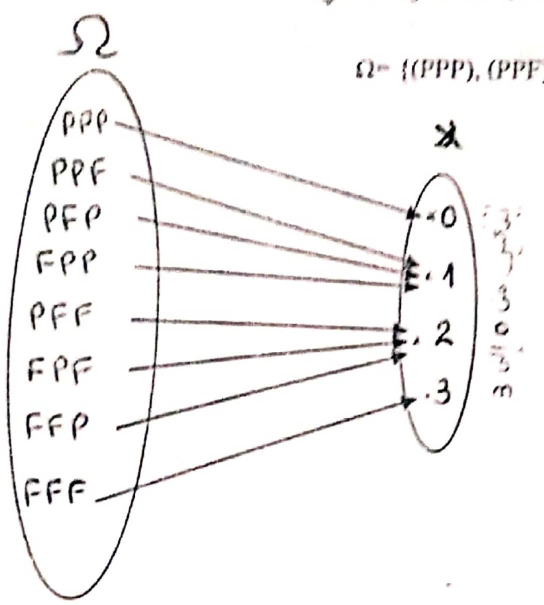
المتغيرات العشوائية

1 المتغير العشوائي: إذا رمينا قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية في الهواء، فإن فضاء العينة Ω يكون كالآتي:

Ω= {(PPP), (PPF), (PFP), (FPP), (PFF), (FPF), (FFP), (FFF)}



* إذا كان اهتمامنا هو عدد مرات ظهور الوجه F الذي نرمز له بـــ X،

فإن X يأخذ القيم التالية: x = 0, 1, 2, 3 .

من هنا يتضح أن هناك علاقة بين كل قيمة من X و نقاط فضاء العينة Ω.

أو بعبارة أخرى فإن X هي عبارة عن دالة نقاط من فضاء العينة Ω و تسمى

في هذه الحالة بـــالمتغير العشوائي. إذاً، إن كلمة متغير تعني أن X يأخذ قيماً

عددية مختلفة في كل حالة، أما كلمة عشوائية فتعني أن قيم المتغير في أي تجربة تعتمد على الصدفة.

1.1. تعريف: – إن المتغير العشوائي X هو مجموعة قيم لنتائج تجربة عشوائية، يكون تحققها مقترناً باحتمال معين. $X = \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$

– هو دالة قيمها الحقيقية تحدد قيمة لكل عنصر من عناصر فضاء العينة Ω.

في المثال السابق وجدنا بأن عدد مرات ظهور الوجه F هو X = {0, 1, 2, 3} . $\sum p(X=x) = 1$.

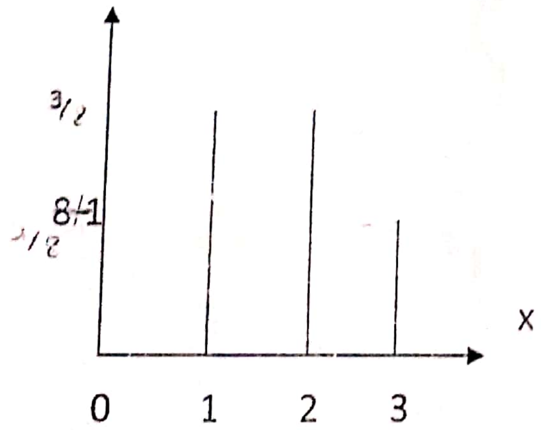
احتمال عدم ظهور الوجه F هو: $P(x=0)=\{(PPP)\} = \frac{1}{8}$ احتمال ظهور الوجه F مرة واحدة هو: $P(x=1)=\{(PPF), (PFP), (FPP)\} = \frac{3}{8}$

احتمال ظهور الوجه F مرتين هو: $P(x=2)=\{(PFF), (FPF), (FFP)\} = \frac{3}{8}$ احتمال ظهور الوجه F ثلاث مرات هو: $P(x=3)=\{(FFF)\} = \frac{1}{8}$

2.1. جدول التوزيع الإحتمالي لــ X:

X	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

3.1. التمثيل البياني للتوزيع الإحتمالي لــ X:



4.1. متغير بارنولي

مثال1: صندوق به كريات بيضاء بنسبة p،

و كريات حمراء بنسبة q، بحيث [p+q=1].

يسمى هذا المتغير العشوائي بمتغير بارلولي: Berloulli

عناصر فضاء العينةΩ	المتغير العشوائي X	الإحتمال P(X=x)
كرية بيضاء	x=1	p
كرية سودا	x=0	q

المتغيرات العشوائية

أو الحالة المنفصلة للمتغير

2. التوزيعات المتقطعة أو المنفصلة:

إن المتغير العشوائي الذي تختلف قيمته الواحدة عن الأخرى بكميات محددة، يدعى بالمتغير العشوائي المتقطع.

التوزيع الإحتمالي المتقطع هو جدول أو قانون يعطي جميع قيم المتغير^x مع جميع الإحتمالات المرفقة. $P(X=x)$

مثال$_2$: خلال تجربة قمنا برمي زهرتي نرد، و قمنا بحساب مجموع العددين المكتوب على وجهي الزهرتين، فتحصلنا على المتغير العشوائي المتقطع X و توزيعه الإحتمالي المدون في الجدول الموالي:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

* عدد الحالات الكلية $= 6 \times 6$
$= 36$

1.2. دالة التوزيع المتجمع:

$F: \mathbb{R} \to [0,1]$
$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x_i)$

إن دالة التوزيع المتجمع هي الدالة التي تلخص أو تجمع التوزيع الإحتمالي، و بالتالي تعطينا احتمالات $[X\leq x_i]$ بحيث أن x_i تمثل أي قيمة من قيم المتغير العشوائي X في فضاء العينة Ω. تعرض هذه الدالة كالآتي: $F(x) = P(X\leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\ _{x_i\leq x}$.

مثال$_2$: نحسب $F(8)$ فنجد : $F(8)= P(x\leq 8)= \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\ _{x_i\leq 8} =$

$= P(x=2)+P(x=3)+ \dots + P(x=8) = \frac{26}{36}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<2 \\ 1/36 & si \quad 2\leq x<3 \\ 3/36 & si \quad 3\leq x<4 \\ 6/36 & si \quad 4\leq x<5 \quad F(4) \\ 10/36 & si \quad 5\leq x<6 \quad F(5) \\ 15/36 & si \quad 6\leq x<7 \leftarrow F(6)=15/36 \\ 21/36 & si \quad 7\leq x<8 \quad F(7) \\ 26/36 & si \quad 8\leq x<9 \leftarrow F(8)=26/36 \\ 30/36 & si \quad 9\leq x<10 \\ 33/36 & si \quad 10\leq x<11 \quad F(10) \\ 35/36 & si \quad 11\leq x<12 \quad F(11) \\ 1 & si \quad x\geq 12 \end{cases}$$

أو $12 \leq x < 14$

* **خصائص دالة التوزيع المتجمع:**

(1) موجبة و غير متنازلة،(متصاعدة)

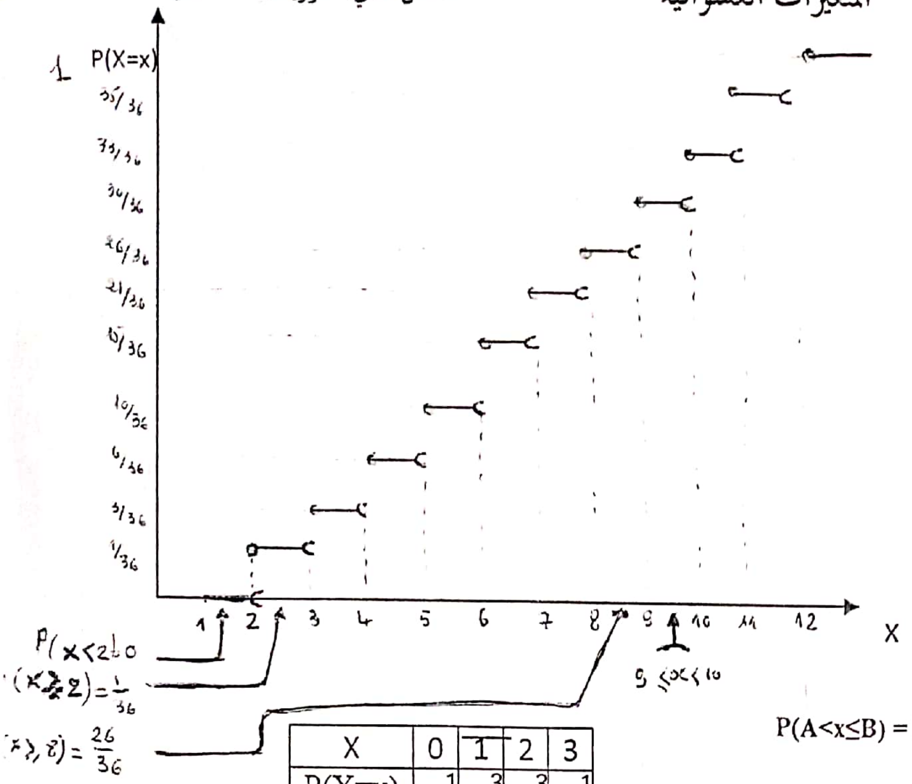
(2) $0\leq F(x) = P(X\leq x) \leq 1$،

(3) $Lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$،

(4) $Lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$.

دالة التوزيع المتجمع للمثال$_2$ مبينة في الشكل المقابل.

2.2. التمثيل البياني لدالة التوزيع المتجمع:15



3.2. حساب الإحتمالات:

ليكن A و B عددان حقيقيان بحيث: $P(A<x\leq B) = F(B) - F(A)$

مثال3: ليكن المتغير العشوائي X معرف كالآتي في الجدول المقابل: $\sum P(X=x) = 1$

X	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ \frac{1}{8} & si \quad 0 \leq x < 1 \quad F(0) \\ \frac{4}{8} & si \quad 1 \leq x < 2 \quad F(1) \\ \frac{7}{8} & si \quad 2 \leq x < 3 \quad F(2) \\ 1 & si \quad 3 \leq x < 4 \quad F(3) \end{cases}$$

1/ $P(x\leq 2) = F(2) = \frac{7}{8} = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

2/ $P(x>2) = P(x=3) = \frac{1}{8} = 1 - P(x\leq 2).$

3/ $P(1<x\leq 3) = P(x\leq 3) - P(x\leq 1) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8}$

4/ $P(1<x<3) = P(x=2) = \frac{3}{8}$

$= P(x<3) - P(x\leq 1) = P(x\leq 2) - P(x\leq 1)$

$= F(2) - F(1) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}.$

4.2. التوقع الرياضي و التباين: (القيم الخاصة للمتغيرات العشوائية المتقطعة)

1.4.2. التوقع الرياضي: (E(x)) التوقع الرياضي لمتغير عشوائي متقطع هو الوسط الحسابي لكل القيم الممكنة مرجحة باحتمالاتها.

لدينا التوزيع الإحتمالي التالي: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

X	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(x) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 1,5$

خصائصه:

1/ ليكن A و B عددان ثابتان و X متغير عشوائي: $E(ax + b) = a . E(x) + b$

2/ التوقع الرياضي لمجموع متغيرين عشوائيين يساوي مجموع التوقعات الرياضية لهذين المتغيرين: $E(x + y) = E(x) + E(y)$

3/ إذا كان X و Y متغيران عشوائيان مستقلان فإننا يمكننا كتابة العلاقة التالية: $E(x . y) = E(x) . E(y)$

المتغيرات العشوائية

2.4.2 التباين: $V(x)$ نعرف تباين متغير عشوائي بالتوقع الرياضي، بمربع فرق هذا المتغير و توقع الرياضي. $V(x) = E[x - E(x)]^2$

خصائصه:

$v(x) = E[x^2 - 2x \cdot E(x) + E^2(x)]$

1/ $V(ax) = a^2 \cdot v(x)$.

$v(x) = E(x^2) - 2E(x) \cdot E(x) + E^2(x)$

2/ $V(x+y) \neq V(x) + V(y)$

$v(x) = E(x^2) - 2E^2(x) + E^2(x)$

$v(x) = E(x^2) - E^2(x). = \frac{24}{8} - \left(\frac{12}{8}\right)^2 = 0,75$

$3 - 2,25$

3. التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات المستمرة أو المتصلة:

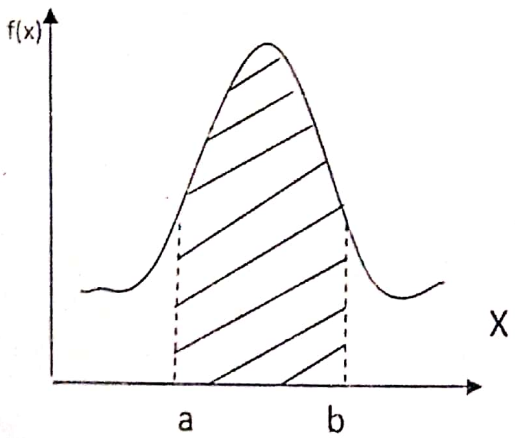
هو التوزيع الذي يأخذ فيه المتغير العشوائي قيماً داخل حدين(مجال)

إذا كانت دالة التوزيع المتجمع $F(x)$ مستمرة و تقبل الإشتقاق، نقول أن المتغير العشوائي مستمر تماماً.

1.3 دالة كثافة الإحتمال: لنعتبر المتغير العشوائي X و دالة توزيعه المتجمع قابلة للإشتقاق، فإن دالة كثافة الإحتمال هي المشتقة الأولى لدالة التوزيع المتجمع، أي $f(x) = F'(x)$. تحسب دالة كثافة الإحتمال بالنسبة للمتغيرات العشوائية المستمرة فقط على أساس تعريف دالة التوزيع المتجمع. نستنتج ما يلي:

$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

$F(x) = P(X \leq x)$ et $X \leq x \Rightarrow x \in]-\infty, x]$



إن احتمال أن المتغير العشوائي المستمر X يأخذ قيماً داخل المجال [a , b] هو:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

$F(b) - F(a) \longrightarrow P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

نفسر هذه النتيجة من خلال التمثيل البياني المقابل.

تمثل احتمال أن ينتمي المتغير العشوائي x إلى المجال [a , b] و $F(x)$ دالة التوزيع الاحتمالي

$\sum P(x = x_i) = 1$

2.3 خصائص دالة كثافة الإحتمال:

كثافة الإحتمال غير سالبة $[f(x) \geq 0 \quad \forall x \in IR]$ الأعداد الحقيقية، و مساحتها الكلية تساوي الـ 1 $[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1]$.

مثال: مدة الإشتغال المتوسطة لنوع خاص من المصابيح بالساعات، متغير عشوائي كثافة إحتماله:

$$f(x) = \begin{cases} 100/x^2 & x \geq 100 \\ 0 & x \leq 100 \end{cases}$$

أحسب ما يلي:

1/ احتمال أن مصباح لا يعوض خلال 150 سا من الإشتغال.

المتغيرات العشوائية

2/ احتمال أنه من بين 3 مصابيح لا يعوض و لا واحد خلال 150 سا من الإشتغال.

3/ إذا علمت أن مصباح يشتغل أكثر من 200 سا، أحسب احتمال أن هذا المصباح لا يشتغل أكثر من 300 سا ؟

الحل: X: مدة إشتغال المصابيح المتوسط بالساعات هي:

$P(X>150) = \int_{150}^{+\infty} f(x)dx = \int_{150}^{+\infty} \frac{100}{x2}dx$

1/ $-\infty \quad 0 \quad 100 \quad 150 \quad +\infty$ $\quad \frac{100}{x^2}$

$100\int_{150}^{+\infty} \frac{1}{x2}dx = 100\ [-\frac{1}{x}]_{150}^{+\infty} = 100.[0 + \frac{1}{150}] = \frac{100}{150} = \frac{2}{3}$

$= 100[-x^{-1}]_{150}^{+\infty}$

$P(x > 150) = \frac{2}{3}$

احتمال ان لا يعوض المصباح خلال 150 سا.

2/ A_1: المصباح الأول لا يعوض خلال 150 سا.

A_2 : المصباح الثاني لا يعوض خلال 150 سا.

A_3: المصباح الثالث لا يعوض خلال 150 سا.

$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = (\frac{2}{3})^3$

3/ B: المصباح يشتغل أكثر من 200 سا

A: المصباح لا يشتغل أكثر من 300 سا

$P[X>200 \text{ et } X\leq 300]$

$P(A/B) = ?$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(200 < x \leq 300)}{P(x > 200)}$$

$$P(200 < x \leq 300) = \int_{200}^{300} \frac{100}{x^2}dx$$

$$= 100\left[-\frac{1}{x}\right]_{200}^{300}$$

$$= 100\left[-\frac{1}{300} + \frac{1}{200}\right]$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(x > 200) = \int_{200}^{+\infty} \frac{100}{x^2}dx$$

$$= 100\left[-\frac{1}{x}\right]_{200}^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$P(A/B) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{6}.(2) = \frac{1}{3}$$

3.3. القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة:

التوقع الرياضي: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xi\ f(x)dx$،

التباين: $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$ مستمر

$[x^2 . P(X=x_i)]$

مع العلم أن $E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

تذكير أما المتغيرات العشوائية المتقطعة

$E(x) = \sum[x_i . P(X=x_i)]$

متقطع

$V(X) = E(x^2) - E^2(x)$

التوزيعات الإحتمالية

4. التوزيعات الإحتمالية المنفصلة الشهيرة:

1.4. توزيع ذي الحدين (الثنائي): Binomiale $\quad X \curvearrowright B(n, p)$

إذا كان لدينا تجربة ما تتكرر n مرة، و كان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p، و الاحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q، فإن احتمال ظهور الحدث x مرة من بين التكرار n، يتبع توزيع دي الحدين الذي دالة احتماليته هي:

$$X \curvearrowright B(n, p) \quad P(X=x_i) = C^{x}_{n} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1.1.4 مواصفات التوزيع: هو توزيع متقطع يُستَخْدَمْ في حالة الأحداث المستقلة، و يتوقف على قيمة الإحتمال:

$$* \ \sum P(X=x_i) = C^{x}_{n} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x} = 1. \qquad\qquad * \ p + q = 1$$

2.1.4. خصائص التوزيع:

* المتوسط عدد النجاحات: $\mu = n.p$ $\qquad$ *التباين: $\delta^2 = n.p.q$ $\qquad$ * الإنحراف المعياري : $\delta = \sqrt{n.p.q}$

مثال1: باع صاحب معرض تجاري **5** سيارات للزبائن، و قدم لهم ضمانات فحواها أن احتمال عدم وقوع السيارات التي باعهم إياها بعطب خلال الخمس السنوات المقبلة هو 80%. نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيارات التي لا يقع بها عطب.

1, ما هو التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات التي لا يقع بها عطب.

2. أحسب متوسط التوزيع، تباينه، و إنحرافه المعياري.

3. ما هو احتمال أن لا يقع عطب على الأقل بـــ 3 سيارات ؟

xi	0	1	2	3	4	5
P(X=xi)	0.00032	0.0064	0.0512	0.2028	0.4096	0.32768

<u>الحل:</u> $n=5, \quad p=\frac{4}{5} \quad , q=1-p = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$

1. X: عدد السيارات التي لا يقع بها عطب تتبع توزيع ذي الحدين دالته هي: $X \curvearrowright B(5, \frac{4}{5}) \ , \ P(x=x_i) = C^{x}_{n} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$

2. * $\mu = n.p = 5.\frac{4}{5} = 4$ * $\delta^2 = n.p.q = 5.\frac{4}{5}.\frac{1}{5} = \frac{\cancel{1}4}{5}$ * $\delta = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{5.\frac{4}{5}.\frac{1}{5}} = 0.894427$

3. ما هو احتمال أن لا يقع عطب على الأقل بـــ 3 سيارات: $P(x \geq 3)$

$$P(X\geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = C_5^3 . (\tfrac{4}{5})^3 . (\tfrac{1}{5})^2 + C_5^4 . (\tfrac{4}{5})^4 . (\tfrac{1}{5})^1 + C_5^5 . (\tfrac{4}{5})^5 . (\tfrac{1}{5})^0 = 0.94008$$

التوزيعات الإحتمالية

2.4. توزيع بواسوني: Poisson $X \leadsto P(\lambda)$

هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة، و يهتم بالحوادث النادرة: مثل حدوث الحرائق في إحدى المدن، حوادث المرور، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل مكتب، عدد السيارات التي تدخل المرآب...الخ.

نقول أن X تتبع توزيع بواسوني $P(\lambda)$، ذي المعلمة "λ" الموجبة (متوسط عدد مرات ظهور الحوادث النادرة) إذا كان توزيعها الاحتمالي:

$$P(X=x_i) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} \quad ; X = 0, 1, 2, \dots, n$$

و لكل عدد طبيعي X و e=2.7 .

1.2.4. مواصفات التوزيع

* يستخدم في حالة الأحداث المستقلة النادرة، * متوسط عدد النجاحات معروف بـــ λ، * متوسط عدد النجاحات يتناسب مع طول الوقت.

• تستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من الاستجابات في وحدة الزمن

2.2.4. خصائص التوزيع

* المتوسط: $\mu = \lambda$ *التباين: $\delta^2 = \lambda$ * الإنحراف المعياري: $\delta = \sqrt{\lambda}$

التوقع الرياضي $E(x)$ $V(x)$ $\delta(x)$

مثال: إذا كان متوسط عدد الأخطاء المطبعية على صفحات إحدى الكتب هو 3 أخطاء، أوجد التوزيع الاحتمالي ثم أحسب:

1/ عدم ظهور أي خطأ.   2/ ظهور خطأين.   3/ خطأين على الأكثر.   4/ خطأين على الأقل.

الحل: نلاحظ أن $\lambda=3$ ، و X (الحدث): عدد الأخطاء المطبعية

X: متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم: 0؛ 1؛ 2؛ ...، و يتبع التوزيع البواسوني **λ=3** ، دالة احتماله هي: $P(X=x_i) = \frac{e^{-3}.3^{x}}{x!}$

1/ عدم ظهور أي خطأ: $P(x=0) = \frac{e^{-3}.3^{0}}{0!} = e^{-3} = 0.05$ ، 2/ ظهور خطأين: $P(x=2) = \frac{e^{-3}.3^{2}}{2!} = 0.225$

3/ خطأين على الأكثر: $P(x\leq 2) = P(x=2) + P(x=1) + P(x=0) = 0.225+0.15+0.05 = 0.425$

4/ خطأين على الأقل: $P(x\geq 2) = P(x=2) + P(x=3) = 1 - P(x\leq 1) = 1 - 0.2 = 0.8.$

$P(x=0) + P(x=1)$

التوزيعات الإحتمالية

3.4. التوزيع الهندسي الزائدي (فوق الهندسي): Hypergéométric، $X \curvearrowright H(m, n_1, n_1)$

نعتبر صندوق يحتوي على n_1 كرية بيضاء و n_2 كرية حمراء، نسحب منه m كرية بالصدفة. نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكريات البيضاء التي تحصلنا عليها خلال السحب. في هذه الحالة نقول أن X يخضع لتوزيع هندسي زائدي: $X \curvearrowright H(m, n_1, n_2)$ ، دالة احتماليته معطاة على النحو التالي:

$$P(X=x_i) = \frac{C_{n_1}^{x} . C_{n_2}^{m-x}}{C_{n_1+n_2}^{m}} \quad C_N^m \qquad N = n_1 + n_2$$

1.3.4 مواصفات التوزيع: هو توزيع متقطع يُستَخدَمْ في حساب الاحتمالات،

2.3.4. خصائص التوزيع:

* <u>المتوسط</u>: $E(x) = \sum_{i=1}^{3} Xi . P\ (X = xi)$ *<u>التباين</u>: $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$ * <u>الإنحراف المعياري</u> : $\delta = \sqrt{V(x)}$

مثال1: يحتوي صندوق على 4 كريات بيضاء، و 2 حمراء. نسحب منه بالصدفة 3 كريات. نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكريات البيضاء المحصل عليها.

xi	1	2	3
P(X=xi)	$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$ $\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$

1. أكتب التوزيع الاحتمالي لـــ X.

2. ما هو احتمال الحصول على الأقل على كرية واحدة بيضاء. 02

3. أحسب متوسط الكريات البيضاء الممكن الحصول عليها

X يخضع إلى التوزيع الهندسي الزائدي: معناه $H(3, 4, 2) \curvearrowleft X$، دالة احتماليتها هي: $P(X=x_i) = \frac{C_4^x . C_2^{3-x}}{C_6^3}$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 . C_2^2}{C_6^3} = \frac{(4).(1)}{(20)} = \frac{1}{5} \quad P(X=2) = \frac{C_4^2 . C_2^1}{C_6^3} = \frac{(6).(2)}{(20)} = \frac{3}{5} \quad P(X=3) = \frac{C_4^3 . C_2^0}{C_6^3} = \frac{(4).(1)}{(20)} = \frac{1}{5}$$

2. احتمال الحصول على الأقل على كريتين بيضاوين: $P(X \geq 2)$ ، $P(X\geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$،

3. متوسط الكريات البيضاء: $E(x) = \sum_{i=1}^{3} Xi . P\ (X = xi) = 1\left(\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) = 2$

مثال2: من بين 10 أشخاص الذين قدموا ملف لطلب التوظيف بمؤسسة معينة 7 منهم يحملون درجة جامعية، أختير منهم 4، $E(X)=2.77$، $E(x^2)=6.35$ الباقي 03

xi	1	2	3	4
P(X=xi)	0 0,03	0 0,333	0 0,5	0.166 0,166

$C_7^1 . C_3^3 / C_{10}^4 = 0{,}03$

مثال3: لدى سكرتير 10 رسائل، صنف 06 ورقية و 04 الكترونية