# Chapitre 1 : Les Nombres réels

# Chapitre 1

# Les Nombres réels

## 1.1 Notations

a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ : ensemble des entiers naturels.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

b) $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ : ensemble des entiers relatifs.

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}.$$

c) $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ : ensemble des nombres décimaux.

**Remarque**

Un nombre décimal est un nombre réel dont la partie décimale est finie.

d) $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\}$ : ensemble des nombres rationnels.

**Remarque**

Tout nombre réel admet une écriture décimale sous la forme :

$$\underbrace{\text{partie réelle}}, \underbrace{\text{partie décimale}}$$

**Proposition**

Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une partie décimale finie ou infinie périodique à partir d'un certain rang.

**Remarque**

Tout nombre rationnel s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$ (c'est-à-dire $\text{pgcd}(p, q) = 1$ : $p$ et $q$ sont premiers entre eux). On dit alors que $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

**Exemple**

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{1}{3} = 0,333\ldots \in \mathbb{Q}, \qquad 1,25 \in \mathbb{Q}, \qquad 13,2\overline{75} \in \mathbb{Q}$$
$$e \simeq 2,718\ldots \notin \mathbb{Q}, \qquad \pi \simeq 3,14159265\ldots \notin \mathbb{Q}$$

## 1.2 L'ensemble $\mathbb{R}$

### 1.2.1 Nombres irrationnels

Il existe des nombres qui n'appartiennent ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$, ni à $\mathbb{Q}$.

**Proposition**

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est irrationnel).

Pour démontrer cette proposition, on rappelle quelques notions importantes.

**Définition (Démonstration par l'absurde)**

On suppose le contraire de ce qu'on veut démontrer, puis on montre que cela mène à une contradiction. La proposition initiale est donc vraie.

**Théorème d'Euclide**

Si un nombre premier $P$ divise le produit d'entiers $(a.b)$, alors ($P$ divise $a$) ou ($P$ divise $b$) :

$$\begin{cases} P \mid a.b \\ P \text{ premier} \end{cases} \implies (P \mid a) \text{ ou } (P \mid b).$$

**Théorème de Gauss**

$$\begin{cases} P \mid a.b \\ P \wedge b = 1 \end{cases} \implies P \mid a.$$

**Remarque**

$P \mid a$ signifie que $a$ est multiple de $P$, c'est-à-dire $a = k \cdot P$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Exemple**

Si $P = 2$ (2 est premier) et $a.b$ est multiple de 2 ($2 \mid a.b$), alors nécessairement $a$ est multiple de 2, ou $b$ est multiple de 2 (théorème d'Euclide).
Avec le théorème de Gauss : si $P = 7$, $b = 15$ et $a.b$ est multiple de 7, alors $a.b = 7k$. Comme $b = 15$ et $7 \wedge 15 = 1$, $a$ doit être multiple de 7.

**Remarque**

Pour un bon raisonnement par l'absurde, il faut suivre les 5 étapes :

1. Définir clairement la proposition que l'on veut démontrer.
2. Supposer « temporairement » le contraire de cette proposition.

3. Analyser les conséquences logiques de cette hypothèse par une démonstration mathématique.
4. Identifier une contradiction ou une situation absurde.
5. Conclure que l'hypothèse est fausse, donc la proposition initiale est vraie.

**Preuve de la proposition 2**

Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \wedge q = 1$ ($p$ et $q$ sont premiers entre eux).

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies p = \sqrt{2}\, q \implies p^2 = 2q^2 \implies p \cdot p = 2 \cdot q \cdot q. \qquad (*)$$

Or 2 est premier et 2 divise $p \cdot p$, donc (d'après le théorème d'Euclide) 2 divise $p$.
2 divise $p$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$.
En remplaçant dans $(*)$ :

$$2k \cdot 2k = 2 \cdot q \cdot q \implies 4k^2 = 2q^2 \implies 2k^2 = q^2 = q \cdot q.$$

Donc 2 divise $q \cdot q$, et comme 2 est premier, 2 divise $q$.
On a donc 2 divise $p$ *et* 2 divise $q$, c'est-à-dire que $p$ et $q$ ne sont pas premiers entre eux.
Ceci contredit $p \wedge q = 1$.
**Conclusion :** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ est irrationnel).

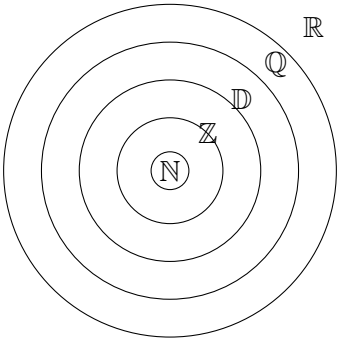
**Remarque**

De même, on montre que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} + 2\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$.
De façon générale, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ dès que $n \geq 2$ est un nombre premier.

a) La même preuve est valable pour démontrer que la racine carrée d'un nombre premier est irrationnelle.

b) $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationnels}\}$ : ensemble des nombres réels. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$




**Quelques Symboles Mthématiques**

- $\forall$ signifie « pour tout $x \in E$ », « quel que soit $x \in E$ ».
- $\exists$ signifie « il existe au moins un élément ».
- $\exists!$ signifie « il existe un unique élément ».

- $\Rightarrow$ signifie « implique », c'est l'implication, si...alors.
- $\Leftrightarrow$ signifie « si et seulement si », c'est l'équivalence, si et seulement si (ssi).
- $\wedge$ signifie « et », c'est la conjonction.
- $\vee$ signifie « ou », c'est la disjonction.

**Théorème (Densité des rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$)**

— $\mathbb{Q}$ (l'ensemble des rationnels) est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire qu'entre deux réels il existe un rationnel :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{Q}, \quad x < q < y.$$

— $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (l'ensemble des irrationnels) est dense dans $\mathbb{R}$ :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < p < y.$$

**Notations**

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, & x \in \mathbb{R}^+ &\text{ est dit } x \text{ positif.} \\ \mathbb{R}^{+*} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, & x \in \mathbb{R}^{+*} &\text{ est dit } x \text{ strictement positif.} \\ \mathbb{R}^- &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, & x \in \mathbb{R}^- &\text{ est dit } x \text{ négatif.} \\ \mathbb{R}^{-*} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, & x \in \mathbb{R}^{-*} &\text{ est dit } x \text{ strictement négatif.} \end{aligned}$$

### 1.2.2 L'ordre sur $\mathbb{R}$

**Définition**

$\mathbb{R}$ est ordonné par la relation $\leq$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (x \leq y) \iff (x - y \in \mathbb{R}^-) \iff x - y \leq 0.$$

**Propriétés**

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y$ ou $y \leq x$.
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \iff x + z \leq y + z$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^+, \quad x \leq y \iff xz \leq yz$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^-, \quad x \leq y \iff xz \geq yz$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}^* / \ x, y > 0\ , \quad x \leq y \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$.
6. $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ a \leq b \end{array} \right. \Longrightarrow x + a \leq y + b$.

**Attention aux erreurs suivantes**

**1)** $\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ x' \leq y' \end{array} \right. \not\Longrightarrow x - x' \leq y - y'$.

*Exemple :* $-3 \leq 1$ et $-3 \leq 6$, mais $(-3) - (-3) = 0 \not\geq 1 - 6 = -4$.

**2)** $\left\{ \begin{array}{l} x \leq y \\ x' \leq y' \end{array} \right.$ , $x', y' \in \mathbb{R}^* \not\Longrightarrow \dfrac{x}{x'} \leq \dfrac{y}{y'}$, car comparer une fraction demande de prendre en compte le signe et la grandeur du dénominateur.

*Exemple :* $9 \leq 10$ et $1 \leq 2$, mais $\frac{9}{1} \not\leq \frac{10}{2}$ (c'est-à-dire $9 \not\leq 5$).

**3)** $\begin{cases} x \leq y \\ x' \leq y' \end{cases} \implies x \cdot x' \leq y \cdot y'$ est vraie **seulement si** $x, y, x', y'$ sont positifs. Sinon, c'est faux.
*Exemple :* $-2 \leq 1$ et $-4 \leq -3$, mais $(-2)(-4) = 8 \not\leq (1)(-3) = -3$.

**4)** $x \leq y \not\Longrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$ s'il n'est pas vrai que $x \cdot y > 0$.
*Exemple :* $-1 \leq 2$, mais $-\frac{1}{1} \not\geq \frac{1}{2}$.

| On suppose $x \leq y$ et $x' \leq y'$ | | **Vrai/Faux** | **Exemple** |
|---|---|---|---|
| 1) | $x - x' \leq y - y'$ | Faux | $-3 \leq 1$, $-3 \leq 6$ mais $(-3) - (-3) = 0 \not\geq -4$ |
| 2) | $\frac{x}{x'} \leq \frac{y}{y'}$, $(x', y') \neq (0, 0)$ | Faux | $9 \leq 10$, $1 \leq 2$ mais $\frac{9}{1} \not\leq \frac{10}{2}$ |
| 3) | $x \cdot x' \leq y \cdot y'$ | Vrai ssi $x, x', y, y' \geq 0$ | $-2 \leq 1$, $-4 \leq -3$ mais $(-2)(-4) \not\leq -3$ |
| 4) | $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ | Vrai si $xy > 0$, faux sinon | $-10 \leq 2$ mais $-\frac{1}{10} \leq \frac{1}{2}$ |

### 1.2.3 Intervalles

**Définition**

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle intervalle $I = [x, y]$ l'ensemble de tous les nombres délimités par $x$ et $y$.
Autrement dit, $I$ est un intervalle si

$$\forall x, y \in I,\ \forall z \in \mathbb{R}, \quad x \leq z \leq y \implies z \in I.$$

On note $I \subset \mathbb{R}$.

**Remarque**

1. Un intervalle borné est un intervalle dont les bornes (extrémités) sont finies.
2. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
3. $\varnothing = \{\}$ : ensemble vide.

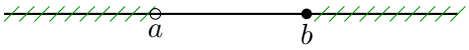
**Définition (Droite réelle achevée)**

La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ constituée de $\mathbb{R}$ auquel on ajoute deux éléments formels $+\infty$ et $-\infty$ :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ permet d'éviter de séparer le cas « un réel » et « l'infini » dans les énoncés. Par exemple, les intervalles ouverts sont ceux de la forme $]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

| L'intervalle est | Borné | Non borné |
|---|---|---|
| Ouvert (open) | $]a,b[$ | $]a,+\infty[,\ ]-\infty,a[,\ \mathbb{R}$ |
| Fermé (close) | $\{a\}=[a,a],\ [a,b]$ | $[a,+\infty[,\ ]-\infty,a],\ \mathbb{R}$ |
| Semi-ouvert (ou semi-fermé) half-open/closed interval | $]a,b],\ [a,b[$ | — |




$]a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$
$\phi=\{\}$ : ensemble vide.

**Attention**

— L'intersection $\cap$ d'intervalles est un intervalle.

— L'union $\cup$ d'intervalles n'est pas forcément un intervalle.

*Exemple :* $I=]1,3]\cup[5,7[$. On a $1<z=4<7$ mais $4\notin I$, donc $I$ n'est pas un intervalle.

**Exemple**

$A=\{x\in\mathbb{Q}\mid 1\leq x<\sqrt{5}\}$. $A$ est-il un intervalle ? Justifier votre réponse.
On a $1\in A$, $\frac{2}{3}\in A$, mais $1\leq\sqrt{2}\leq\sqrt{5}$ et $\sqrt{2}\notin A$ (car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$). Donc $A$ n'est pas un intervalle.

**Définition (Voisinage)**

Soit $a\in\mathbb{R}$, $V\subset\mathbb{R}$. Un voisinage $V$ d'un point $a$ est un ensemble qui contient un ouvert qui comprend le point $a$.
$V$ est un voisinage de $a$ s'il existe $\varepsilon>0$ tel que $]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\subset V$.

**Exemple**

$]3\ ;\ 3,2[$ est un voisinage de $\pi$. $\quad]-\varepsilon,\varepsilon[$ est un voisinage de 0.

## 1.3 Valeur absolue

**Définition**

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on définit la valeur absolue par :

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

**Propriétés**

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ |x|=0\iff x=0\,;\quad |x|\geq 0\,;\quad |-x|=|x|\,;\quad -|x|\leq x\leq|x|.$
2. $\forall x,y\in\mathbb{R},\ |x\cdot y|=|x|\cdot|y|.$
3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2}=|x|.$
4. $\forall x,y\in\mathbb{R},\ |x+y|\leq|x|+|y|$ (inégalité triangulaire)
5. $\forall x,y\in\mathbb{R},\ |x+y|\geq\big||x|-|y|\big|$ (seconde inégalité triangulaire)

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.
   — $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \ |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \iff \mathcal{S} = [-a, a]$.
   — $\forall a \in \mathbb{R}^-,\ \ |x| \leq a$ est impossible $\Rightarrow \mathcal{S} = \varnothing$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   — $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \ |x| \geq a \Rightarrow (x \geq a$ ou $x \leq -a) \Rightarrow \mathcal{S} = ]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
   — $\forall a \in \mathbb{R}^-,\ \ |x| \geq a$ toujours vérifiée $\Rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{R}$.

**Preuve**

**Preuve de négalité triangulaire, (propriété 4) :**
On rappelle que $|y-x|$ représente la distance entre $x$ et $y$.
Montrons que $|x+y| \leq |x| + |y|$.
On a $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$, donc en additionnant :

$$-\big(|x| + |y|\big) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Ainsi, d'après la propriété (6), $|x+y| \leq |x| + |y|$.

**Preuve de la seconde inégalité riangulaire(propriété 5) :**

$$|x| = |x+y-y| \leq |x+y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x+y|,$$

$$|y| = |y+x-x| \leq |x+y| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x+y| \implies |x| - |y| \geq -|x+y|.$$

Donc $-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$, c'est-à-dire $\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$.
En remplaçant $y$ par $-y$ dans cette dernière inégalité, et comme $|-y| = |y|$, on obtient

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

**Exemple**

$|-7| = 7, \quad |2| = 2.$

### Résolution d'équations et d'inéquations avec valeur absolue

**Exemple**

**1) Résoudre** $\sqrt{(x+1)^2} = 2$, c'est-à-dire $|x+1| = 2$.

**Tableau de signes de** $x+1$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\lvert x+1\rvert$ | | $-x-1$ | | $x+1$ | |

**Résolution :**

— Pour $x \in ]-\infty, -1]$ :

$$-x - 1 = 2 \implies x = -3.$$

$x = -3 \in ]-\infty, -1]$ : accepté $\implies$ $S_1 = \{-3\}$.

— Pour $x \in [-1, +\infty[$ :

$$x + 1 = 2 \implies x = 1.$$

$x = 1 \in [-1, +\infty[$ : accepté $\implies$ $S_2 = \{1\}$.

**Conclusion.** L'ensemble des solutions est

$$S = \{-3, 1\} = S_1 \cup S_2.$$

**2)** $|3x - 1| = -1$ : impossible (une valeur absolue est positive), donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

**3)** $|x - 1| \leq -3$ : impossible, donc $\mathcal{S} = \varnothing$.

**4) Résoudre** $1 < |x - 2| < 3. \iff 1 < \sqrt{(x-2)^2} < 3.$

**Tableau de signes de** $x - 2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\lvert x-2\rvert$ | | $-x+2$ | | $x-2$ | |

**Résolution :**

— Pour $x \in ]-\infty, 2]$ :

$$1 < -x + 2 < 3 \implies -1 < -x < 1 \implies -1 < x < 1.$$

D'où $S_1 = ]-\infty, 2] \cap ]-1, 1[ = ]-1, 1[$.

— Pour $x \in [2, +\infty[$ :

$$1 < x - 2 < 3 \implies 3 < x < 5.$$

D'où $S_2 = [2, +\infty[ \cap ]3, 5[ = ]3, 5[$.

**Conclusion.**

$$S = S_1 \cup S_2 = ]-1, 1[ \cup ]3, 5[.$$

## 1.4 Partie entière

**Théorème (Axiome d'Archimède)**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x < n.$$

**Définition**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de $x$ **l'unique entier** $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p \leq x < p + 1,$$

notée $[x]$, $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ (c'est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$).

**Exemple**

$E(4,3) = 4, \quad E(0,91) = 0, \quad E(-7,2) = -8, \quad E(-1) = -1.$

**Propriétés**

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ E(x) \leq x < E(x)+1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x-1 < E(x) \leq x.$
3. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ E(n) = n.$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y,\ \ E(x) \leq E(y).$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ E(x+n) = E(x)+n$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$
7. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1.$

**Remarque**

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $E(x) < x < E(x)+1$ (inégalité stricte des deux côtés).

**Preuve des propriétés 5-6 et 7)**

**5) Montrons que** $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad E(x+n) = E(x)+n.$

Par définition de la partie entière, on a

$$E(x) \leq x < E(x)+1.$$

En ajoutant $n$ aux trois membres :

$$\underbrace{E(x)+n}_{k} \leq x+n < \underbrace{E(x)+n}_{k}+1 \quad \Longrightarrow \quad k \leq x+n < k+1.$$

Comme $E(x)+n \in \mathbb{Z}$ (car $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$), cet encadrement est exactement la caractérisation de la partie entière de $x+n$ :

$$E(x+n) = E(x)+n.$$

**6) Montrons que** $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$

On a, $n > 0$ :

$$E(x) \leq x < E(x)+1 \quad \Longrightarrow \quad nE(x) \leq nx < nE(x)+n.$$

Comme la fonction $E(\cdot)$ est une fonction croissante, alors

$$E\big(\underbrace{nE(x)}_{\in\mathbb{Z}}\big) \leq E(nx) < E\big(\underbrace{nE(x)+n}_{\in\mathbb{Z}}\big)$$

$$nE(x) \leq E(nx) < nE(x)+n$$

En divisant par $n > 0$ :

$$E(x) \leq \frac{1}{n}E(nx) < E(x)+1.$$

**Conclusion.**

$$E\left(\frac{1}{n}E(nx)\right) = E(x).$$

**7) Montrons que** $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1.$

On a $E(x) \leq x < E(x)+1$ et $E(y) \leq y < E(y)+1$. En additionnant :

$$E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2.$$

Comme la fonction $E(\cdot)$ est croissante, et $E(x)+E(y) \in \mathbb{Z}$, $E(x)+E(y)+2 \in \mathbb{Z}$,

$$E\big(E(x)+E(y)\big) \leq E(x+y) < E\big(E(x)+E(y)+2\big),$$

c'est-à-dire

$$E(x)+E(y) \leq E(x+y) < E(x)+E(y)+2,$$

soit, puisque $E(x+y)$ est un entier,

$$E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1.$$

**Remarque**

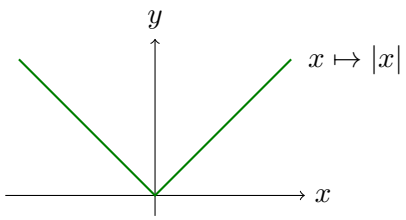
1. Si $2 \leq x < 3$ alors $E(x) = 2$.
2. Si $E(x) = 4$ alors $4 \leq x < 5$.
3. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $E(x) \neq x$ ; si $y \in \mathbb{Z}$, alors $E(y) = y$.

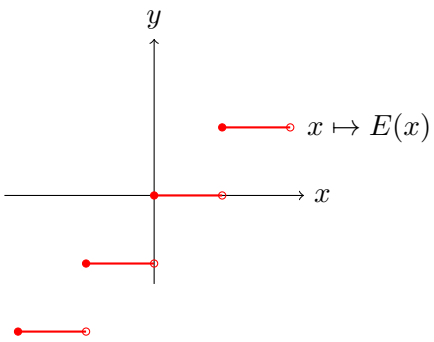
**Exemple**

**1) Résoudre** $E(x+1) = 5$ dans $\mathbb{R}$.
Comme $5 \in \mathbb{Z}$, l'équation possède une solution. $E(x+1) = 5 \iff 5 \leq x+1 < 6 \iff 4 \leq x < 5$. D'où $\mathcal{S} = [4,5[$.

**2) Résoudre** $3E(x-4) = 1$.
$3E(x-4) = 1 \iff E(x-4) = \dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, donc l'équation ne possède pas de solution : $\mathcal{S} = \varnothing$.

**Représentations graphiques**



## 1.5 Majorant, minorant, minimum, maximum, borne supérieure et borne inférieure

**Définition**

Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $m$ et $M$ des éléments de $\mathbb{R}$.

- $A$ est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ x \leq M$. $M$ est appelé un **majorant** de $A$.
- $A$ est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\ x \geq m$. $m$ est appelé un **minorant** de $A$.
- $A$ est **bornée** s'il existe $m, M$ tels que $\forall x \in A,\ m \leq x \leq M$ (c'est-à-dire majorée et minorée).

**Définition**

- $M$ est le **plus grand élément** (**maximum**) de $A$ si

$$M = \max(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \\ M \in A \end{cases}$$

- $m$ est le **plus petit élément** (**minimum**) de $A$ si

$$m = \min(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A,\ x \geq m \\ m \in A \end{cases}$$

**Remarque**

1. Le majorant et le minorant, s'ils existent, ne sont pas uniques.
2. $\max A$ et $\min A$, s'ils existent, sont uniques.
3. Les intervalles ouverts $]a, b[$ ne possèdent ni maximum ni minimum.

**Définition (Borne supérieure et borne inférieure)**

- $M$ est appelée **borne supérieure** de $E$ (notée $M = \sup E$) si $M$ est le plus petit des majorants de $E$.
- $m$ est appelée **borne inférieure** de $E$ (notée $m = \inf E$) si $m$ est le plus grand des minorants de $E$.

**Théorème**

1. Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
2. Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

**Remarque (Important)**

D'après ce théorème, avant de chercher le sup ou l'inf d'un ensemble, il faut d'abord prouver que l'ensemble est non vide et borné ( majoré pour l'existence du sup, minoré pour l'existence de l'inf).

| **Ensemble** $A$ | **Borné/ non** | **Majorants** | **Minorants** | $\sup A$ | $\max A$ | $\inf A$, $\min A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $[1,2]$ | borné | $[2,+\infty[$ | $]-\infty,1]$ | $2 \in A$ | 2 | $\inf A = 1 \in A$, $\min A = 1$ |
| $]4,5[$ | borné | $[5,+\infty[$ | $]-\infty,4]$ | $5 \notin A$ | n'existe pas | $\inf A = 4 \notin A$, $\min A$ n'existe pas |
| $\{-1,-5,9\}$ | borné | $[9,+\infty[$ | $]-\infty,-5]$ | $9 \in A$ | 9 | $\inf A = -5 \in A$, $\min A = -5$ |
| $]-\infty,7]$ | majoré . | $[7,+\infty[$ | n'existent pas | $7 \in A$ | 7 | n'existent pas |
| $\mathbb{N}$ | minoré seulement. | n'existent pas | $]-\infty,0]$ | n'existe pas | n'existe pas | $\inf A = 0 \in \mathbb{N}$, $\min A = 0$ |

## 1.6 Caractérisation de la borne supérieure et inférieure

**Proposition**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ :

1. Si A est majoré, alors

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A,\ x \leq M \quad (M \text{ est un majorant de } A) \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A, \quad M - \varepsilon < x_\varepsilon \leq M \end{cases}$$

Cela signifie que tout nombre plus petit que $M$ n'est pas un majorant : on peut trouver un $x_\varepsilon \in A$ qui le dépasse.

2. Si A est minoré, alors

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \quad x \geq m \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A, \quad m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$$

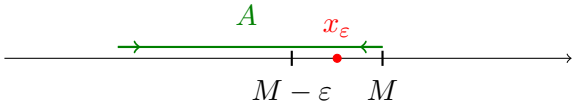
Cela signifie que tout nombre plus grand que $m$ n'est pas un minorant de $A$ : on peut trouver un $x \in A$ qui lui est inférieur.

**Remarque**

On utilise $\varepsilon > 0$ (epsilon) pour représenter une petite quantité positive arbitraire : $\varepsilon$ est *arbitrairement petit mais positif.*

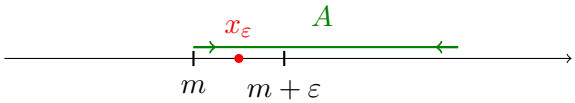
**Explication (droite réelle) :**

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \quad x \leq M \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A, \quad M - \varepsilon < x_\varepsilon < M \end{cases}$$




$$\exists\, x_\varepsilon \in A, \quad M - \varepsilon < x_\varepsilon < M$$

$$m = \inf A \iff \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, \quad x \geq m \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x_\varepsilon \in A, \quad m \leq x_\varepsilon < m + \varepsilon \end{cases}$$




$$\exists\, x_\varepsilon \in A, \quad m < x_\varepsilon < m+\varepsilon$$

**1)** Soit $A = ]0,4]$.

Déterminons la borne supérieure et la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément (s'ils existent).

A une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($1 \in A$). De plus $\forall x \in A,\ 0 < x \leq 4$, donc $A$ est borné. Ainsi la borne supérieure et inférieure existent.

### Borne supérieure

4 est un majorant, donc $\sup A \leq 4$. D'autre part, $4 \in A$, donc $4 \leq \sup A$. Ceci veut dire que $\sup A = 4 = \max A$.

### Borne inférieure

En utilisant la caractérisation de la borne inférieure, montrons que $\inf A = 0$.

On doit montrer que

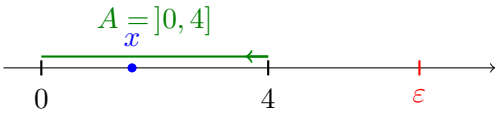
① $\forall x \in ]0,4],\ x \geq 0$ et

② $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in ]0,4]\ /\ 0 < x < 0+\varepsilon$.

La première est évidente. Pour la deuxième, soit $\varepsilon > 0$ ; on distingue deux cas.

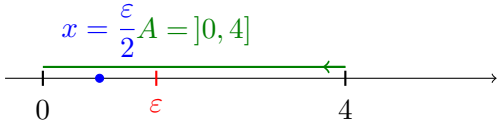
— **Cas 1 :** $\varepsilon \geq 4$ : tous les $x \in ]0,4]$ vérifient la deuxième propriété.
En particulier, on peut choisir $x = 3 \in ]0,4]$ :

$$\forall \varepsilon \geq 4,\ \exists\, x = 3 \in ]0,4]\ /\ 0 < x < 0+\varepsilon.$$




n'importe quel $x \in ]0,4]$ vérifie $0 < x < \varepsilon$

— **Cas 2 :** $0 < \varepsilon < 4$ : tous les $x \in ]0,\varepsilon[$ vérifient la deuxième propriété. En particulier, $x = \dfrac{\varepsilon}{2} \in ]0,\varepsilon[$ vérifie $0 < x < 0+\varepsilon$.




$x = \dfrac{\varepsilon}{2} \in ]0,\varepsilon[$ vérifie $0 < x < \varepsilon$

Donc $\inf A = 0$.

Puisque $0 \notin ]0,4]$, $A$ n'admet pas de minimum.

**Proposition : Propriétés de la borne supérieure et la borne inférieure**

Soient $A$ et $B$ deux parties non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$ et $B$ est bornée alors $A$ est bornée et on a

$$(\sup A \leq \sup B) \quad et \quad (\inf A \geq \inf B).$$

2. Si $A$ et $B$ sont bornées alors
   (a) $A \cup B$ et $A \cap B$ sont bornés.
   (b) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ $\quad$ $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
   (c) $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ $\quad$ $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$

**Preuve**

1. Supposons que $A$ et $B$ sont deux parties non vides, bornées, avec $A \subset B$. Montrons que

$$\sup A \leq \sup B \qquad \text{et} \qquad \inf A \geq \inf B.$$

Comme $A$ et $B$ sont bornées et non vides, $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent.
$\sup A \leq \sup B$ **:** Comme $B$ est majorée, $\forall x \in B,\ x \leq \sup B$. Or $A \subset B$, donc les éléments de $A$ sont des éléments de $B$ : $\forall x \in A,\ x \leq \sup B$. Ceci implique que $\sup B$ est un majorant de $A$. Comme, par définition, $\sup A$ est le plus petit des majorants de $A$, on a forcément

$$\sup A \leq \sup B.$$

La preuve du reste de la proposition est laissée en exercice aux étudiants.$\inf A \geq \inf B$ **:** De la même manière, comme $B$ est minorée, $\forall x \in B,\ x \geq \inf B$, or $A \subset B$ donc $\forall x \in A,\ x \geq \inf B$ : $\inf B$ est un minorant de $A$. Par définition, $\inf A$ est le plus grand des minorants de $A$, donc forcément

$$\inf A \geq \inf B.$$

2. La preuve du reste de la proposition est laissée en exercice aux étudiants.

**Exemple**

Soit $A = [2, 4[ \cup ]0, 1]$.

1. $A$ est-il borné ?
2. Calculer $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.

Posons

$$\begin{cases} A_1 = [2, 4[ \\ A_2 = ]0, 1] \end{cases}$$

Comme $A_1$ et $A_2$ sont non vides et bornés, donc $A = A_1 \cup A_2$ est non vide et borné dans $\mathbb{R}$

De plus :

$$\sup A_1 = 4 \notin A_1 \quad \Longrightarrow \quad \max A_1 \text{ n'existe pas.}$$
$$\sup A_2 = 1 \in A_2 \quad \Longrightarrow \quad \max A_2 = 1.$$

$$\sup(A) = \sup(A_1 \cup A_2) = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \max(4, 1) = 4.$$

Donc $\max A$ n'existe pas.

$$\inf A_1 = 2 \in A_1 \quad \Longrightarrow \quad \min A_1 = 2.$$
$$\inf A_2 = 0 \notin A_2 \quad \Longrightarrow \quad \min A_2 \text{ n'existe pas.}$$

$$\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \min(2, 0) = 0 \notin A,$$

Donc $\min A$ n'existe pas.

## Exemples et Exercices supplémentaires ( Pour les étudiants)

**Exemple**

Soient $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$.

a) Calculer $\inf(A \cap B)$ et $\max(\inf A, \inf B)$.

b) Calculer $\sup(A \cap B)$ et $\min(\sup A, \sup B)$.

**Corrigé.**

**Remarque**

On rappelle que

$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B) \qquad \text{et} \qquad \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

Soit $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$.
**a) Calculer** $\inf(A \cap B)$ **et** $\max(\inf A, \inf B)$**.**
On a $A \cap B = \{1, 2\}$, donc $\inf(A \cap B) = 1$.
Or $\inf A = -1$, $\inf B = 0$, donc $\max(\inf A, \inf B) = 0$. On vérifie bien

$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B).$$

**b) Calculer** $\sup(A \cap B)$ **et** $\min(\sup A, \sup B)$**.**
$\sup(A \cap B) = 2$. Or $\sup A = 3$, $\sup B = 4$, donc $\min(\sup A, \sup B) = 3$. On vérifie bien

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

**Remarque**

**Borne supérieure d'une union et d'une intersection**

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B) \qquad \text{et} \qquad \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

**Pourquoi l'union donne une égalité**

$A \cup B$ contient tous les éléments de $A$ et tous ceux de $B$ : rien n'est perdu.

— $\max(\sup A, \sup B)$ majore $A \cup B$.

— Tout majorant de $A \cup B$ majore $A$ et $B$, donc il est $\geq \sup A$ et $\geq \sup B$, donc $\geq \max(\sup A, \sup B)$.

D'où l'égalité.

**Exemple**

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 5\}$. Alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$, donc

$$\sup(A \cup B) = 5 = \max(3, 5).$$

**Pourquoi l'intersection ne donne qu'une inégalité**

$A \cap B$ ne garde que les éléments communs : l'ensemble peut se réduire beaucoup. On a $A \cap B \subset A$, donc $\sup(A \cap B) \leq \sup A$ ; de même $\sup(A \cap B) \leq \sup B$. Donc

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B).$$

Pour avoir l'égalité, il faudrait que $\min(\sup A, \sup B)$ soit atteint (ou approché) par un élément *commun* aux deux ensembles, ce qui n'est pas garanti.

**Exemple 1 (inégalité stricte)**

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 4\}$.

- $A \cap B = \{1, 2\}$, donc $\sup(A \cap B) = 2$.
- $\min(\sup A, \sup B) = \min(3, 4) = 3$.
- On a $2 < 3$ : le nombre 3 est dans $A$ mais pas dans $B$, donc il disparaît dans l'intersection.

**Exemple 2 (inégalité stricte)**

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 5\}$.

- $A \cap B = \{1\}$, donc $\sup(A \cap B) = 1$.
- $\min(\sup A, \sup B) = \min(3, 5) = 3$.
- On a $1 < 3$.

**Exemple 3 (égalité possible)**

Soient $A = [0, 3]$ et $B = [2, 5]$.

- $A \cap B = [2, 3]$, donc $\sup(A \cap B) = 3$.
- $\min(\sup A, \sup B) = \min(3, 5) = 3$.
- Ici l'égalité a lieu, car 3 appartient aux deux ensembles.

**Attention (cas extrême)**

Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{3, 4\}$, alors $A \cap B = \emptyset$ : il n'y a plus de borne supérieure, alors que $\min(\sup A, \sup B) = \min(2, 4) = 2$.

**Exemple supplémentaire sur les nomres irrationnels**

Montrer que $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont irrationnels.

**Corrigé.**

**1) Montrons que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \qquad \text{et} \qquad p \wedge q = 1.$$

Alors $p = \sqrt{3}\, q$, donc $p^2 = 3q^2$, c'est-à-dire

$$p \cdot p = 3 \cdot q \cdot q. \tag{$*$}$$

Ainsi 3 divise $p \cdot p$ et 3 est premier, donc, d'après le théorème d'Euclide, $3 \mid p$ (autrement dit $p$ est un multiple de 3). Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 3k$. En remplaçant dans $(*)$ :

$$9k^2 = 3q^2 \implies 3k^2 = q^2 \implies 3 \mid q^2.$$

Comme 3 est premier, $3 \mid q$.

On obtient que 3 divise à la fois $p$ et $q$, ce qui contredit $p \wedge q = 1$.

**Conclusion :** $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

**2) Montrons que $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ tels que

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b} \qquad \text{et} \qquad a \wedge b = 1.$$

Alors $a = \sqrt{6}\, b$, donc

$$a^2 = 6b^2 = 2\,(3b^2), \qquad \text{soit} \qquad a \cdot a = 2\,(3b^2). \tag{$*$}$$

**Attention**

6 n'est pas premier : le théorème d'Euclide ne s'applique pas directement à 6. On l'applique à 2.

Ainsi $2 \mid a^2$ et 2 est premier, donc $2 \mid a$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. En remplaçant dans $(*)$ :

$$4k^2 = 2\,(3b^2) \implies 2k^2 = 3b^2.$$

Cela signifie que $2 \mid 3b^2$. Or $2 \wedge 3 = 1$, donc $2 \mid b^2$, et comme 2 est premier, d'après le théorème d'Euclide, $2 \mid b$.

Ainsi 2 est un diviseur commun de $a$ et $b$, ce qui contredit $a \wedge b = 1$.

**Conclusion :** $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

**3) Montrons que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.** Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ : soit $m \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = m$ (on a $m > 0$, donc $m \neq 0$). Alors

$$\sqrt{2} = m - \sqrt{3} \implies 2 = (m - \sqrt{3})^2 \implies 2 = m^2 + 3 - 2\sqrt{3}\, m.$$

On isole $\sqrt{3}$ :

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2m}\left[m^2 + 3 - 2\right] = \frac{m^2 + 1}{2m} \in \mathbb{Q}.$$

Ceci implique $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit la question 1).

**Conclusion :** $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.