Processus, temps d'arrêt et mouvement brownien

1. Rappels : processus, filtrations, temps d'arrêt

On travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. L'ensemble des temps T est soit $\mathbb{N}$ (temps discret), soit $[0, +\infty[$ (temps continu).

1.1 Processus stochastique

Définition. Un processus stochastique réel est une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires réelles définies sur Ω.

- À t fixé, X_t est une variable aléatoire.
- À ω fixé, l'application $t \mapsto X_t(\omega)$ est la **trajectoire** associée à ω.
- La **loi** du processus est déterminée par ses **lois fini-dimensionnelles** : les lois des vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, pour tout n et tous $t_1 < \cdots < t_n$.

Deux notions d'égalité.

- Y est une **modification** de X si, pour chaque t, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.
- X et Y sont **indistinguables** si $\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ pour tout } t) = 1$.

Indistinguables implique modification. La réciproque est vraie si X et Y ont des trajectoires continues : on a l'égalité simultanée sur les rationnels (réunion dénombrable d'ensembles négligeables), puis partout par continuité.

1.2 Filtration et processus adapté

Définition. Une filtration $(\mathcal{F}_t)$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$: si $s \leq t$, alors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information disponible à l'instant t.

- **Filtration naturelle** de X : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$, l'information donnée par la trajectoire jusqu'à t.
- X est **adapté** à $(\mathcal{F}_t)$ si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t. Tout processus est adapté à sa filtration naturelle.
- **Conditions habituelles** : $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables, et la filtration est continue à droite, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. On les suppose dès qu'elles sont utiles.

1.3 Temps d'arrêt

Définition. Une variable $\tau : \Omega \to [0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si, pour tout t,

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

En temps discret, c'est équivalent à $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout n. Intuition : à chaque instant t, on sait dire si τ est déjà survenu, sans regarder le futur.

Exemples.

1. Une constante $\tau = c$ est un temps d'arrêt : $\{\tau \leq t\}$ vaut $\emptyset$ ou Ω.
2. **Temps d'atteinte.** Si X est continu et adapté et si F est un fermé, $\tau_F = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$ est un temps d'arrêt (preuve dans un cas particulier à l'exercice 5).
3. **Contre-exemple.** Le dernier zéro avant 1, $L = \sup\{t \leq 1 : X_t = 0\}$, n'est en général pas un temps d'arrêt : pour savoir si $L \leq t$, il faut savoir que X ne s'annule plus entre t et 1, donc connaître le futur.

Propriétés. Si σ et τ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ et $\tau + s$ ($s \geq 0$ constant) sont des temps d'arrêt (exercice 5). En revanche $\tau - 1$ n'en est pas un en général : il « anticipe » τ d'une unité de temps.

Tribu des événements antérieurs à τ.

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \,:\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ pour tout } t\}$$

- Si $\sigma \leq \tau$, alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
- Si X est continu et adapté, la variable X_τ (définie sur $\{\tau < \infty\}$) est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

2. Le mouvement brownien

Le mouvement brownien est le processus gaussien continu le plus simple ; son existence est **admise** (Wiener, 1923), sans construction dans ce cours.

2.1 Définition

Définition. Un processus réel $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un **mouvement brownien standard** si :

1. $B_0 = 0$ p.s. ;
2. **accroissements indépendants** : pour $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables $B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;
3. **accroissements gaussiens stationnaires** : pour $s < t$, $B_t - B_s$ suit la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$;
4. les trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ sont continues p.s.

Par rapport à une filtration. B est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien s'il est adapté à $(\mathcal{F}_t)$ et si, pour $s < t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$. Un mouvement brownien est toujours un $(\mathcal{F}_t^B)$-mouvement brownien.

2.2 Caractérisation gaussienne

Proposition. B est un mouvement brownien si et seulement si B est un processus gaussien centré, à trajectoires continues, de covariance

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t = \min(s, t).$$

Preuve du sens direct. L'idée est d'exprimer les valeurs $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$ à l'aide des accroissements, qui sont gaussiens et indépendants.

Étape 1 : télescopage. On prend $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, on utilise $B_{t_0} = B_0 = 0$ et on note $\Delta_j = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ pour $j = 1, \dots, n$. Pour chaque k, les termes intermédiaires se simplifient deux à deux :

$$B_{t_k} = \left(B_{t_1} - B_{t_0}\right) + \left(B_{t_2} - B_{t_1}\right) + \cdots + \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k.$$

Étape 2 : écriture matricielle. Pour $n = 3$, par exemple : $B_{t_1} = \Delta_1$, $B_{t_2} = \Delta_1 + \Delta_2$, $B_{t_3} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$, soit

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ B_{t_2} \\ B_{t_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}.$$

En général, le vecteur $\left(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}\right)$ est l'image du vecteur des accroissements $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ par la matrice triangulaire inférieure remplie de 1 : c'est ce que signifie « transformation linéaire ».

Étape 3 : conclusion. Les Δ_j sont indépendants, de lois $\mathcal{N}\left(0, t_j - t_{j-1}\right)$: le vecteur $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ est donc gaussien. L'image linéaire d'un vecteur gaussien est un vecteur gaussien. Donc $\left(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}\right)$ est gaussien, pour tout choix des instants : B est un processus gaussien.

Remarque. Cette matrice a pour déterminant 1 ; elle est inversible, et l'inverse se lit directement : $\Delta_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$. Les deux vecteurs contiennent donc la même information ; on s'en sert dans le sens réciproque ci-dessous.

Calcul de la covariance. Pour $s \le t$, on écrit $B_t = B_s + (B_t - B_s)$, avec $B_t - B_s$ indépendant de B_s et centré :

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s^2] + \mathbb{E}[B_s]\,\mathbb{E}[B_t - B_s] = s + 0 = s.$$

Sens réciproque. Un vecteur gaussien est déterminé par sa moyenne et sa covariance ; on vérifie que les accroissements sont non corrélés, donc indépendants (car gaussiens). Par exemple, pour $s < t \le u < v$: $\mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_v - B_u)] = t - t - s + s = 0$.

Cette caractérisation est l'outil principal pour montrer qu'un nouveau processus est un mouvement brownien (§ 2.4).

2.3 Lois et moments

La densité de B_t $(t > 0)$ est le noyau de la chaleur :

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-x^2/(2t)}.$$

Pour $0 < t_1 < \cdots < t_n$, avec $t_0 = 0$ et $x_0 = 0$, la densité du vecteur $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ est :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1}).$$

Moments usuels (Z désigne une $\mathcal{N}(0,1)$, et B_t a même loi que $\sqrt{t}\,Z$) :

Quantité	Valeur	Justification
$\mathbb{E}[B_t]$	0	loi centrée
$\mathbb{E}[B_t^2]$	t	variance
$\mathbb{E}[B_t^3]$	0	loi symétrique
$\mathbb{E}[B_t^4]$	$3t^2$	$\mathbb{E}[Z^4] = 3$
$\mathbb{E}\lvert B_t\rvert$	$\sqrt{2t/\pi}$	$\mathbb{E}\lvert Z\rvert = \sqrt{2/\pi}$
$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t}\right]$	$e^{\lambda^2 t/2}$	transformée de Laplace gaussienne

2.4 Invariances

Si B est un mouvement brownien, chacun des processus suivants en est encore un.

Transformation	Processus	Vérification de la covariance
Symétrie	$-B_t$	$(-1)^2(s \wedge t) = s \wedge t$
Changement d'échelle ($c > 0$)	$c^{-1/2} B_{ct}$	$c^{-1}(cs \wedge ct) = s \wedge t$
Translation ($s_0 \geq 0$ fixé)	$B_{s_0+t} - B_{s_0}$	accroissements de B ; indépendant de $\mathcal{F}_{s_0}$
Inversion du temps	$t\,B_{1/t}$ pour $t > 0$, et 0 en $t = 0$	$st\,(1/s \wedge 1/t) = st/(s \vee t) = s \wedge t$
Retournement sur $[0, T]$	$B_T - B_{T-t}$, $0 \leq t \leq T$	calcul analogue

Dans chaque cas le processus est gaussien centré et continu sur $]0, +\infty[$. Pour l'inversion du temps, la continuité en 0 découle de la loi des grands nombres brownienne : $B_t/t \to 0$ p.s. quand $t \to \infty$ (admis).

2.5 Propriétés de Markov et principe de réflexion

Markov simple. Pour $s \geq 0$ fixé, $W_t = B_{s+t} - B_s$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$: « le mouvement recommence à neuf à chaque instant ».

Markov fort (admis). C'est encore vrai en un temps d'arrêt τ fini p.s. : $W_t = B_{\tau+t} - B_\tau$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Principe de réflexion. Soit $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$. Pour $a > 0$:

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = 2\,\mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a).$$

Idée : après le premier passage en a (temps d'arrêt τ_a), on symétrise la trajectoire par rapport à a grâce à Markov fort ; une trajectoire qui atteint a finit au-dessus ou au-dessous de a avec la même probabilité. Donc S_t a la même loi que $|B_t|$ (exercice 7).

2.6 Régularité des trajectoires

Les trajectoires sont continues, mais très irrégulières. Presque sûrement :

- elles sont **nulle part dérivables** (Paley, Wiener, Zygmund, 1933) ;
- elles sont höldériennes d'ordre α pour tout $\alpha < 1/2$, mais pas d'ordre $1/2$;
- elles ne sont à **variation bornée** sur aucun intervalle ;
- $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$: B repasse une infinité de fois par chaque niveau.

Variation quadratique. Pour une subdivision $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, de pas $|\pi| = \max_i (t_i - t_{i-1})$, on pose :

$$Q_\pi = \sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \quad \underset{|\pi|\to 0}{\overset{L^2}{\to}} \quad t.$$

Preuve. Posons $h_i = t_i - t_{i-1}$. Les termes $\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2$ sont indépendants, d'espérance h_i et de variance $2h_i^2$ (car $\mathrm{Var}(Z^2) = \mathbb{E}[Z^4] - 1 = 2$). Donc $\mathbb{E}[Q_\pi] = \sum_i h_i = t$ et

$$\mathbb{E}[(Q_\pi - t)^2] = \mathrm{Var}(Q_\pi) = 2\sum_i h_i^2 \le 2\,|\pi| \sum_i h_i = 2t\,|\pi| \;\to\; 0.$$

C'est la formule heuristique « $(dB_t)^2 = dt$ », qui fonde le calcul d'Itô.

3. Lien avec le bruit blanc

Le bruit blanc est, formellement, la « dérivée » du mouvement brownien : $\xi_t = dB_t/dt$. Cette dérivée n'existe pas au sens usuel ; elle a un sens rigoureux comme **dérivée au sens des distributions**, c'est-à-dire comme processus généralisé.

3.1 Le bruit blanc discret

Une suite (ε_k) de variables i.i.d. centrées de variance 1 est un **bruit blanc discret** : $\mathbb{E}[\varepsilon_j \varepsilon_k] = 1$ si $j = k$, et 0 sinon. Ses sommes partielles $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ forment une marche aléatoire.

Renormalisée, cette marche converge en loi vers le mouvement brownien (théorème de Donsker, admis) :

$$\left(1/\sqrt{n}\; S_{\lfloor nt \rfloor}\right)_{t\ge 0} \quad \underset{n\to\infty}{\overset{\text{loi}}{\to}} \quad (B_t)_{t\ge 0}.$$

Réciproquement, les accroissements du brownien sur une grille de pas h donnent un bruit blanc discret gaussien : les variables $Z_k = \big(B_{kh} - B_{(k-1)h}\big)/\sqrt{h}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Message : **brownien = somme (intégrale) du bruit blanc ; bruit blanc = accroissements du brownien.**

3.2 Pourquoi la dérivée n'existe pas

Ce paragraphe montre, par le calcul, pourquoi dB_t/dt n'existe pas comme une fonction ordinaire, et ce qu'elle devient à la limite : le bruit blanc.

Étape 1 : l'idée. Si B était dérivable en t, le taux d'accroissement $X_t^h = (B_{t+h} - B_t)/h$ convergerait vers un nombre fini $B'(t)$ quand $h \to 0$; il resterait en particulier borné. On va voir qu'au contraire il explose.

Étape 2 : la loi du taux d'accroissement. L'accroissement $B_{t+h} - B_t$ suit $\mathcal{N}(0, h)$. Diviser une variable par h divise sa variance par h^2 : X_t^h suit donc $\mathcal{N}(0, h/h^2) = \mathcal{N}(0,1/h)$, et

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t^h\right)^2\right] = \frac{1}{h} \to +\infty \quad \text{quand } h \to 0.$$

Plus on regarde petit, plus la « pente » typique est grande.

Intuition. Pour une fonction dérivable, $f(t+h) - f(t) \approx f'(t)\,h$ est de l'ordre de h. Pour le brownien, l'accroissement est de l'ordre de $\sqrt{h}$ (son écart-type), beaucoup plus grand que h quand h est petit : pour $h = 0{,}0001$, $\sqrt{h} = 0{,}01$, cent fois plus. Le rapport $\sqrt{h}/h = 1/\sqrt{h}$ tend vers l'infini.

En probabilité. Pour tout seuil $M > 0$, $\mathbb{P}\big(|X_t^h| \le M\big) = \mathbb{P}\big(|Z| \le M\sqrt{h}\big) \to 0$: la pente dépasse n'importe quelle borne. L'exercice 9 (question 3) en déduit rigoureusement que, p.s., B n'est pas dérivable en t.

Étape 3 : la covariance entre deux instants. Soit $s \le t$. X_s^h et X_t^h sont construits sur les intervalles $[s, s+h]$ et $[t, t+h]$.

Règle clé : la covariance de deux accroissements browniens est égale à la longueur de leur partie commune. En effet, on découpe chaque accroissement en un morceau commun et des morceaux propres ; les morceaux portés par des intervalles disjoints sont indépendants et centrés, et il ne reste que la variance du morceau commun, égale à sa longueur.

- Si $t - s \ge h$, les intervalles sont disjoints : les accroissements sont indépendants, la covariance est nulle.
- Si $t - s < h$, ils se recouvrent sur une longueur $h - (t-s)$; en divisant par $h \times h$, la covariance de X_s^h et X_t^h vaut $\big(h - (t-s)\big)/h^2$.

Les deux cas se résument en une seule formule :

$$\mathrm{Cov}\big(X_s^h, X_t^h\big) = \frac{(h - |t-s|)^+}{h^2} =: \rho_h(t-s).$$

Exemple : pour $t - s = h/2$, le recouvrement vaut $h/2$ et la covariance $(h/2)/h^2 = 1/(2h)$.

Étape 4 : le triangle qui devient un Dirac. La fonction $u \mapsto \rho_h(u)$ dessine un triangle :

- de base $[-h, h]$, car elle est nulle dès que $|u| \geq h$;
- de hauteur $\rho_h(0) = h/h^2 = 1/h$, atteinte en $u = 0$;
- d'aire $\frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur $= \frac{1}{2} \times 2h \times \frac{1}{h} = 1$, quel que soit h.

Quand $h \to 0$, le triangle devient de plus en plus étroit et de plus en plus haut, mais son aire reste égale à 1 : c'est exactement une suite qui converge vers la masse de Dirac δ_0 au sens des distributions. D'où la définition formelle :

$$\mathbb{E}[\xi_s \, \xi_t] = \delta(t - s).$$

Étape 5 : ce que cela dit du bruit blanc. À la limite, le « processus » $\xi = dB/dt$ aurait des valeurs non corrélées en deux instants différents (covariance nulle dès que $s \neq t$), une variance infinie en chaque instant (la hauteur $1/h$ explose), et une « masse totale » de covariance égale à 1 (l'aire du triangle). Aucune fonction ordinaire ne vérifie cela : le bruit blanc n'a pas de valeur en un instant précis. On ne peut le manipuler qu'à travers des moyennes contre des fonctions test $\langle \xi, \varphi \rangle$: c'est l'objet du § 3.4.

3.3 Pourquoi « blanc »

La densité spectrale d'un processus stationnaire est la transformée de Fourier de sa covariance. Pour le bruit blanc, la covariance est δ, dont la transformée de Fourier est constante : toutes les fréquences ont le même poids, comme toutes les couleurs dans la lumière blanche.

3.4 Le bruit blanc comme dérivée du brownien au sens des distributions

On ne cherche pas la valeur de ξ en un instant t (elle n'existe pas), mais sa « moyenne pondérée » contre une fonction test.

Définition. Soit φ une fonction de classe C^1, nulle en dehors d'un intervalle $[\alpha, \beta] \subset]0, +\infty[$. On pose, trajectoire par trajectoire,

$$\langle \xi, \varphi \rangle := -\int_0^\infty B_t \; \varphi'(t) \, dt.$$

C'est une intégrale de Riemann ordinaire d'une fonction continue. Elle imite l'intégration par parties $\int B'\varphi = -\int B\varphi'$, qu'on écrirait si B était dérivable : c'est exactement la définition de la dérivée au sens des distributions.

Proposition. $\langle \xi, \varphi \rangle$ est une variable gaussienne centrée et, pour deux fonctions test φ et ψ,

$$\mathbb{E}[\langle \xi, \varphi \rangle \, \langle \xi, \psi \rangle] = \int_0^\infty \varphi \, (t) \, \psi(t) \, dt.$$

Preuve. Caractère gaussien : $\langle \xi, \varphi \rangle$ est limite de sommes de Riemann, combinaisons linéaires de valeurs de B, donc gaussiennes centrées ; une limite (p.s. et dans L^2) de gaussiennes centrées est gaussienne centrée.

Covariance : par Fubini,

$$\mathbb{E}[\langle \xi, \varphi \rangle \langle \xi, \psi \rangle] = \int_0^\infty \int_0^\infty (s \wedge t)\ \varphi'(s)\, \psi'(t)\, ds\, dt.$$

Notons $\Psi(s) = \int_0^s \psi\,(u)\, du$. À s fixé, en coupant l'intégrale en $t = s$ et en intégrant par parties ($\psi(0) = 0$, ψ nulle à l'infini) :

$$\int_0^\infty (s \wedge t)\ \psi'(t)\, dt = \int_0^s t\ \psi'(t)\, dt + s \int_s^\infty \psi\,'(t)\, dt = [s\psi(s) - \Psi(s)] - s\psi(s) = -\Psi(s).$$

Il reste $-\int_0^\infty \varphi\,'(s)\, \Psi(s)\, ds$. Une dernière intégration par parties (φ nulle hors de $[\alpha, \beta]$, $\Psi' = \psi$) donne $\int_0^\infty \varphi\,(s)\, \psi(s)\, ds$.

Lecture. C'est la version rigoureuse de $\mathbb{E}[\xi_s \xi_t] = \delta(t - s)$: formellement, $\iint \varphi(s)\, \psi(t)\, \delta(t - s)\, ds\, dt = \int \varphi\psi$. Trois conséquences :

- $\mathrm{Var}\langle \xi, \varphi \rangle = \int \varphi^2$ est finie, alors que la « variance de ξ_t » est infinie (§ 3.2).
- Si φ et ψ ont des supports disjoints, $\int \varphi\psi = 0$, et le couple gaussien $(\langle \xi, \varphi \rangle, \langle \xi, \psi \rangle)$ est formé de variables indépendantes : le bruit blanc n'a aucune mémoire.
- En approchant l'indicatrice $\mathbf{1}_{[0,t]}$ par des fonctions test, on retrouve formellement $B_t = \int_0^t \xi_u\ du$: le brownien est la primitive du bruit blanc.

L'intégration contre des fonctions générales (et plus seulement des fonctions test régulières) sera traitée la semaine prochaine.

3.5 Pourquoi c'est utile : les équations différentielles bruitées

En physique, une particule soumise à un frottement et à des chocs aléatoires suit l'équation de Langevin, avec un frottement $\gamma > 0$ et une intensité de bruit $\sigma > 0$:

$$\frac{dV_t}{dt} = -\gamma V_t + \sigma\, \xi_t \quad \Rightarrow \quad dV_t = -\gamma V_t\, dt + \sigma\, dB_t.$$

La forme de droite, qui n'utilise que dB, a un sens rigoureux : c'est une équation différentielle stochastique (le processus d'Ornstein-Uhlenbeck). Le passage du bruit blanc ξ au mouvement brownien B est précisément ce qui permet de rendre ces modèles rigoureux ; c'est l'objet du calcul stochastique des semaines suivantes.

4. Exercices

Dans tous les exercices, B est un mouvement brownien standard, $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle, Z une variable $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition. Valeur utile : $\Phi(1) \approx 0{,}8413$.

Exercice 1 — Calculs de lois

1. Donner la loi de $B_s + B_t$ pour $s \leq t$, puis celle de $B_1 + B_2$.
2. Calculer $\mathbb{P}(B_4 > 2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(B_1 > 0, B_2 > 0)$.
4. Pour $0 \leq s \leq t$, calculer $\mathbb{E}[B_s^2 B_t^2]$, puis $\mathrm{Cov}(B_s^2, B_t^2)$.

Exercice 2 — Conditionnement et pont brownien

1. Pour $s \leq t$, calculer $\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s]$.
2. Pour $0 < s < t$, montrer que $B_s - \frac{s}{t} B_t$ est indépendant de B_t. En déduire $\mathbb{E}[B_s \mid B_t]$ et la loi conditionnelle de B_s sachant B_t.
3. On pose $\beta_t = B_t - tB_1$ pour $t \in [0,1]$ (**pont brownien**). Calculer sa covariance et montrer que β est indépendant de B_1.

Exercice 3 — Invariances

1. Soit $c \neq 0$. Montrer que $X_t = c\, B_{t/c^2}$ est un mouvement brownien.
2. Soient B et B' deux mouvements browniens indépendants. Montrer que $W = (B + B')/\sqrt{2}$ et $W' = (B - B')/\sqrt{2}$ sont deux mouvements browniens indépendants.
3. Soit $X_t = \sqrt{t}\, Z$. Pour chaque t, X_t suit $\mathcal{N}(0, t)$. X est-il un mouvement brownien ?

Exercice 4 — Temps d'arrêt

1. Soient σ et τ deux temps d'arrêt et $s \geq 0$. Montrer que $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ et $\tau + s$ sont des temps d'arrêt.
2. Soit $a > 0$ et $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que τ_a est un temps d'arrêt.

Exercice 5 — Premier temps de passage τ_a

Soit $a > 0$ et $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ (exercice 4).

1. À l'aide du principe de réflexion, calculer $\mathbb{P}(\tau_a \leq t)$. En déduire que $\tau_a < \infty$ p.s.
2. Calculer la densité de τ_a et montrer que $\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty$.
3. Application numérique : probabilité que B atteigne le niveau 1 avant l'instant 1.
4. Montrer que τ_a a même loi que $a^2 \tau_1$, de deux façons : par la densité, puis par l'invariance d'échelle.

Exercice 6 — Loi du maximum

On note $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$.

1. Montrer que S_t a même loi que $|B_t|$, et donner sa densité.
2. Calculer $\mathbb{E}[S_t]$, $\mathbb{E}[S_t^2]$ et $\mathrm{Var}(S_t)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(S_2 \leq 1)$.
4. Montrer directement, par invariance d'échelle, que S_t a même loi que $\sqrt{t}\, S_1$.
5. Montrer que $\mathbb{P}(S_t > 0) = 1$ pour tout $t > 0$. En déduire que, p.s., B prend des valeurs strictement positives sur tout intervalle]0, t].

Exercice 7 — Variation quadratique et variation totale

Sur [0,1], avec la subdivision uniforme $t_k = k/n$, on pose $\Delta_k = B_{k/n} - B_{(k-1)/n}$, $Q_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k|$.

1. Calculer $\mathbb{E}[Q_n]$ et $\mathrm{Var}(Q_n)$.
2. Montrer que $Q_{2^m} \to 1$ p.s. quand $m \to \infty$.
3. En déduire que $V_{2^m} \to +\infty$ p.s. : la trajectoire n'est pas à variation bornée sur [0,1].

Exercice 8 — Bruit blanc

1. **Bruit blanc discret.** Soit $h > 0$ et $Z_k = \left(B_{kh} - B_{(k-1)h}\right)/\sqrt{h}$ pour $k \geq 1$. Montrer que les Z_k sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et exprimer B_{nh} à l'aide des Z_k.
2. **Taux d'accroissement.** Avec $X_t^h = (B_{t+h} - B_t)/h$, démontrer la formule $\mathrm{Cov}\left(X_s^h, X_t^h\right) = (h - |t-s|)^+/h^2$ du § 3.2, puis vérifier que cette fonction de $t - s$ est d'intégrale 1.
3. **Non-dérivabilité en un point.** Soit $t \geq 0$ fixé. Montrer que, pour tout $M > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|X_t^h\right| \leq M\right) \to 0$ quand $h \to 0$. En déduire que, p.s., B n'est pas dérivable en t.
4. **Moyenne temporelle.** Soit $I = \int_0^1 B_t \, dt$ (intégrale de Riemann). Montrer que I est gaussienne centrée, calculer $\mathrm{Var}(I)$ et $\mathrm{Cov}(I, B_1)$, puis montrer que $I - B_1/2$ est indépendant de B_1.
5. **Absence de mémoire.** Montrer que B_1 et $2B_{1/2} - B_1$ sont indépendants, et interpréter à l'aide du bruit blanc.

Références

Références classiques :

- N. Wiener, « Differential space », *Journal of Mathematics and Physics* 2 (1923), 131–174 — existence du mouvement brownien.
- R. E. A. C. Paley, N. Wiener, A. Zygmund, « Notes on random functions », *Mathematische Zeitschrift* 37 (1933), 647–668 — non-dérivabilité des trajectoires.
- M. D. Donsker, « An invariance principle for certain probability limit theorems », *Memoirs of the AMS* 6 (1951) — convergence de la marche aléatoire vers le brownien.

- J.-F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, coll. Mathématiques et Applications 71, 2013 — chapitres 2 et 3 pour ce cours, en français.
- D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, 3e éd., 1999.
- I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, GTM 113, 2e éd., 1991.
- P. Mörters, Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge University Press, 2010.
- B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 6e éd., 2003 — motivation par le bruit blanc (chapitres 2 et 3).