Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen
Départements des sciences de Gestions,
$1^{ière}$ année LMD, $2^{\text{ème}}$ semèstre

1 Les Matrices

1.1 Introduction

Définition:

Un tableau rectangulaire de la forme ci dessous est appelé matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{np} \end{pmatrix}$$

- L'élément $a_{ij} \in \mathbb{R}$ de la matrice ce trouve a l'intersection de la i-emme ligne et la j-iemme colonne.
- La matrice A s'ecrit également sous la forme $A = [a_{ij}]$ avec $i = 1, ..., n.\ j = 1, ..., p$
- Une matrice ayant n lignes et p colonnes est appelée matrice (n, p) ou $n \times p$.
- Le couple (n, p) est appelée dimension de la matrice.

Exemples:

Soit les matrices A, B, C, D, E, F, G, H

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \pi & e \\ 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ \pi & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- A est une matrice de dimension $(2, 2)$, ou bien on dit que A est de *format* $(2, 2)$.
- B est une matrice de *format* $(4, 2)$.
- Le format de la matrice C est $(3, 1)$

- Le format de la matrice D est $(1,3)$
- Les deux matrices E et F sont toutes deux de format $(3,3)$
- Une matrice de dimension $(1,p)$ est une matrice ligne,
  exemple "la matrice D"
- Une matrice de dimension $(n,1)$ est une matrice colonne,
  exemple "la matrice C"
- L'ensemble des matrice de format (n,p) est notée $M_{np}(\mathbb{R})$
- Une matrice dont le nombre de ligne est égale au nombre de colonne est appelée matrice carrée, on dit alors qu'ell'est d'ordre n.
  Exemple les matrices A, E, F, G.
- Une matrice triangulaire est une matirice carrée dont les éléments au dessous (ou au dessus) de la digonale principle sont tous nuls. Exemple la matrice E est une matrice triangulaire superieur et F est une matrice triangulaire inferieur.
- Une matrice carrée d'ordre n, ne comportant que des 1 sur la diagonale principale et des zéros partout ailleurs est notée I_n et est appelée matrice unité ou matrice identité. Exemple**:**
  $I_1 = 1, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

  $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & .1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

  Quelques matrices particulières
- La matrice nulle : Tous ses éléments sont nuls, exemple:

  $$O_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)}.$$
- La matrice carrée diagonale : Tous ses éléments hors diagonaux sont nuls, exemple: $N = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3,3)}$.

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Égalité de matrices

On dit que $A = B$ si

1) A et B ont la même dimension, et ...

2) Tous les éléments de A sont égaux aux éléments **correspondants** de B.

Exemple On donne : $E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & -2y-4 \end{pmatrix}_{(2,2)}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{(2,2)}$.

Trouver x et y pour que $E = F$.

Solution : 1) E et F ont la même dimension $(2,2)$.

2) pour que $E = F$ il faut que $\begin{cases} 2x+3 = -1 \\ -2y-4 = 5 \end{cases}$ donc , il faut prendre $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{-9}{2} \end{cases}$.

1.2.2 La transposition

Soit A une matrice de format (m,n). La matrice transposée de A notée ${}^tA$ est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes.

Exemples:

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ \pi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(3,4)}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \pi \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{(4,3)}$

2) $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}_{(2,2)}, {}^t(M_1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{(2,2)}$

3)$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{(3,1)}, {}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{(1,3)}$,

4)$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(1,3)}, {}^tD = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{(3,1)}$.

- Une matrice carrée A est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$
- Une matrice carrée A est dite Anti-symétrique si et seulement si ${}^tA = -A$

1.2.3 Addition de deux matrices

Définition:

Soient deux matrice $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ toutes deux de dimension (n, p); on additione terme a terme pour obtenir
$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ de dimension (n, p)

Exemples:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}_{(2,3)}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(2,3)};$

$$(E + F) = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 & 3+3 \\ 0+(-5) & -1+0 & -5+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & -1 & -6 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

Propriétés:

Soit A, B, C trois matrice de dimension (n, p)
et 0 la matrice (n, p) dont les elements sont tous nuls
1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ Associativité
2) $A + 0 = A$ élémnent neutre
3) $A + (-A) = 0$ opposé
4) $A + B = B + A$ commutativité
5) $-A = [-a_{ij}]$

1.2.4 Multiplication d'une matrice par un nombre

Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice de dimension (n, p) et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice αA comme suite: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$; est aussi une matrice de dimension (n, p)

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, alors:

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 1 & 5 \times 3 \\ 5 \times (-4) & 5 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -20 & -5 \end{pmatrix}$$

.

Propriétés:

Soient A, B deux matrices de dimension (n, p) et (λ, μ) deux réels:

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B$
- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
- $1 \times A = A$ et $0 \times A = 0$ "ne pas confondre, 0 scalaire et 0 matrice".

1.2.5 Le produit de deux matrices

Soient $A = [a_{ik}]$ une matrice de dimension (n, p) et $B = [b_{kj}]$ une matrice de dimension (p, q) le produit de deux matrices $C = A \times B$ a pour dimension (n, q) et s'ecrit $C = [c_{ij}]$ avec $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
pour $i = 1, ..., n.j = 1, ..., q$.

Remarque:

Le produit $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonne de A est egale au nombre de ligne de B

- Application:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}_{(2,2)}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(2,3)}$.

A est de format $(2, 2)$ et B est de format $(2, 3)$, donc la multiplication entre elles est possible, Soit $M = A \times B$ de format (2,3).

$$M = A \times B = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix}$$

où

$$m_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = (0)(1) + (1)(-5) = -5$$
$$m_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (0)(2) + (1)(0) = 0$$
$$m_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (0)(3) + (1)(-1) = -1$$

$$m_{21} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = (-4)(1) + (-1)(-5) = 1$$
$$m_{22} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-4)(2) + (-1)(0) = -8$$
$$m_{23} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4)(3) + (-1)(-1) = -11$$

Ainsi : $M = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & -11 \end{pmatrix}_{(2,3)}$.

Remarque:

- Le produit matriciel n'est pas commutatif, $A \times B \neq B \times A$

Propriétés:

- Soient $A(n,p), B(p,q), C(q,s), D(p,q), E(q,n)$ des matrices avec leur formats respectivent et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{c|c} {}^t(A \times B) = {}^t(B) \times {}^t(A) & \\ {}^t(A + B) = {}^t(A) + {}^t(B) & (A \times B) \times C = A \times (B \times C) \\ {}^t({}^tA) = A & A \times (B + D) = (A \times B) + (A \times D) \\ {}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^tA & (B + D) \times E = (B \times E) + (B \times D) \end{array}$$

- $A \times B = 0$ ne veut pas dire nécessairement, que l'une des deux matrices est nulle.

  Exemple:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.0 + (-4).0 & 0.(-1) + (-4).0 \\ 0.0 + 0.0 & 0.(-1) + 0.0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(2,2)} = O_{(2,2)}. \end{aligned}$$

- $A \times B = A \times C$ ne veut pas dire que $B = C$.
- $(A+B)^2 \neq \left(A^2 + 2AB + B^2\right)$. (Exemple en TD).

1.2.6 Elever une matrice carrée M à une puissance p

On définit la puissance énième d'une matrice M par :
$M^p = \underbrace{M \times M \times ... \times M}_{(p\ fois)}$.

Exemple : Calculer A^2 où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 \times 1) + (3) \times (-4) & 1.3 + 3.(-1) \\ (-4) \times (1) + (-1) \times (-4) & -4.3 + (-1).(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} = (-11) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-11)\, Id_2 \end{aligned}$$

1.3 Calcul des déterminants

1.3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{(2,2)}$, alors le déterminant de A oté $\det(A)$ est définit par $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

Exemple: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}_{(2,2)}$,alors $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (1) \times (4) - (-1) \times (0) = 4.$

1.3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Méthode de Sarrus

cette méthode n'est valable que pour des matrices carrée. et n'est absolument pas généralisable.

Soit M la matrice carrée d'ordre3

$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{22}a_{13} \end{aligned}$$

Exemple:

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \det M &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (1 \times 2 \times 0) + (0 \times 1 \times 1) + (0 \times 0 \times (-2)) - (0.0.0) + (1.1.(-2)) + (0.2.1) = 2 \end{aligned}$$

.

1.3.3 Déterminant d'ordre n (Généralisation):

Méthode des cofacteurs

L'astuce consiste à se ramener à des déterminants d'ordre inferieur j'usqua obtenir des déterminants d'ordre deux, pour cela on développe le déterminant par rapport a une ligne ou une colonne.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n,n)} \text{. Alors:}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}, \text{ développement par rapport a la ligne } i$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}, \text{ développement par rapport a la colonne } j$$

Où d_{ij} est le déterminant d'ordre $n-1$ de A obtenue en enlevant la iemme ligne et la jiemme colonne.

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A est une matrice d'ordre 3, donc $n = 3$

***) Developpement par rapport à la 1ère ligne, c-à-d "i=1"**:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}d_{1j} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}d_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}d_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}d_{13} \\ &= a_{11}d_{11} - a_{12}d_{12} + a_{13}d_{13} \\ &= (1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

***) Developpement par rapport à la $2^{ème}$ colonne, c-à-d "j=2":**

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i2}d_{i2} \\
&= (-1)^{1+2}a_{12}d_{12} + (-1)^{2+2}a_{22}d_{22} + (-1)^{3+2}a_{32}d_{32} \\
&= a_{12}d_{12} - a_{22}d_{22} + a_{32}d_{32} \\
&= (0)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2
\end{aligned}$$

Propriétés:
Soit A une Matrice carrée d'ordre n et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si la matrice A a une ligne (ou colonne) de zéro alors le $\det(A) = 0$
- Si la matrice A a deux lignes (ou deux colonnes) identiques alors le $\det(A) = 0$
- Si on change deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant alors on obtient $-\det(A)$
- $det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, avec $\alpha \neq 0$
- Si $A \times B$ existe alors, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$
- $det({}^tA) = \det(A)$
- Si A est une matrice diagonale ou triangulaire supperier ou triangulaire inferieur, alors le déterminant est égal au produit des élements diagonaux de la matrice

Exemple

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det B = (1)(2)(3) = 6,$

$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det C = (\frac{1}{2})(2)(3) = 3$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \det D = (-1)(-1)(3) = 3$

1.4 Inversion de Matrices

1.4.1 Co-Mateice ou Matrice adjointe:

1°) **Définition:**

Considerons une **matrice carrée A** d'ordre n, la matrice des cofacteurs X_{ij} des éléments aij de A notée **adjA** est appelée **matrice adjointe** ou **co-matrice de A**

$$\mathbf{adjA} = \mathbf{comA} = [(-\mathbf{1})^{\mathbf{i+j}} dij]$$

Ou dij est le déterminant d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant la i-eme ligne et la j-ieme colonne de A

Exemple 1:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ comA &= \begin{pmatrix} (-\mathbf{1})^{\mathbf{1+1}} d_{11} & (-\mathbf{1})^{1+2} d_{12} \\ (-\mathbf{1})^{2+1} d_{21} & (-\mathbf{1})^{2+2} d_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercise 1:

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer la matrice adjointe de A et B

Definition:

Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = B \times A = I_n$

une telle matrice est unique, on appelle la matrice B par l'nverse de A est on la note par A^{-1}

Exercise 2:

Soit A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) vérifier que $A^2 - 3A + 2Id_3 = 0_{(3,3)}$.

b) Déduire que A est inversible puis donnée son inverse A^{-1}

2°) Théoreme "Condition Importante"

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors A est une matrice inversible si est seulement si $detA \neq 0$

Exemple 1:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -4 \neq 0$ Donc A^{-1} existe
- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 0$ Donc B^{-1} n'existe pas

3°) Théoreme "Calcul de la matrice inverse":

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A est inversible, (c'est à dire $\det A \neq 0$) alors, sa matrice inverse est donnée par la formule (importante) suivante:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^{t}(comA).$$

Exercice

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$,Calculer $\det A, comA$, puis trouver A^{-1}.

Propriétés:

- Si $A = \alpha, \alpha \neq 0$ alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}$
- Si A est inversible alors A^{-1} est unique
- Si A, B sont deux matrices carrées inversible alors: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Si A^{-1} existe alors $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si A^{-1} existe alors $det(A) = \dfrac{1}{\det(A)}$
- $Id^{-1} = Id.$
- Si A est une matrice diagonale telle que $A = [a_{ii}]$, alors $A^{-1} = [1/a_{ii}]$ avec $a_{ii} \neq 0$

2 Résolution des systèmes d'équations Linéaires

2.1 Systèmes Cramérien

Généralités:

On appelle sysrème de n équations linéaire à p inconnues sur $\mathbb{R}$, un système de la forme:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_p \end{cases}$$

ou a_{ij} et b_j sont données dans $\mathbb{R}$ et x_i sont des inconnus.
Le système (S) peut s'ecrire sous forme matricielle $AX = B$ ou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{np} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_p \end{pmatrix}$$

Définition:"Systèmes Cramérien":

On appelle système Cramérien, un système d'équations **Linéaires** où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconues,

Dans tous ce qui suit on propose de résoudre un système cramérien

2.1.1 Méthode de la matrice inverse

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Méthode de résolution:

Le système (S) peut s'ecrire sous forme $AX = B$, Si A est inversible alors:

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}{}^{t}(comA) \times B$$

Exemple:

Résoudre le système (S') suivant par la Méthode matricielle:

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} -z + y + x = 0 \\ 2x - 3z + 4y = 0 \\ y + 3x - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

Remarque importante:

Avant de commancer il faut ecrire le systeme (S) convenablement de la forme ordonnée suivante:

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \\ 3x + y - 4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \text{il faut l'ecrire sous forme } AX = B$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1. \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1. \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -4, comA = \begin{pmatrix} -13 & -1 & -10 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$^t(comA) = \begin{pmatrix} -13 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}B = \frac{1}{\det A}{}^t(comA) \times B \\ &= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -13 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow x = 1, y = 1, z = 2 \end{aligned}$$

2.1.2 Méthode de Cramer:

On écrit le systeme (S) sous forme bloc suivante:

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Le systeme (S) a une solution unique donnée par la formule de Cramer $xi = \dfrac{\Delta i}{\Delta}, i = 1, ..., n$, ou Δi désigne le déterminant obtenue en remplaçant ia iemme colonnes par celle des seconde menbre $b_1, b_2, ..., b_n$

Exemple:

Résoudre le système (S') précédent par la Méthode de Cramer:

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} -z + y + x = 0 \\ 2x - 3z + 4y = 0 \\ y + 3x - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

Remarque importante:

Toujours avant de commancer il faut ecrire le systeme (S) convenablement c-a-d bien ordonnée puis ecrire son bloc:

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \\ 3x + y - 4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -4, \Delta_1 = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -4, \\
\Delta_2 &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix} = -4, \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} = -8
\end{aligned}
$$

Ainsi par la formule $xi = \dfrac{\Delta i}{\Delta}$ on obtient:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2$$

2.1.3 Méthode de pivot de Gauss

Elle a pour but de transformer un système (S) en un systeme (S') equivalent (en utilisant les opérations élémentaire sur les lignes et triangulaire supperieur

Pour bien comprendre la méthode de Gausse, voici un exemple avec tous les détails:

Dans tous ce qui suit on considère le systeme

$$(S)\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

EXPOSÉ DE LA MÉTHODE

1. On place en L_1 une ligne dont le le coefficient est non nul.
Ce coefficient est appelé "pivot"
Remarque: choisir si possible un pivot égale à +-1

2.On élimine ma premiere inconnue dans $L_2, L_3, ..., L_n$
par l'opértion élémentaire $Li \leftarrow L_i + \lambda L_1, (\lambda = -\frac{a_{i1}}{a_{11}})$

3.On choisit parmi $L_2, ..., L_n$ une ligne ou le coefficient de l'inconnue suivante est non nul et l'on utilise ce coefficient comme nouveau pivot

4. On recommence l'etape 2 a la ligne adéquate jusqu'a obtenir . un système triangulaire superieur

Les solutions du système s'obtiennent par résolution . d'equation de proche en proche
$z = 5, y = 4, x = 3$

MISE EN ŒUVRE

$$\begin{cases} [1]x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 2x - y + z = 7 & L_2 \\ -x + y + 2z = 11 & L_3 \end{cases}$$

$$L_2' \leftarrow L_2 - 2L_1 . L_3' \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 0 - 5y + 3z = -5 & L_2' \\ 0 + 3y + z = 17 & L_3' \end{cases}$$

$$L_3" \leftarrow L_3' + \tfrac{3}{5} L_2'$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 6 & L_1 \\ 0 - 5y + 3z = -5 & L_2' \\ \frac{14}{5} z = 14 & L_3" \end{cases}$$

2.2 Résolution des systèmes d'équations Linéaires non cramérien

Introduction:

Soit un système de n équations linéaires a p variables représente par sa forme

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_p \end{cases}$$

On constate qu'i ya quatre cas :

1— système a n équations a n inconnues avec déterminant de la matrice principale est non nul (système cramerrien) déjà fait

2— système a n équations a n inconnues avec déterminant de la matrice principale est nul

3— système a n équations a p inconnues, $n > p$;

4— système a n équations a p inconnues, $n < p$.

Pour les trois cas 2,3,4 ya une méthode très simple qui marche très bien,

Fiche pratique

1- Ecrire le système linéaire sous forme bloc [AIB]

2- Calcul du déterminant de la matrice A, il faut qu'il soit nul pour le cas 2, soit il n'existe pas pour les cas 3 et 4.

3- Trouver une sous matrice de la formule [AIB] « la plus grande » qui possède un déterminant non nul,

4- Les inconnues de cette matrice son les solutions de notre système, ce qui reste il est prix comme un paramètre.

5- On résoud le système obtenue par (4), par la méthode de Cramer

6- La dernière équation obtenue en enlevant la sous matrice du bloc sert a vérifier la compatibilité, par conséquent on a

7- Si les solutions obtenue par cramer verifier la dernier équation alors on a soit une infinités de solution pour le cas 2 soit une solution unique pour les cas 3,4

8- Si les solutions obtenue par cramer ne verifier pas la dernier équation alors on a pas de solution

3 Diagonalisation

3.1 Calcul des valeurs propres

Proposition:

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Les valeurs propres de A sont les racines du polynome carectéristique

$P_\lambda(A) = det(A - \lambda I) = 0$

Exemple:

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} P_\lambda(A) &= det(A - \lambda I) \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$P_\lambda(A) = 0 \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

et par suite on a deux racines $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

Définition:

Soit A une marice carrée d'ordre n, le vecteur non nul V de dimension (n,1) est le vecteur propre associes à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si $AV = \lambda V$

3.2 Déterminons les vecteurs propres associes à chaque valeur propre:

Se sont les solutions (non-nulles) du système $(A - \lambda I)V = 0$

Exemple:

Pour $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, on a $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$

- Chechons $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur propre associes a $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)V &= (A - (-1)I)V \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A-\lambda_1 I)V=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x-3y=0 \\ 6x-3y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow 2x=y$$

Donc $V_1=\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on dit alors que le sous espace E_{-1}

est engendré par le vecteur propre $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Chechons $V_2=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur propre associes a $\lambda_1=2$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda_2 I)V &= (A-2I)V \\ &= \left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(A-\lambda_2 I)V=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x-3y=0 \\ 6x-6y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y.$$

Donc $V_2=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on dit alors que le sous espace E_2 est engendré par le vecteur propre $V_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.3 Diagonalisation de Matrice carrée:

Une matrice carree A est diagonalisable s'il existe une matrice carree D diagonale et une matrice carree P inversible (dite matrice de passage), telles que $A=PDP^{-1}$

Methode de diagonalisation

1. Calculer les valeurs propres de A.
2. Chercher les vecteurs propres associes a ces valeurs propres.
3. Si la matrice de passage qui est formé par les vecteurs propres à un déterminant non nul, alors A est diagonalisable et l'on pent passer a Tetape 4,. Si non, A n'est pas diagonalisable et l'on s'arrete la.
4. La matrice P se construit alors a partir des n vecteurs propres V_i
mis en colonne:

$$P=\begin{pmatrix} | & | & & & & | \\ V_1 & V_2. & . & . & . & V_n \\ | & | & & & & | \end{pmatrix}$$

5.**Notons:**

λ_i la valeur propre associee au i^{ie} vecteur propre V$_i$. Les valeurs propres sont les coefficients de la matrice diagonale D

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6. Ainsi, $A = PDP^{-1}$

Proprietes

1. $\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n$

2. La trace de A est définie par: $tr(A) = tr(D) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

3. Le calcul des puissances est simplifie grace a la diagonalisation:
$A^m = PD^mP^{-1}$, ou

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & 0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$$

Théoreme

Soit M une matrice carrée ,si chaque valeur propre de M admet un espace propre de dimension égale á sa multiplicité alors, M est diagonalisable.

Cas particulier

Si une matrice carrée d'ordre n, qui a n valeurspropres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Exercise 1 *Soit les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser les matrices precedentes si possible

SOLUTION

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- Le polynome caractéristique est donnée par

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ -2 & -\lambda & -1\\ -2 & -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+2)$$

- Les valeurs propres sont donnée par la formule

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$$

Remarque importante:
La matrice A, a trois valeurs propres **simple distincts** donc on est sur qu'ellest diagonalisable d'apres **"le cas particulier"**

- Les vecteurs propres $V_{(-1)},V_{(1)},V_{(2)}$ qui corespond a chaque valeurs propre $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$,sont donnée par la formule

$$(A-\lambda_i I)V_i=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ -2 & -\lambda & -1\\ -2 & -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

on tembe sur un systeme non cramerien, on le résoud, et on trouvent que les V_i sont donnée par

$$V_{(-1)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\},V_{(1)}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\},V_{(2)}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

- Les matrices D et P sont :

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},P=P=\begin{pmatrix}| & | & |\\ V_{(-1)} & V_{(1)} & V_{(2)}\\ | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\det P=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=-1,^t(comP)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

- Donc

$$A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

2) $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$,

- Le polynome caractéristique est donnée par

$$\det(B-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

- Les valeurs propres de B sont donnée par la formule

$$\det(B-\lambda I)=0\Leftrightarrow(1-\lambda)^2(2-\lambda)=0\Longleftrightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=1$$

On dit alors que $\lambda_1=2$ est une valeur propre simple ou bien une valeur propre de multiplicité **égale a 1**, par contre $\lambda_2=1$ est une valeur propre double, ou bien une valeur propre de multiplicité **égale a 2**

- Cherchons Les vecteurs propres $V_{(1)},V_{(2)}$ qui correspond a chaque valeurs propres $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ et essayant de verifier si B est diagonalisable ou pas:

  \- Les vecteurs propres sont donnée par la formule $(B-\lambda_i I)V_i=0$, où $V=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$:

  \- Cas $\lambda_1=2$

$$\begin{aligned}(B-\lambda_1 I)V_1 &= 0\Leftrightarrow(B-2I)V_{(2)}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1-2 & 0 & 0\\ 0 & 1-2 & 0\\ 1 & -1 & 2-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-x=0\\ -y=0\\ x-y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow V=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow V_{(2)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

- Puisqu'on a trouver q'un seule vecteur propre, l'espace propre qui engendre le vecteur propre $V_{(2)}$ est de dimension 1, qui égale a la multiplicité de sa valeur propre simple $\lambda_1=2$.

\- Cas $\lambda_1=1$

$$\begin{aligned}(B-\lambda_1 I)V_1 &= 0\Leftrightarrow(B-(1)I)V_{(1)}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1-1 & 0 & 0\\ 0 & 1-1 & 0\\ 1 & -1 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x-y+z=0\Leftrightarrow x=y-z\\ &\Leftrightarrow V=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ y\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\ 0\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$V_{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Puisqu'on a trouver deux vecteurs propres, l'espace propre qui engendre le vecteur propre $V_{(1)}$ est de dimension 2, qui égale a la multiplicité de sa valeur propre $\lambda_1 = 1$.

Donc d'apres le théoreme chaque valeurs propres a un espace propre de dimension égale á la multiplicité de sa valeurs propres ainsi B est bien diagonalisable.

- Les matrices D et P sont :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ V_{(-1)} & V_{(1)} & V_{(2)} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,^t(comP) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$B = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

- Le polynome caractéristique est donnée par

$$\det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12)$$

- Les valeurs propres sont donnée par la formule

$$\det(C - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12) = 0$$

Pour résoudre la derniere equation il faut chercher une solution apparante dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. dans notre cas $\lambda_1 = 2$ est une solution apparante donc

$$-(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12) = -(\lambda - 2)(a\lambda^2 + b\lambda + c)$$

Ainsi aprés identification on trouve: $a\lambda^2 + b\lambda + c = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ qui, lui aussi a deux racines $\lambda' = 2, \lambda'' = 3$ donc par la formule $a\lambda^2+b\lambda+c = a(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')$, on a

$$-(\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

On dit alors que $\lambda_1 = 3$ est une valeur propre simple ou bien une valeur propre de multiplicité **égale a 1**, par contre $\lambda_2 = 2$ est une valeur propre double, ou bien une valeur propre de multiplicité **égale a 2**

- Cherchons Les vecteurs propres $V_{(3)}, V_{(2)}$ qui correspond a chaque valeurs propres $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ et essayant de verifier si C est diagonalisable ou pas:

  - Les vecteurs propres sont donnée par la formule $(C - \lambda_i I)V_i = 0$,

- Cas $\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned} (C-\lambda_1 I)V_1 &= 0 \Leftrightarrow (C-3I)V_{(2)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y-2z=0 \\ 3y-3z=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases} \end{aligned}$$

c'est un systeme non cramerien on le resoud et on aura que

$$x = t, y = t, z = t \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V_{(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Puisqu'on a trouver q'une seule vecteur propre, l'espace propre qui engendre le vecteur propre $V_{(3)}$ est de dimension 1, est égale a la multiplicité de sa valeur propre simple $\lambda_1 = 3$.

- Cas $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned} (C-\lambda_1 I)V_1 &= 0 \Leftrightarrow (C-(2)I)V_{(2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x = t, y = \frac{3}{4}t, z = t \Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} t \\ \frac{3}{4}t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V_{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Puisqu'on a trouver une seule vecteur propre, l'espace propre qui engendre le vecteur propre $V_{(2)}$ est de dimension 1, il est différent a la multiplicité de sa valeur propre $\lambda_2 = 2$.

Donc d'apres le théoreme, C n'est pas diagonalisable.