Méthode de l'Espace des Etats (MEE)

« Chaines de Markov »

Plan

I. Introduction

- La Méthode des Espace des Etats (MEE) à été développée pour l'analyse de la sûreté de fonctionnement des systèmes réparables.
- Dans les année **1950** les premières utilisations visent une classe particulière de processus stochastique dits : « processus de Markov » ensuite l'introduction de la notion « processus non Markovien »
- Dans les années **1976** plusieurs applications de cette méthode à été effectuées dans le domaine d'électricité en France.

II. Processus de Markov

II. Processus de Markov

1. Etats du système

Soit un système qui se compose de ***n*** composants :

C1, C2, C3………. Cn

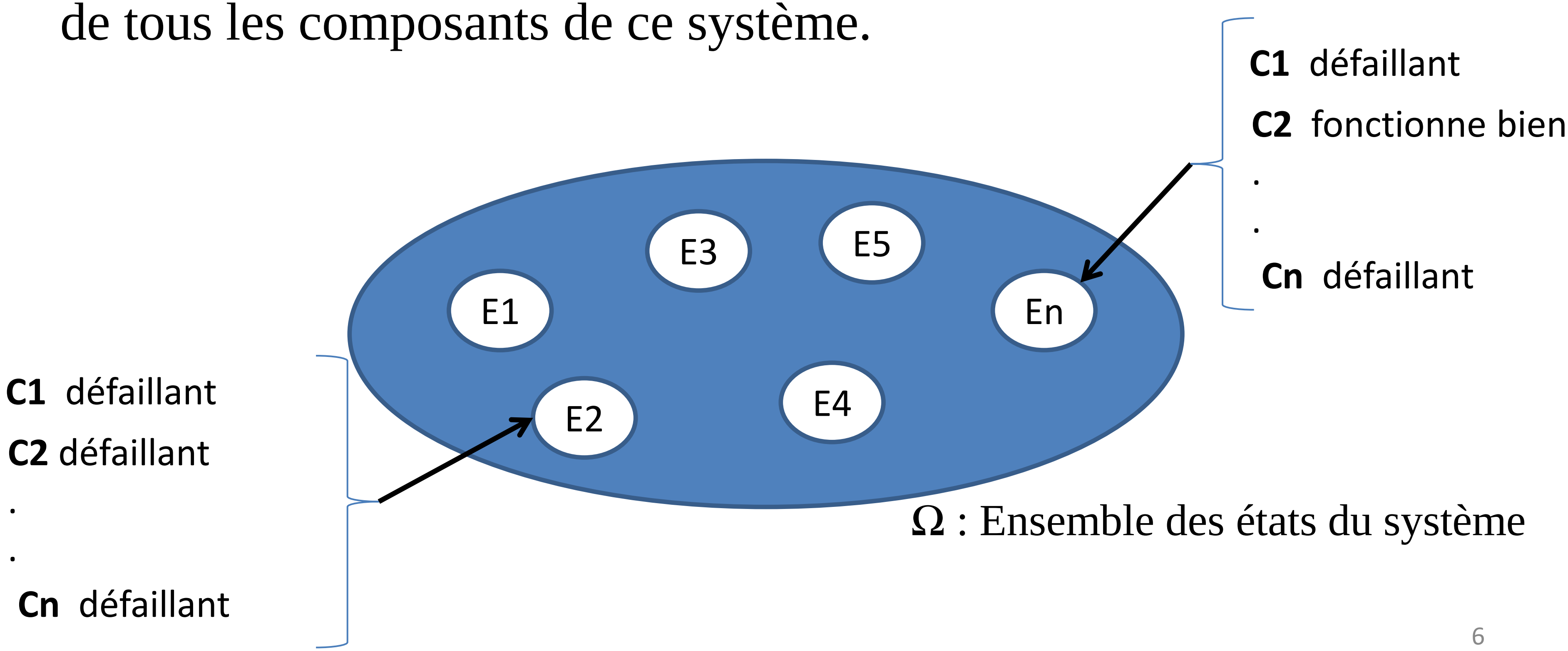
Chaque composant C_i peut avoir un ensemble des états :

- **État de bon fonctionnement**
- **État de Panne**
- **État de défaillance**
- **…**

II. Processus de Markov

1. Etats du système

Alors : **l'état du système *Ei*** est la combinaison entre les états de tous les composants de ce système.



Ω : Ensemble des états du système

II. Processus de Markov

1. Etats du système

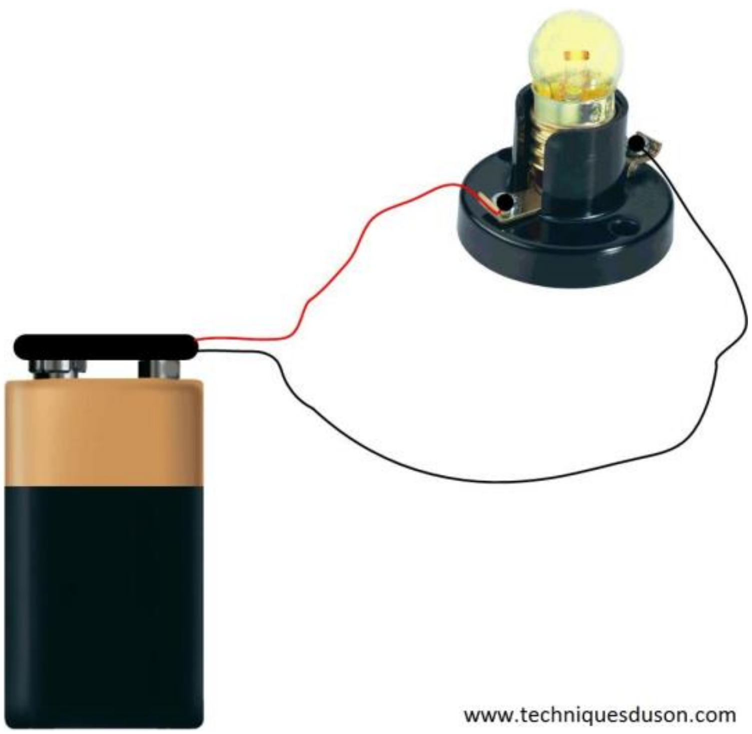
Exemple :

E1 $Lampe\ 01$ et $Batterie$

E2 $\overline{Lampe\ 01}$ et $Batterie$

E3 $Lampe\ 01$ et $\overline{Batterie}$

E4 $\overline{Lampe\ 01}$ et $\overline{Batterie}$



Système électriques de deux composants

X: composant en bon fonctionnement

$\overline{X}$: composant en panne

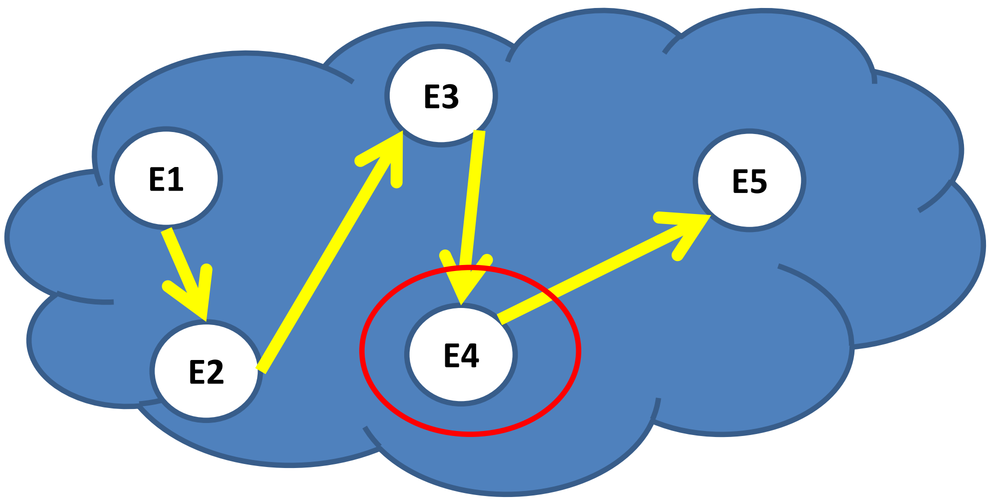
II. Processus de Markov

2. Processus de Markov « Processus Markovien »

Un processus markovien est un processus qui modélise le comportement d'un système pour lequel l'évolution future **depuis un état** donné ne dépend que de **cet état** et non de la "trajectoire" qu'il a suivit pour y arriver

II. Processus de Markov

2. Processus de Markov « Processus Markovien »



Le processus est un **processus de Markov** si:

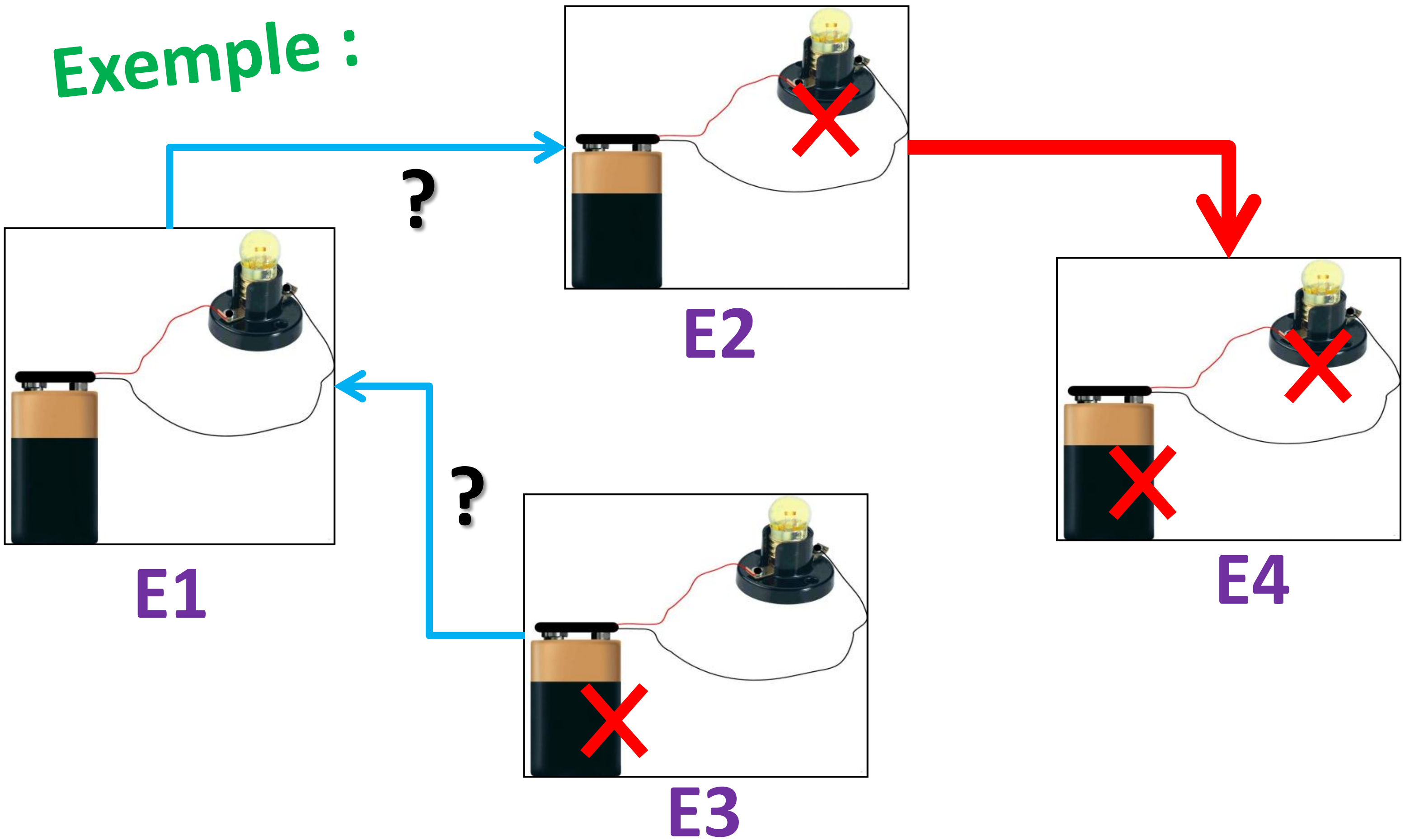
P4= P $\left\{ \mathbf{X(t)=E4} / X(ti)=E3 \right\}$

« c'est-à-dire pas d'historique »

II. Processus de Markov

2. Processus de Markov « Processus Markovien »

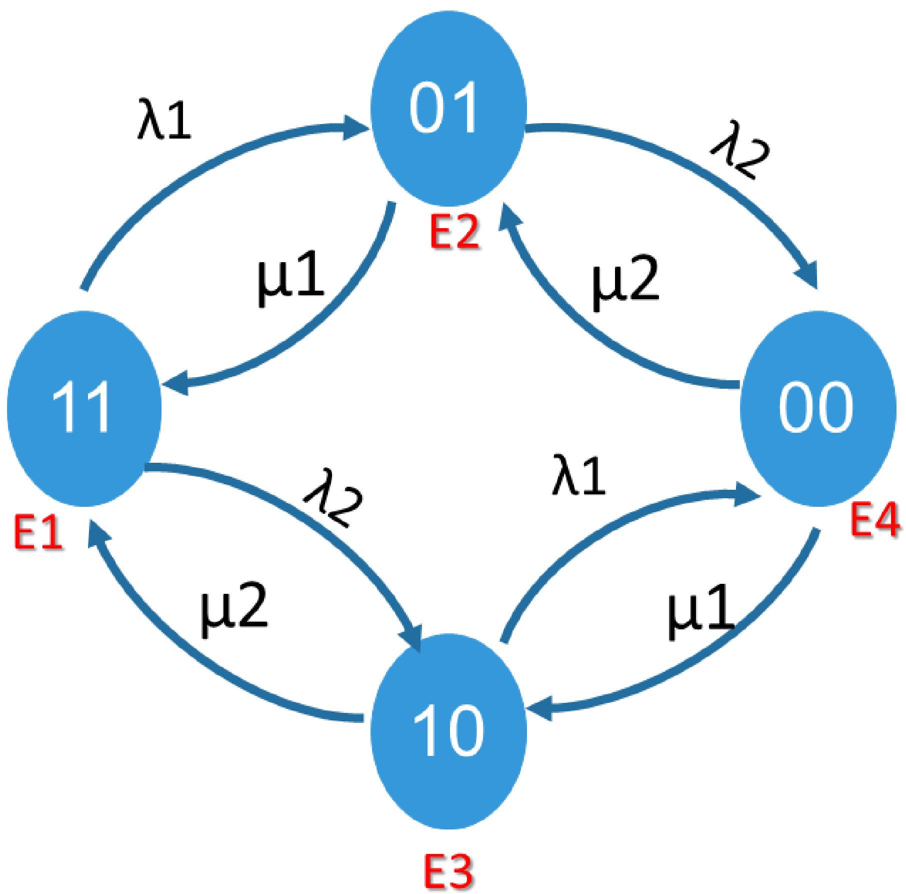
Exemple :



III. Graphe de Markov

III. Graphe de Markov

1. Représentation

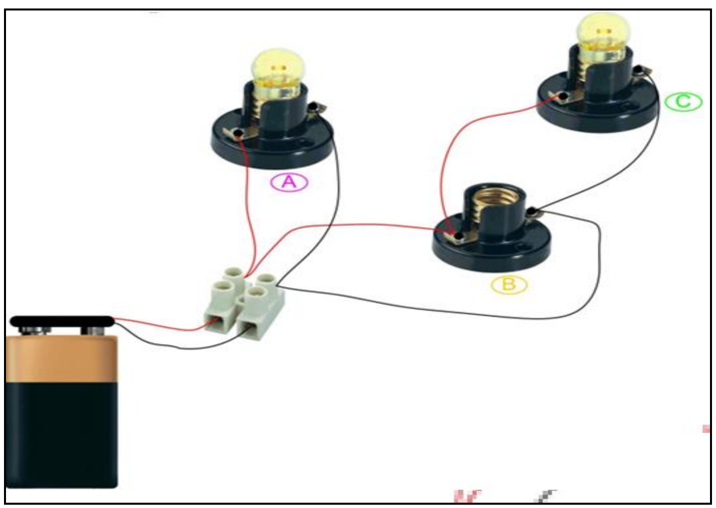


III. Graphe de Markov

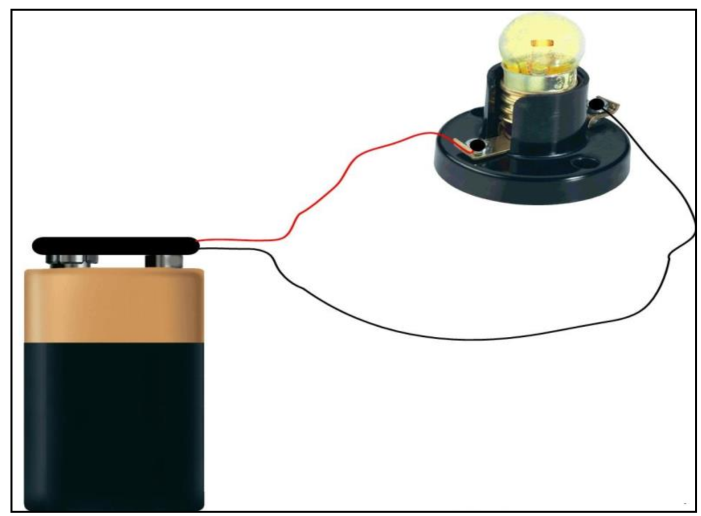
1. Représentation

A. Les points à connaitre avant de représenter :

1. Le nombre de composants du système



4 composants



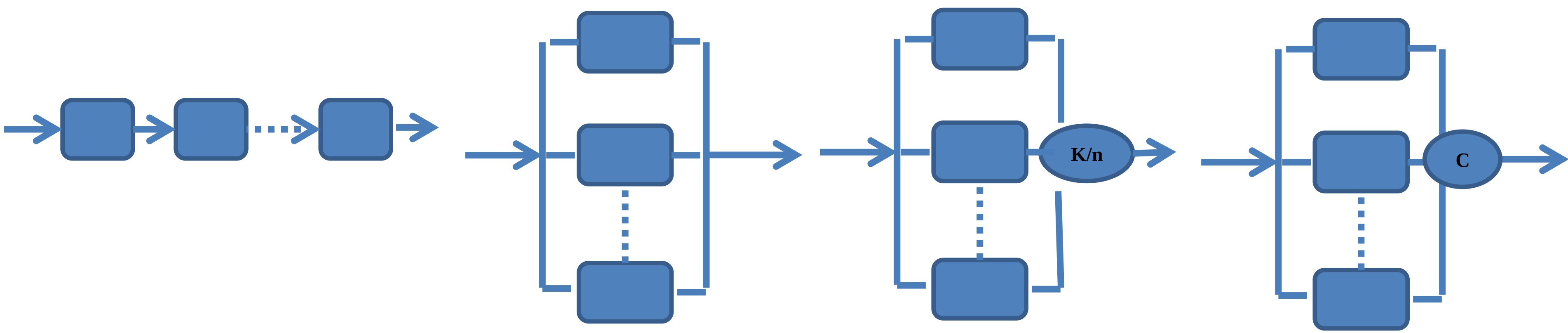
2 composants

III. Graphe de Markov

1. Représentation

A. Les points à connaitre avant de représenter :

2. La structure du système



Série **Redondance Active** **Redondance passive**

III. Graphe de Markov

1. Représentation

A. Les points à connaitre avant de représenter :

3. Le nombre de réparateurs

III. Graphe de Markov

1. Représentation

A. Les points à connaitre avant de représenter :

4. La politique de maintenance

III. Graphe de Markov

1. Représentation

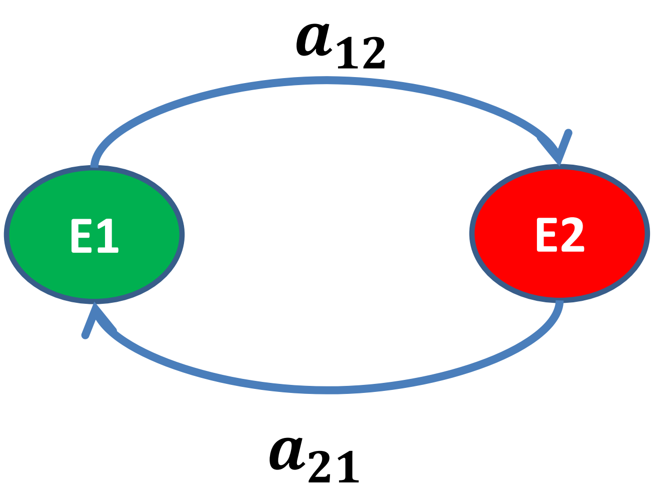
B. Étapes de représentation :

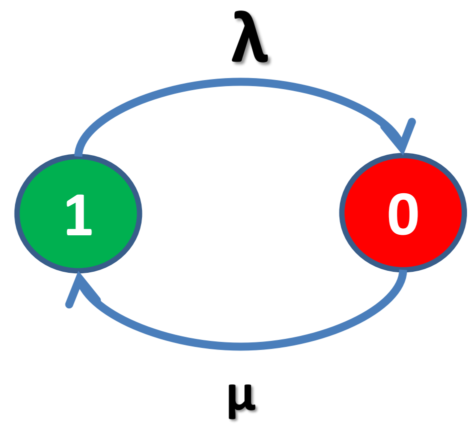
1) Recensement de tous les états E_i du système
2) Définition des transition entre les états et leurs causes
3) Établissement du graphes
4) Classement des états en états de fonctionnement ou états de panne du système

III. Graphe de Markov

1. Représentation

Exemple :





Chaine de Markov pour un système d'un seul composant

$\boldsymbol{E_i}$: Etat du système

$\boldsymbol{a_{ij}}$: Taux de transition

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

Supposant un système qui se compose de deux composants identiques

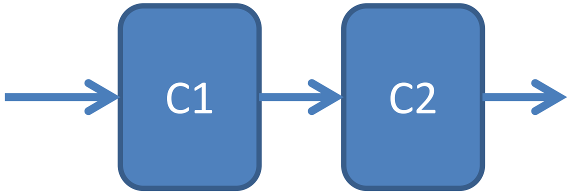
- Construire le graphe de Markov du système pour les trois types de structures précédentes

- Définir les états de fonctionnement et les états de panne de ce système

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

i. Structure série

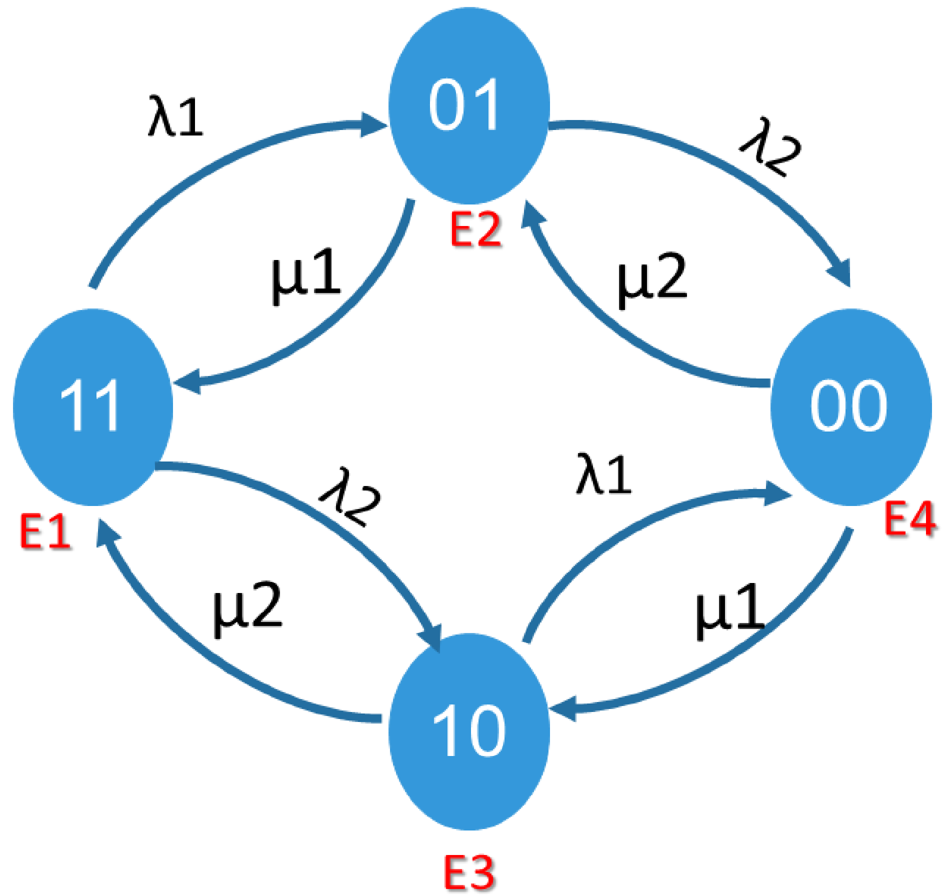


Système de deux composant en série
sans priorité de maintenance

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

I. Structure série



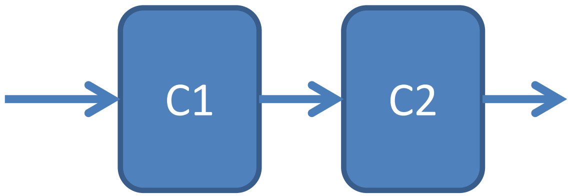
Un seul état de fonctionnement $\{E_1\}$

Les états de panne sont : $\{E_2, E_3, E_4\}$

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

i. Structure série

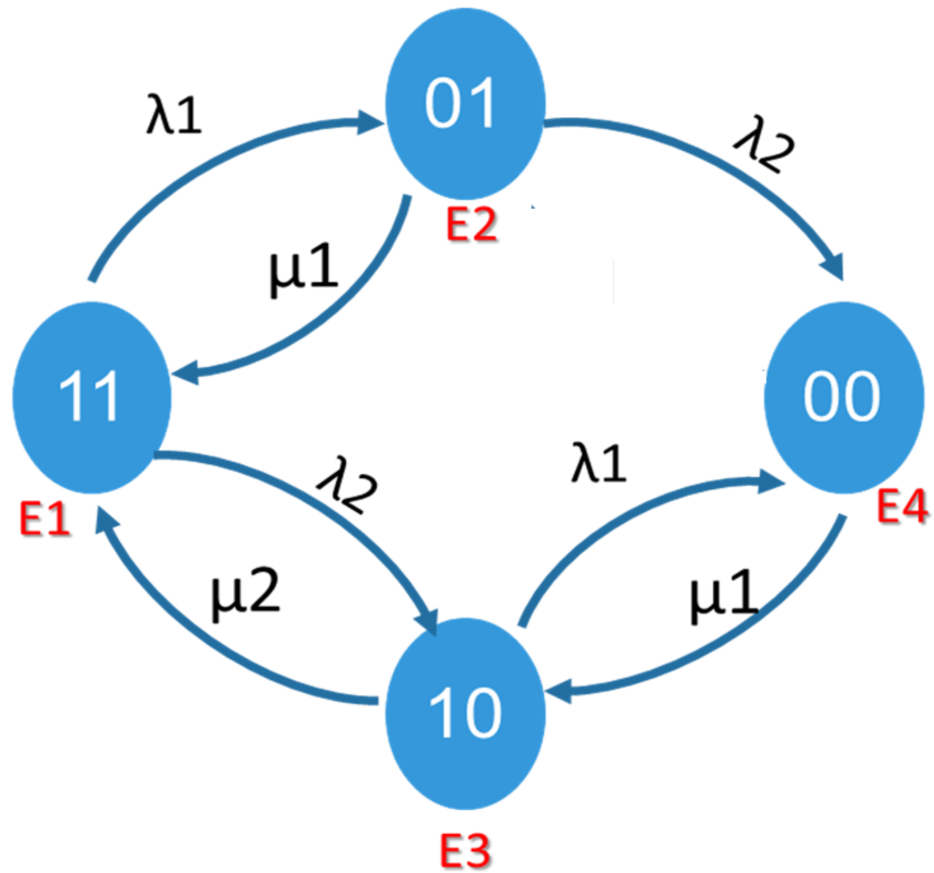


Système de deux composant en série
avec priorité de maintenance
(C1 prioritaire)

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

I. Structure série



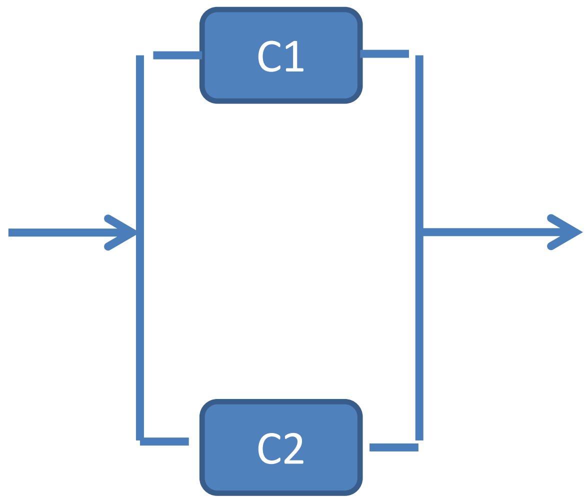
Un seul état de fonctionnement $\{E_1\}$

Les états de panne sont : $\{E_2, E_3, E_4\}$

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

ii. Structure redondance active



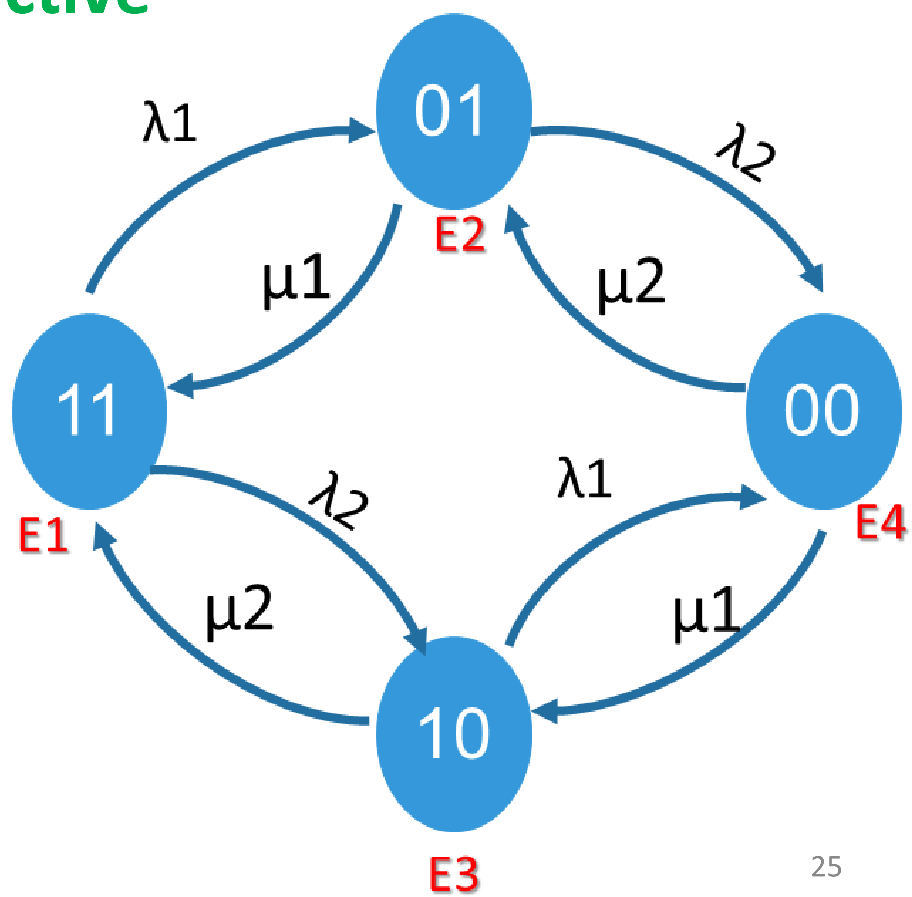
Tous les composant sont **en marche**. Si l'un des composants est en panne le système peut fonctionner avec les autres composants.

Système de deux composant en redondance active **sans priorité** de maintenance

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

ii. Structure redondance active



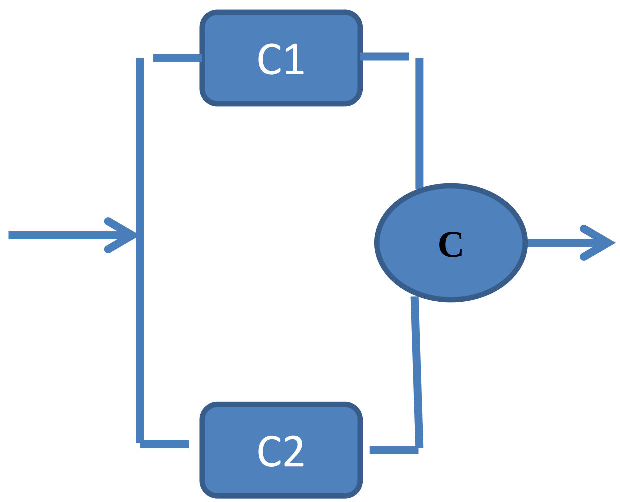
Les états de fonctionnement sont: $\{E_1, E_2, E_3\}$

Un seul état de panne : $\{E_4\}$

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

iii. Structure redondance passive

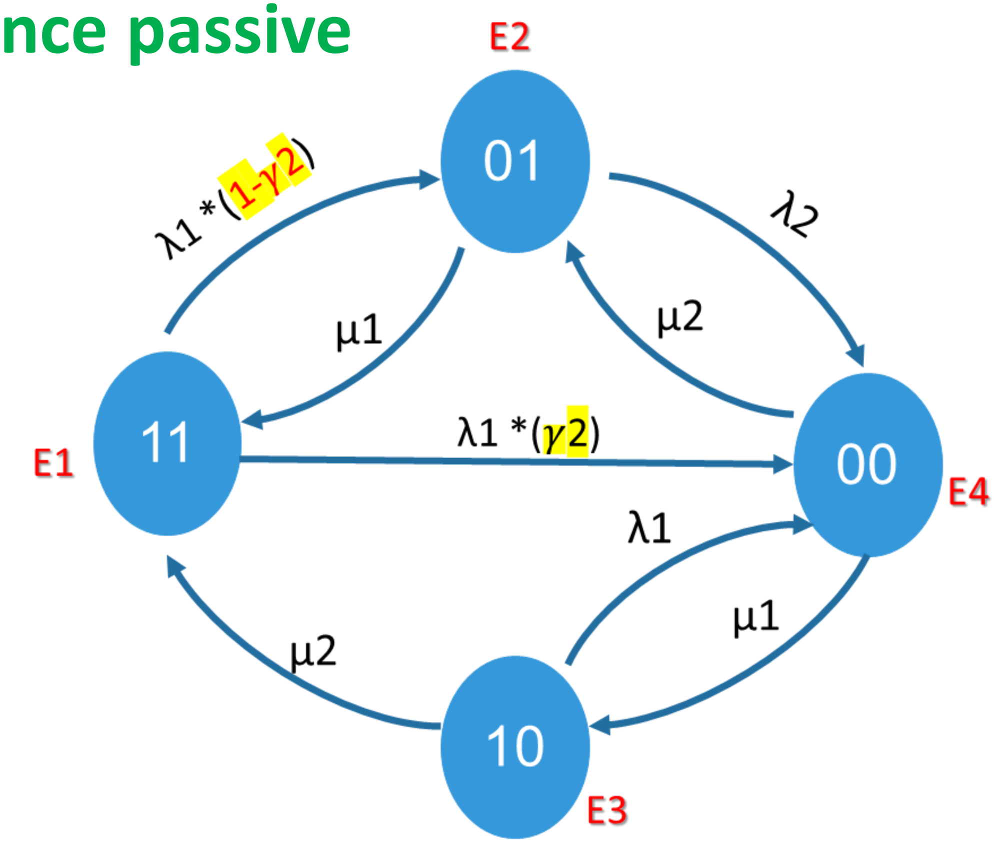


Un seul composant en marche les autres sont en arrêt. Si ce composant tombe en panne on démarre le composant suivant. Le système dans ce cas peut fonctionner avec un seul composant

III. Graphe de Markov

2. Exemple d'application

iii. Structure redondance passive



Les états de fonctionnement sont: $\{E_1, E_2, E_3\}$

Un seul état de panne : $\{E_4\}$

γ_i : La probabilité que le composant i soit défaillant

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

A). Probabilité de passer d'un état vers un autre état

- La probabilité de passer de l'état i vers l'état j entre l'instant t et $t+dt$ est :

$$P_{ij}(t+dt) = a_{ij}\, dt$$

- *Dont* a_{ij} est le taux de transition

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

B). Probabilité à existe dans un état

La probabilité que le système soit dans un état $\boldsymbol{E_i}$ à l'instant (***t***+***dt***) = La probabilité qu'il **existe** dans un état $\boldsymbol{E_i}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$ **et** **reste** dans le même état $\boldsymbol{E_i}$ à l'instant ***t+dt*** **ou** la probabilité qu'il existe dans $\boldsymbol{E_j}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$ et vient à $\boldsymbol{E_i}$ à l'instant ***t+dt*** **ou** ……

$$P_i(t+dt) = P_i(t) * P_{ii}(t+dt) + P_j(t) * P_{ji}(t+dt) + \ldots$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

B). Probabilité à exister dans un état

$$P_i(t+dt) = P_i(t) * P_{ii}(t+dt) + P_j(t) * P_{ji}(t+dt) + \dots$$

$$P_i(t+dt) = P_i(t) * \left(1 - \sum_{j \neq i} a_{ij}\ dt\right) + P_j(t) * \left(a_{ji}\ dt\right) + \dots$$

$$\frac{P_i(t+dt) - P_i(t)}{dt} = -P_i(t) \sum_{j \neq i} a_{ij} + P_j(t) * \left(a_{ji}\right) + \dots$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

B). Probabilité à exister dans un état

Après la simplification de l'équation on trouve :

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = AP_i(t) \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dP_1(t)}{dt} \\ \frac{dP_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dP_n(t)}{dt} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

B). Probabilité à exister dans un état

Dont ***A*** est la matrice de transitions

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\sum_{j\neq 1}^{n} a_{1j} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & -\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & -\sum_{j\neq n}^{n} a_{nj} \end{bmatrix}$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

B). Probabilité à exister dans un état

La résolution de l' équation différentielle de probabilités avec la **transformation Laplacienne** donne

$$P_i(t) = P_i(0)e^{At}$$

Pi (0): Les conditions initiales

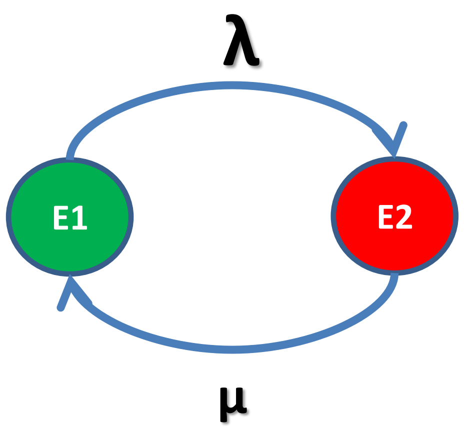
IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

B). Probabilité à exister dans un état

Exemple :

Un système à un seul composant



$$P_i(t) = P_i(0)e^{At}$$

$$\begin{cases} P_1(t) = P_1(0) \times e^{At} \\ P_2(t) = P_2(0) \times e^{At} \end{cases}$$

dont : $A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

C). Probabilité asymptotique

La probabilité asymptotique égale à la limite de la probabilité quand le temps (t) tend vers l'infini

$$\boldsymbol{P(\infty) = \lim_{t \to \infty} [\![P(t)]\!]}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{dP_i(\infty)}{dt} = 0}$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

C). Probabilité asymptotique

$$\cancelto{0}{\frac{dP_i(\infty)}{dt}} = AP_i(\infty) \quad \Rightarrow \quad AP_i(\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1,j=1}^{n} P_i(\infty)a_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_i(\infty) = -\frac{\sum_{j\neq i} P_j(\infty)a_{ij}}{a_{ii}}$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilités

C). Probabilité asymptotique

La solution de l’ensemble d’équations donne

$$P_{i}(\infty) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in-1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}}$$

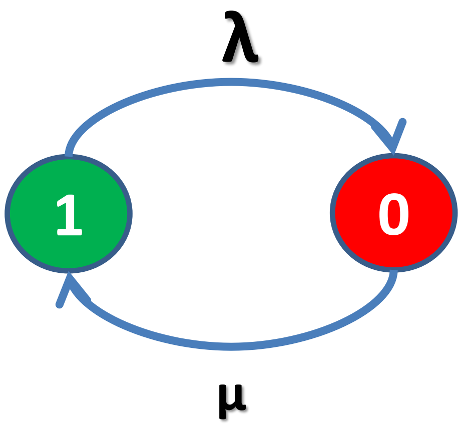
$n^{ième}$ colonne

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

1. Formule de probabilité

C). Probabilité asymptotique

Un système à un seul composant



Exemple :

$$P_1(\infty) = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\mu}{-\lambda-\mu} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P_2(\infty) = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ \mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \mu & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda}{-\lambda-\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

2. Calcul de La disponibilité

A). Disponibilité

La disponibilité est la somme de probabilités que le système existe dans l'état de fonctionnement $\boldsymbol{E_i}$ à l'instant $\boldsymbol{t}$.

$$\boldsymbol{A(t) = \sum_{i=1}^{l} P_i(t)}$$

Dont: Les états $\boldsymbol{E_1}$, $\boldsymbol{E_2}$, $\boldsymbol{E_3}$ … $\boldsymbol{E_l}$ sont des états de fonctionnement de système

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

2. Calcul de La disponibilité

B). Disponibilité asymptotique

$$
\boldsymbol{A}(\infty) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln-1} & 1 \\ a_{l+11} & \cdots & a_{l+11} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}}
$$

Etats de bon fonctionnement

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

2. Calcul de La disponibilité

C). Indisponibilité asymptotique

$$\overline{\boldsymbol{A}}(\infty) = \mathbf{1} - \boldsymbol{A}(\infty)$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}(\infty) = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in-1} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln-1} & 0 \\ a_{l+11} & \cdots & a_{l+11} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in-1} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 1 \end{vmatrix}}$$

Etats de bon fonctionnement

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

3. Calcul de MUT, MTTR et MTBF

A). Durée moyenne d'occupation d'un état

La durée moyenne d'occupation d'un état est la durée pendant laquelle le système reste dans cette état et ne le quitte pas .

$$d_i = \frac{1}{\sum_{j \neq i} a_{ij}}$$

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

3. Calcul de MUT, MTTR et MTBF

B). Calcul du MUT

Le MUT est la durée moyenne d'occupation de l'ensemble des états de fonctionnement

$$MUT = \sum_{i=1}^{l} d_i$$

Dont: Les états E_1, E_2, E_3 … E_l sont des états de fonctionnement de système

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

3. Calcul de MUT, MTTR et MTBF

C). Calcul du MTTR

Le MTTR est la durée moyenne d'occupation de l'ensemble des états de panne.

$$MTTR = \sum_{i=l+1}^{n} d_i$$

Dont: Les états E_{l+1}, E_{l+2}, ... E_n sont des états de panne de système

IV. Matrice de transition et Calcul de probabilités

3. Calcul de MUT, MTTR et MTBF

D). Calcul du MTBF

Le temps de fonctionnement entre deux défaillances est :

$$MTBF = \mathbf{MTTR} + \mathbf{MUT}$$