



## Examen de remplacement de CC en Mécanique

### EXERCICE 01: 05 Pts

La **vitesse limite**  $\vartheta$  d'une bille de **rayon**  $r$  de **masse**  $m$  et de **masse volumique**  $\rho$ , tombant dans un milieu visqueux (un fluide) de **masse volumique**  $\rho_f$  et de coefficient de viscosité  $\eta$  معامل الميوعة , est donné par :

$$\vartheta = \frac{2r^2(\rho - \rho_f)}{9\eta}g$$

$g$  est l'accélération de pesanteur.

1. En utilisant les équations aux dimensions, déterminer la dimension de  $\eta$  et en déduire son unité dans le système MKSA.
2. Déterminer l'incertitude relative sur  $\eta$ , en fonction de  $\Delta r$ ,  $\Delta \rho$ ,  $\Delta \rho_f$  et  $\Delta \vartheta$ .

### EXERCICE 2 : 05 Pts

**A)** Consider the points A (3, 5, 4), B (3, 1, 3), C (8, 5, 5) and D (1, 2, 3) in space.

Calculate the mixed product  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ , deduce the volume of the parallelepiped formed by the three vectors.

**B)** Définir les coordonnées cylindriques et donner les relations de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques (avec le schéma détaillé).

Ecrire le vecteur position en coordonnées cylindriques et calculer le vecteur vitesse dans ce système de coordonnées.

### EXERCICE 03: 05 Pts

A partir du sol, un ballon monte avec une vitesse initiale  $v_0$  constante (suivant  $y$ ). Le vent donne au ballon une vitesse horizontale  $V_x = \alpha \cdot y$  ( $\alpha$  constante)

- a- Déterminer les équations du mouvement  $x(t)$  et  $y(t)$ . En déduire l'équation de la trajectoire  $y=f(x)$ .
- b- Calculer les accélérations  $a$ ,  $a_N$  et  $a_T$ . en déduire le rayon de courbure.

**Bon courage**



## Corrigé de l'Examen final de Mécanique

### Exercice 1 : (5 pts)

1. On a  $\vartheta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\eta}g \Rightarrow \eta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\vartheta}g$  (0,25 pts)

Avec 
$$\begin{cases} [v] = LT^{-1} \\ [r] = L \\ [\rho] = [\rho_f] = [\rho - \rho_f] = ML^{-3} \\ [g] = LT^{-2} \\ [2] = [9] = 1 \end{cases} \quad (01 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow [\eta] = \frac{[2][r]^2[(\rho-\rho_f)]}{[9][\vartheta]}[g] \quad (0,25 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow [\eta] = \frac{L^2 ML^{-3} LT^{-2}}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1} \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow [\eta] = ML^{-1}T^{-1}$$

Son unité est (**kg/ms**) dans le système MKSA. (0,5 pts)

2. Pour déterminer l'incertitude relative, on utilise :

**a- La méthode de la différentielle logarithmique :**

$$\eta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\vartheta}g$$

$$\Rightarrow \log \eta = \log\left(\frac{2}{9}\right) + 2\log r + \log(\rho - \rho_f) + \log(g) - \log v \quad (01 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{\eta} = 2\frac{dr}{r} + \frac{d\rho}{(\rho-\rho_f)} + \frac{-d\rho_f}{(\rho-\rho_f)} - \frac{d\vartheta}{\vartheta} \quad (0.5 \text{ pts})$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\eta}{\eta} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta\rho}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta\rho_f}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta} \quad (01 \text{ pts})$$

**b- La méthode de la différentielle totale :**

On a  $\eta = \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9\vartheta}g$

$$\Rightarrow d\eta = \left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\right)d\rho + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho_f}\right)d\rho_f + \left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)dv$$

$$\Rightarrow d\eta = \left(\frac{4r(\rho-\rho_f)}{9v}\right)gdr + \frac{2r^2}{9v}gd\rho - \frac{2r^2}{9v}gd\rho_f - \frac{2r^2(\rho-\rho_f)}{9v^2}gdv$$

$$\Rightarrow d\eta = \frac{2}{r}\eta dr + \frac{d\rho}{(\rho-\rho_f)}\eta - \frac{d\rho_f}{(\rho-\rho_f)}\eta - \frac{dv}{v}\eta$$

$$\Rightarrow \frac{d\eta}{\eta} = \frac{2}{r}dr + \frac{d\rho}{(\rho-\rho_f)} - \frac{d\rho_f}{(\rho-\rho_f)} - \frac{dv}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{2}{r}\Delta r + \frac{\Delta\rho}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta\rho_f}{|\rho-\rho_f|} + \frac{\Delta v}{v}$$



**EXERCICE 2 : 05 Pts**

A- Consider the points A (3, 5, 4), B (3, 1, 3), C (8, 5, 5) and D (1, 2, 3) in space.

Calculate the mixed product  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ ,

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 8-1 \\ 5-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (0,75 \text{ pts})$$

$$\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k} \quad (0,5 \text{ pts})$$

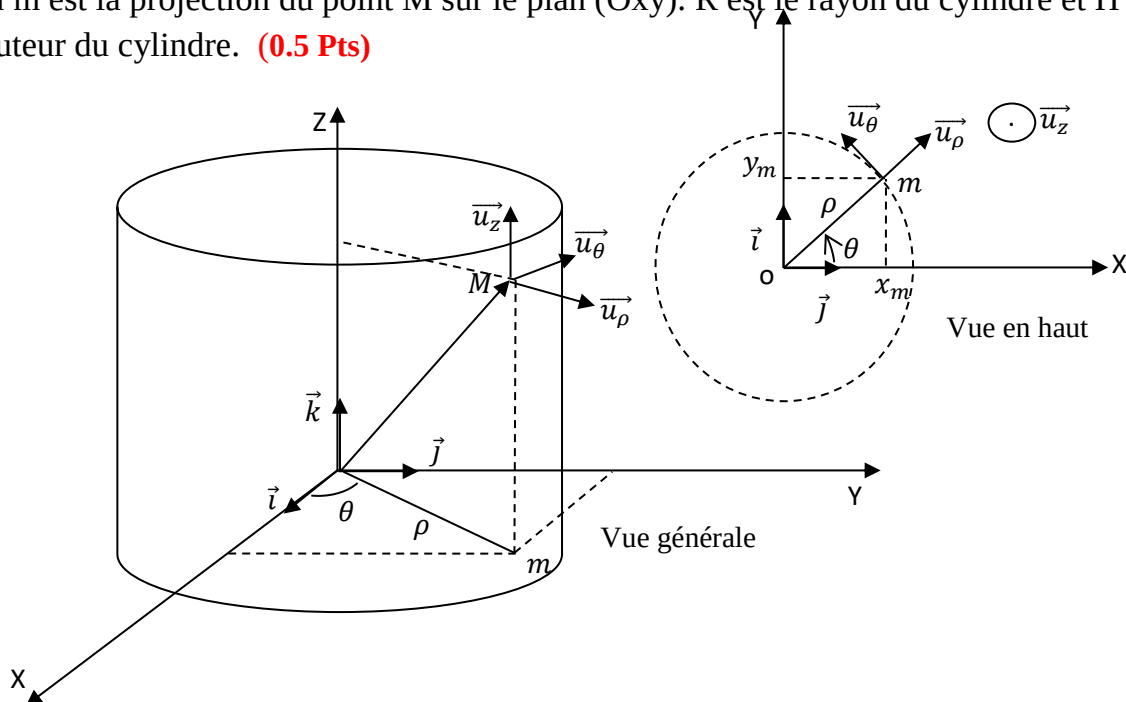
$$(\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB}) \cdot \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \quad (0,5 \text{ pts})$$

The volume of the parallelepiped formed by the three vectors is  $3 \text{ m}^3$  (We take the absolute value). (0,25 pts)

B. Définition des coordonnées cylindriques.

$$\text{Avec } \begin{cases} \rho = |\overrightarrow{Om}|, & 0 < \rho < R \\ \theta = ((ox), \overrightarrow{Om}), & 0 < \theta < 2\pi \\ z = z_M, & 0 < z < H \end{cases} \quad (0,5 \text{ Pts})$$

Où m est la projection du point M sur le plan (Oxy). R est le rayon du cylindre et H la hauteur du cylindre. (0.5 Pts)



Les relations de passage entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de  $\rho$  et  $\theta$  et  $\overrightarrow{u_\rho}$  et  $\overrightarrow{u_\theta}$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ ).

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z_M \end{cases} \quad (0,5 \text{ pt})$$

L'expression des vecteurs unitaires  $\overrightarrow{U_r}$  et  $\overrightarrow{U_\theta}$  et  $\overrightarrow{U_z}$  en fonction des vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ .



$$\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{U_r} + z \overrightarrow{U_z} \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$\overrightarrow{OM}/cart = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z \vec{k} = \rho(\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}) + z \vec{k}$$

Par identification

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \\ \overrightarrow{U_z} = \vec{k} \end{cases} \quad (0,5 \text{ pt})$$

Le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho} \overrightarrow{U_r} + \rho \frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dot{\rho} \overrightarrow{U_r} + \rho \cdot \theta' \cdot \overrightarrow{U_\theta} \quad (0,5 \text{ Pts})$$

### Exercice 3 :

Un ballon monte avec une vitesse horizontale  $v_0$  ( $v_y = v_0$ ) et le vent lui donne une vitesse horizontale ( $v_x = \alpha y$ ) :

a- Déterminons les équations  $x(t)$  et  $y(t)$ , avec  $v_x = \alpha \cdot y$  et  $v_y = v_0$

Et on prend à  $t=0$  ;  $x=0$  et  $y=2$ .

Nous avons  $v_y = v_0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_0$

$$\Rightarrow dy = v_0 dt \quad \text{donc} \quad \int_0^y dy = \int_0^t v_0 dt$$

$$\Rightarrow y = v_0 t \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$v_x = \alpha y = \alpha v_0 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \alpha v_0 t$$

$$\Rightarrow dx = \alpha v_0 t dt \quad \text{donc} \quad \int_0^x dx = \int_0^t \alpha v_0 t dt$$

$$\Rightarrow x = \alpha v_0 \frac{t^2}{2} \quad (0,5 \text{ pts})$$

Donc  $y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$  donc  $x = \alpha v_0 \frac{\left(\frac{y}{v_0}\right)^2}{2} = \frac{\alpha}{2v_0} y^2$

L'équation de la trajectoire  $y=f(x)$  est de la forme :  $y = \sqrt{\frac{2xv_0}{\alpha}} \quad (0,5 \text{ pts})$

b- Les accélérations normales et tangentielle :

$$\vec{v} = v_0 \vec{i} + \alpha y \vec{j} = v_0 \vec{i} + \alpha v_0 t \vec{j} \quad (0,5 \text{ pts}) \quad \text{Donc l'accélération est de la forme :}$$

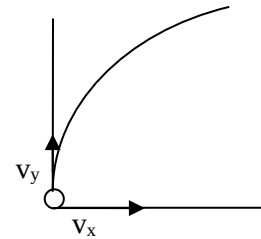
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha v_0 \vec{j} \quad (0,5 \text{ pts})$$

Et  $|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 + \alpha^2 v_0^2 t^2} \quad (0,25 \text{ pts})$  et  $a = \alpha \cdot v_0 \quad (0,25 \text{ pts})$

L'accélération tangentielle

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\sqrt{v_0^2 + \alpha^2 v_0^2 t^2}}{dt} = \frac{2\alpha^2 v_0^2 t}{2\sqrt{v_0^2 + \alpha^2 v_0^2 t^2}}$$

$$a_T = \frac{\alpha^2 v_0^2 t}{v} \quad (0,5 \text{ pts})$$





L'accélération normale

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N^2 = a^2 - a_T^2 = \alpha^2 v_0^2 - \frac{\alpha^4 v_0^4 t}{v_0^2 + \alpha^2 v_0^2 t^2} \quad (0,5 \text{ pts})$$

$$a_N^2 = \frac{\alpha^2 v_0^4}{v^2} \Rightarrow \mathbf{a}_N = \frac{\alpha v_0^2}{v} \quad (0,5 \text{ pts})$$

Le rayon de courbure

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{\alpha v_0^2}{v} \Rightarrow \mathbf{R} = \frac{v^3}{\alpha v_0^2} \quad (0,5 \text{ pts})$$