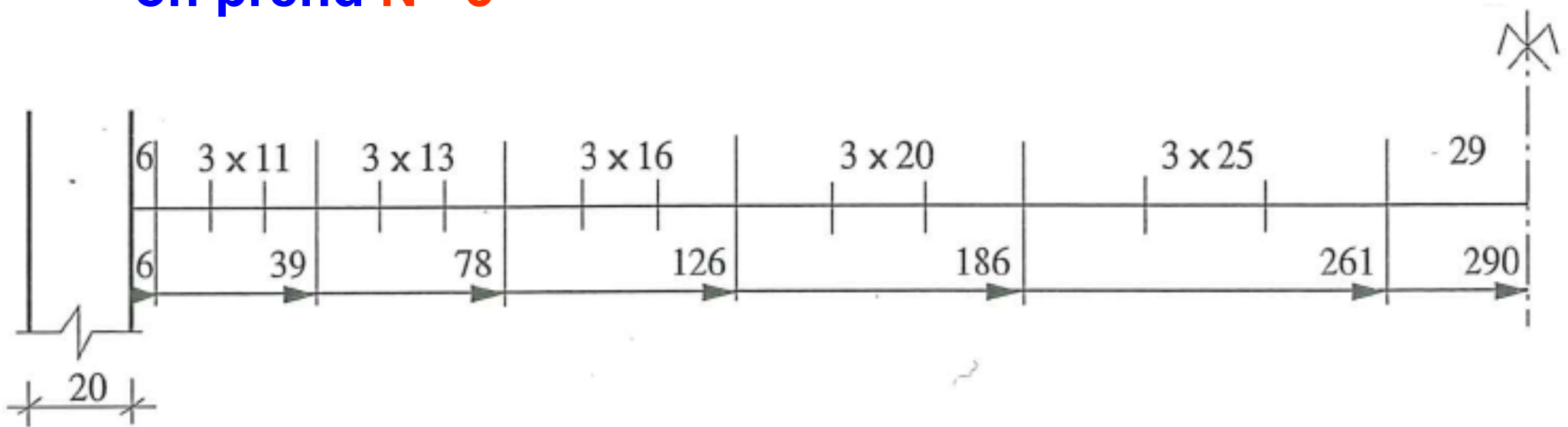
$$s_t \leq 11,78 \text{ cm ; on prend } s_t = 11 \text{ cm.}$$

1.5 Armatures transversales d'une poutre

Réponse:

Position du premier cours placé à 6 cm du nu de l'appui.

N (en mètres) = $L / 2 = 5,8/2 = 2,9$,
on prend $N = 3$

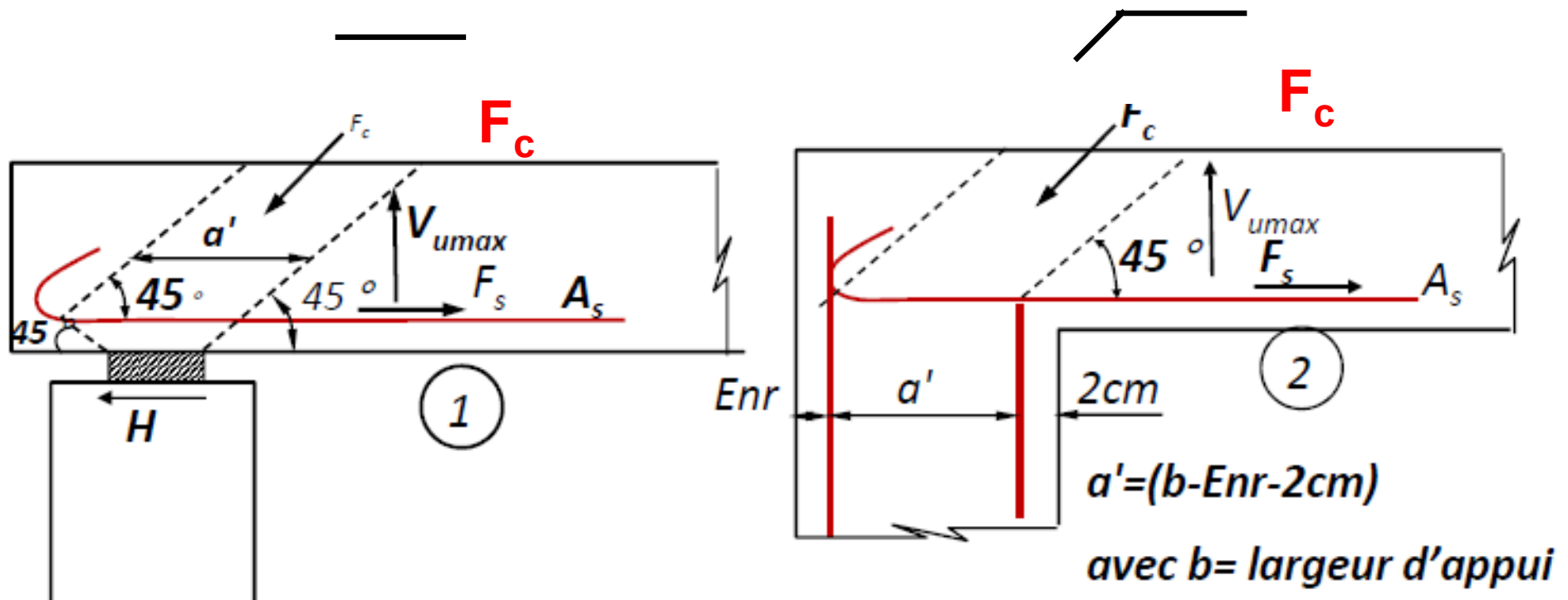


7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 40

1.6 Justifications aux appuis

1.6.1 Appui de rive

- A l'appui de rive les charges sont transmises par une bielle de béton unique inclinée à 45° ;
- Deux vérifications doivent être faites concernant:
 - la section d'armatures longitudinales
 - la compression de la bielle de béton :



1.6 Justifications aux appuis

a°) Vérification des armatures longitudinales :

$$F_c = V_{u \max} \times \sqrt{2} ; \quad F_s = \frac{F_c}{\sqrt{2}} + H = V_{u \max} + H$$

■ Où «H» est la force horizontale éventuellement transmise par l'appui :

■ D'où la condition :

$$A_s \geq \frac{(V_{u \max} + H) \times \gamma_s}{f_e}$$

■ Dans le cas d'un appui de type 1 cette section d'acier doit être totalement ancrée au-delà du bord de l'appui.

1.6 Justifications aux appuis

b°) Vérification de la compression de la bielle de béton :

■ La bielle de béton supporte une compression:

$$F_c = V_{u \max} \times \sqrt{2}$$

■ sur une section $b_0 \times \frac{a}{\sqrt{2}}$ où (

$$a = \min(a' ; 0,9 \times d)$$

a) se calcule par :

$$\sigma_{bc} = \frac{V_{u \max} \times \sqrt{2}}{b_0 \times \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{2 \times V_{u \max}}{b_0 \times a} \leq \frac{0,8 f_{cj}}{\gamma_b} \text{ d'où}$$

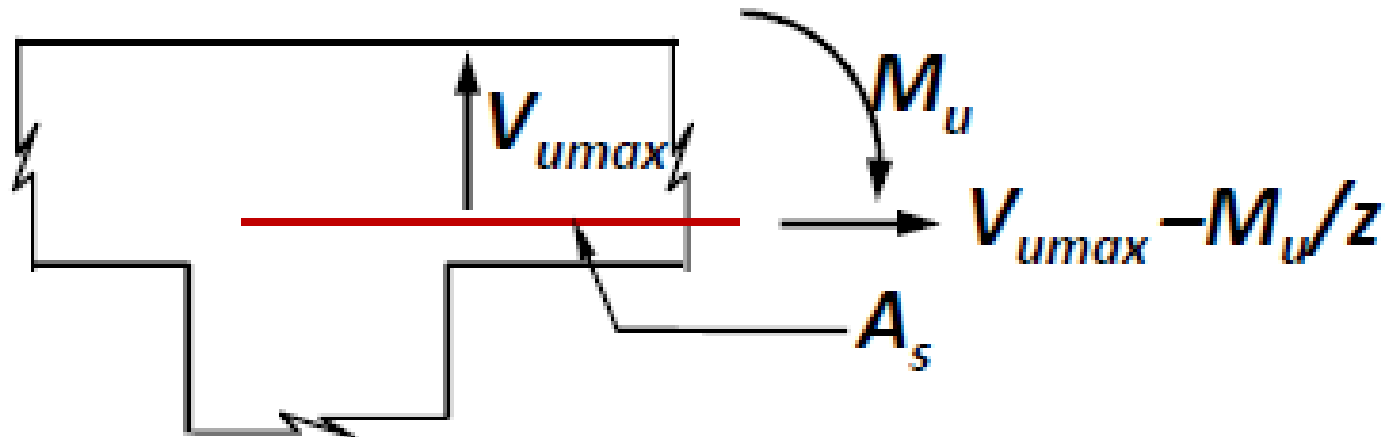
$$V_{u \max} \leq 0,4 \times \frac{f_{cj}}{\gamma_b} b_0 \times a$$

et

$$a \geq \frac{3,75 V_U}{b_0 \cdot f_{c28}}$$

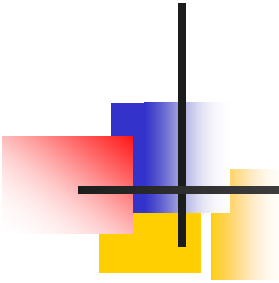
1.6 Justifications aux appuis

1.6.2 Appui intermédiaire:



■ Les aciers inférieurs doivent équilibrer:

$$F_s = V_{\max} - \frac{M_u}{z} \text{ avec } M_u \text{ en valeur absolue}$$



1.6 Justifications aux appuis

■ Pour $z = 0,9 \times d$ et $F_s = A_s \times f_e / s$ il vient que :

$$A_s = \frac{(|V_{u \max}| - \frac{|M_u|}{0,9 \times d}) \times \gamma_s}{f_e}$$

■ Les bielles de béton doivent vérifier de part et d'autre de l'appui :

$$V_{u \max} \leq 0,4 \times \frac{f_{cj}}{\gamma_b} b_0 \times a$$