Chapitre 2 : Les Nombres complexes

Chapitre 2

Les Nombres complexes

2.1 Définition

Définition

L'ensemble des nombres complexes s'écrit :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1 \right\}.$$

2.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- $a + ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z.
- a est la partie réelle de z, notée $\operatorname{Re} z$.
- b est la partie imaginaire de z, notée $\operatorname{Im} z$.
- Si $\operatorname{Re} z = 0$, alors $z = ib$ est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- Si $\operatorname{Im} z = 0$, alors $z = a$ est un réel.
- Le nombre $\overline{z} = a - ib$ est appelé le **conjugué** de z.

Exemple

Soit $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 + 2i$. Alors $\overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{6}$ et $\overline{z_2} = 2 - 2i$.

2.3 Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

Soit $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- $z = 0 \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$.
- La forme algébrique d'un nombre complexe est unique, donc

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

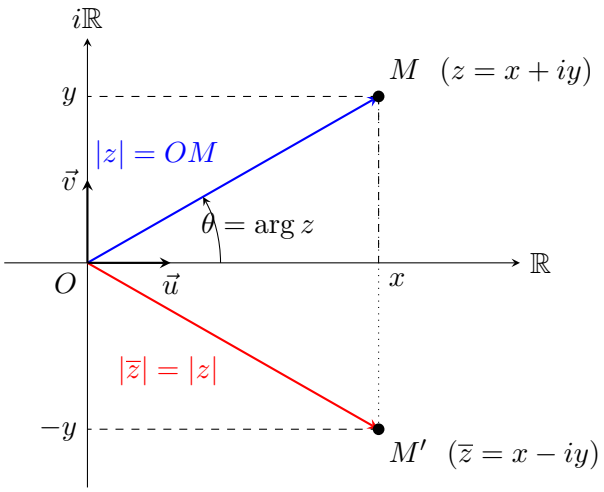
Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. Alors :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2),$$
$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (z_2 \neq 0).$$

2.4 Représentation géométrique

Dans le plan complexe, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ à tout point $M(x, y)$ on peut associer le nombre complexe $z = x + iy$

- z est dit l'**affixe** de M (et du vecteur $\overrightarrow{OM}$) ; M est le **point image** de z.
- L'axe horizontal porte les nombres réels ($\operatorname{Im} z = 0$) ; l'axe vertical porte les imaginaires purs ($\operatorname{Re} z = 0$).
- **Module :** $|z|$ est la longueur du segment $[OM]$, soit $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Argument :** $\arg z$ est une mesure, en radians, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, compté dans le sens direct (trigonométrique).
- **Conjugué :** $\overline{z} = x - iy$ est l'affixe du point M', symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



2.5 Propriétés du conjugué

Proposition

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$
- $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$

Attention (important)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R} \text{ (réel pur)}, \qquad z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R} \text{ (imaginaire pur)}.$$

2.6 Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le **module** de z est le nombre réel positif noté $|z|$, avec

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Proposition (propriétés du module)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|-z| = |z|$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \quad (z \neq 0)$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $|z \cdot z'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Remarque

- $AB = |z_B - z_A|$ est la distance entre z_B et z_A.
- $|z| = |z - 0|$ est la distance entre z et l'origine.

Exemple

Pour $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2 + 2i$: $|z_1| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8}$, $|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$, et $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = 1$.

2.7 Argument d'un nombre complexe

Définition (argument)

Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'**argument** de z, noté $\arg z$, est l'angle (en radians) entre le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et l'axe des réels positifs dans le plan complexe.

Il n'est pas unique : on peut ajouter ou soustraire n'importe quel multiple de 2π :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{ou} \qquad \arg z = \theta\ [2\pi] \quad (\theta \text{ modulo } 2\pi).$$

Définition (argument principal)

L'**argument principal**, noté $\mathrm{Arg}(z)$, est l'unique argument choisi dans l'intervalle

$$\mathrm{Arg}\, z \in]-\pi, \pi].$$

Si $\theta = \arg(z)$, alors θ vérifie

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \qquad \text{avec } |z| \neq 0.$$

2.8 Forme trigonométrique – Forme exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Définition (forme trigonométrique)

La forme trigonométrique de z est

$$z = r\,[\cos\theta + i\sin\theta] = |z|\,\big[\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\big].$$

Définition (forme exponentielle ou d'Euler)

$$z = r\,e^{i\theta} = |z|\,e^{i\arg(z)}.$$

Théorème (Formule de Moivre)

Pour tout entier relatif n et tout réel θ, on a

$$\big[\cos\theta + i\sin\theta\big]^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Théorème (Formules d'Euler)

Pour tout réel θ :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

d'où

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Remarque (résultats importants)

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n \big[\cos\theta + i\sin\theta\big]^n \\ &= |z|^n \big[\cos n\theta + i\sin n\theta\big] && \text{(formule de Moivre)} \\ &= |z|^n\, e^{in\theta} && \text{(formule d'Euler).} \end{aligned}$$

2.9 Cas particuliers

Dans tout ce paragraphe, $a > 0$ et $b > 0$ sont des réels, et $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

	Forme algébrique	**Argument**	**Forme trigonométrique**	**Forme exponentielle**
$z \in \mathbb{R}$	$z = a$	$\theta = 0\ [2\pi]$	$z = a\,[\cos 0 + i \sin 0]$	$z = a\, e^{i0}$
	$z = -a$	$\theta = \pi\ [2\pi]$	$z = a\,[\cos \pi + i \sin \pi]$	$z = a\, e^{i\pi}$
$z \in i\mathbb{R}$	$z = bi$	$\theta = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$	$z = b\left[\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2}\right]$	$z = b\, e^{i\pi/2}$
	$z = -bi$	$\theta = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$	$z = b\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$	$z = b\, e^{-i\pi/2}$

θ	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

2.10 Propriétés de l'argument

Proposition

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Alors :

- $\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z'$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z = \arg(\overline{z})$
- $\arg z^n = n \arg z$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$
- $z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Exemple — Important (contrôle continu)

On considère les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}, \qquad z_2 = 2 + 2i, \qquad z = \frac{z_1}{z_2}.$$

1) Écrire la forme trigonométrique et exponentielle de z_1, z_2 et z.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ et en déduire la valeur exacte de $z^{2028} + \dfrac{1}{z^{2028}}$.

Corrigé

1) Formes trigonométrique et exponentielle.

- *Pour* $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$. On a $|z_1| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, et

$$\theta = \arg z_1 \iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ainsi $\theta = \operatorname{Arg} z_1 = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right] = 2\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}.$$

- *Pour* $z_2 = 2 + 2i$. On a $|z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\arg z_2 = \dfrac{\pi}{4}$, donc

$$z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right].$$

- *Pour* $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1, \qquad \arg z = \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

Ainsi

$$z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = e^{i\pi/12}.$$

2) Calcul de $z^n + \dfrac{1}{z^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de Moivre,

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + z^{-n} &= \left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]^n + \left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]^{-n} \\ &= \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) + \cos\left(-\frac{n\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Comme cos est paire et sin est impaire,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = \cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12} + \cos\frac{n\pi}{12} - i\sin\frac{n\pi}{12} = 2\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right).$$

Valeur exacte de $z^{2028} + \dfrac{1}{z^{2028}}$.

$$z^{2028} + \frac{1}{z^{2028}} = 2\cos\left(2028\cdot\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos(169\pi) = 2\times(-1) = -2.$$

2.11 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition (racine n-ième)

Pour tout $w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, une **racine n-ième** de w est un nombre complexe z tel que

$$z^n = w.$$

2.11.1 Les racines carrées d'un nombre complexe

On se donne un nombre complexe $w = a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche les nombres complexes $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $z^2 = w$. On sait que

$$z^2 = w \iff \begin{cases} |z^2| = |w| \\ (x+iy)^2 = a+ib \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^2 = |w| \\ x^2 - y^2 + 2ixy = a+ib \end{cases} \quad (\text{car } |z^n| = |z|^n)$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ x^2 - y^2 = a & (\text{car } \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re}\, w) \quad (2) \\ 2xy = b & (\text{car } \mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}\, w) \quad (3) \end{cases}$$

En combinant (1)+(2) et (1)−(2), on obtient :

$$\begin{cases} 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} \\ 2y^2 = -a + \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Remarque

L'équation $2xy = b$ permet de déterminer le signe de x et y selon le signe de b. En effet, si $b > 0$ alors x et y sont de même signe, et si $b < 0$ alors x et y sont de signes opposés.

Exemple 1 (Exercice d'un examen)

Soit $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer x et y tels que $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
"Autrement dit : Déterminer les racines carrées de $(-2 + 2i\sqrt{3})$.

2) En déduire les solutions de $\left(\frac{w+i}{w-i}\right)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$, où w est un nombre complexe.

Corrigé

1) Soit $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = -2 + 2i\sqrt{3} \iff \begin{cases} |z^2| = \left|-2 + 2i\sqrt{3}\right|, \\ (x+iy)^2 = -2 + 2i\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 - y^2 + 2ixy = -2 + 2i\sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, & (1) \\ x^2 - y^2 = -2, & (2) \\ 2xy = 2\sqrt{3}. & (3) \end{cases}$$

En combinant (1)+(2) et (1)−(2), on obtient

$$\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 6 \\ xy = \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm\sqrt{3} \\ x\,y = \sqrt{3} > 0 \end{cases}$$

L'équation $xy = \sqrt{3} > 0$ signifie que x et y sont de même signe.

Conclusion. Les racines carrées de $-2 + 2i\sqrt{3}$ sont $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

2) D'après la question précédente, l'équation $Z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ possède deux solutions z_1 et z_2 déjà déterminées. Il suffit donc de poser $Z = \dfrac{w+i}{w-i}$ et de tirer w en fonction de $Z = z_{1,2}$:

$$Z = \frac{w+i}{w-i} \iff Z(w-i) = w+i \iff w(Z-1) = i(1+Z) \iff w = i\,\frac{1+Z}{Z-1}.$$

En remplaçant Z par z_1 et z_2, on trouve deux solutions :

$$w_1 = i\,\frac{1+z_1}{z_1-1} = i\,\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + i,$$

$$w_2 = i\,\frac{1+z_2}{z_2-1} = i\,\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}\,(2-i\sqrt{3})}{(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})} = \frac{1}{7}\big[-2\sqrt{3}+3i\big] = \frac{-2\sqrt{3}}{7} + \frac{3}{7}\,i.$$

Exemple 2 (Pour les étudiants)

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3-4i$, c'est-à-dire résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 3 - 4i.$$

Corrigé

Soit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$z^2 = 3-4i \iff \begin{cases} |z^2| = |z|^2 = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5 \\ (x+iy)^2 = 3-4i \end{cases} \iff (S)\ \begin{cases} x^2+y^2 = 5 & (1) \\ x^2-y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases}$$

En combinant (1)+(2) et (1)−(2), on obtient

$$\begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \\ x\,y = -2 < 0 \end{cases}$$

L'équation $xy = -2$ signifie que x et y sont de signes opposés. Donc les solutions (x, y) du système (S) sont $(2, -1)$ et $(-2, 1)$.

Conclusion. Les racines carrées de $3 - 4i$ sont $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -2 + i$.

2.11.2 Équation du second degré

Proposition

L'équation du second degré $az^2+bz+c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, possède deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, éventuellement confondues.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ. Alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Remarque

Si on s'autorisait à écrire $\delta = \sqrt{\Delta}$, on obtiendrait la même formule que celle que nous connaissons lorsque a, b, c sont réels.

Exemple 1 (Exercice d'un Contrôle)

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation polynomiale

$$z^2 + z + \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i\right) = 0.$$

Corrigé

1) Détermination des racines carrées de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Soit $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \iff \begin{cases} |z^2| = \left|\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right|, \\ (x+iy)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z|^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \\ x^2 - y^2 + 2ixy = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, & (1) \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{2}, & (2) \\ 2xy = \frac{\sqrt{3}}{2}. & (3) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), on obtient

$$2x^2 = \frac{3}{2},$$

d'où

$$x^2 = \frac{3}{4}.$$

Ainsi,

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De (1), il vient

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

donc

$$y = \pm\frac{1}{2}.$$

Comme $2xy = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$, x et y sont de même signe.
Par conséquent,

$$\begin{cases} & x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2}, \\ \text{ou} & x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Les racines carrées de $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ sont donc

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}.$$

2) Résolution de l'équation

$$z^2 + z + \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i\right) = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 4\left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, les racines carrées de Δ sont : $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.
Les solutions de l'équation sont donc

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1 \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2}.$$

Ainsi,

$$z_1 = \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{4} + \frac{1}{4}i,$$

et

$$z_2 = \frac{-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{2} = -\frac{\sqrt{3} + 2}{4} - \frac{1}{4}i.$$

Par conséquent,

$$\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{3} - 2}{4} + \frac{1}{4}i,\ -\frac{\sqrt{3} + 2}{4} - \frac{1}{4}i\right\}}.$$

Exemple 2 (Pour les étudiants)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1) $z^2 + z + 1 = 0$
2) $2z^2 + 4\sqrt{2}\,z + 3i = 0$.

Corrigé

1) $z^2 + z + 1 = 0$. On a $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$, donc $\delta = i\sqrt{3}$. Les solutions sont donc

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

2) $2z^2 + 4\sqrt{2}\,z + 3i = 0 \quad (E)$.
On a $\Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3i = 32 - 24i = 4\,(8 - 6i)$.
Notons δ une racine carrée de Δ ; donc $\delta = 2 \times$ [racine carrée de $(8 - 6i)$].

Cherchons les racines carrées de $(8 - 6i)$**.** Soit $\omega = x + iy$ tel que $\omega^2 = 8 - 6i$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\omega^2 = 8-6i \iff \begin{cases} |\omega^2| = |8 - 6i| \\ (x + iy)^2 = 8 - 6i \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10 & ① \\ x^2 - y^2 = 8 & ② \\ 2xy = -6 & ③ \end{cases}$$

En combinant ①+② et ①−②, on obtient

$$\begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 2y^2 = 2 \\ xy = -3 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \\ x\,y = -3 < 0 \end{cases}$$

donc x et y sont de signes opposés. Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $\omega_1 = 3 - i$ et $\omega_2 = -3 + i$.
Donc les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = 2\omega_1 = 2(3 - i)$ et $\delta_2 = 2\omega_2 = 2(-3 + i)$.

Conclusion. Les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-4\sqrt{2} - 2(3 - i)}{2 \cdot 2} = -\left(\frac{2\sqrt{2} + 3}{2}\right) + \frac{1}{2}\,i, \qquad z_2 = \frac{-4\sqrt{2} + 2(3 - i)}{2 \cdot 2} = \left(\frac{-2\sqrt{2} + 3}{2}\right) - \frac{1}{2}\,i.$$

2.11.3 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

On se donne un nombre complexe non nul $w = r\,e^{i\theta}$ et n un entier naturel $(n \geq 2)$.
On cherche les nombres complexes $z = \rho\,e^{i\alpha}$ tels que $z^n = w$, avec $r = |w|$, $\rho = |z|$, $\theta = \arg w$ et $\alpha = \arg z$.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe non nul $w = r\,e^{i\theta}$ admet exactement n racines n-ièmes distinctes, de la forme

$$z_k = r^{1/n}\,e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, \mathbf{n\text{-}1}.$$

Preuve

Soient $w = r\,e^{i\theta}$ et $z = \rho\,e^{i\alpha}$ tels que $z^n = w$. Alors

$$z^n = w \iff \left(\rho\,e^{i\alpha}\right)^n = r\,e^{i\theta} \iff \rho^n\,e^{in\alpha} = r\,e^{i\theta}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} = r^{1/n} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Attention

Les n racines n-ièmes ***distinctes*** sont obtenues seulement pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. À partir de $k = n$, on retombe sur les mêmes racines par périodicité. Donc

$$z = r^{1/n}\,e^{\frac{1}{n}(\theta+2k\pi)\,i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Exemple

Calculer les racines cubiques de i.

Corrigé

Déterminer les racines cubiques de i revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = i$.
Rappelons que $|i| = 1$ et $\theta = arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $i = e^{i\pi/2}$.
Cherchons $z = \rho\,e^{i\alpha}$ tel que $z^3 = i$:

$$\rho^3\,(e^{i\alpha})^3 = e^{i\pi/2} \iff \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\alpha = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi k \quad (k = 0, 1, 2) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = i$, qui est l'ensemble des racines cubiques de i, est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ z_k = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)i} \;\middle|\; k = 0, 1, 2 \right\}.$$

- $k = 0$: $z_0 = e^{i\pi/6} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i.$
- $k = 1$: $z_1 = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right)i} = e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,i.$
- $k = 2$: $z_2 = e^{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{9}{6}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i} = e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -i.$

Remarque

L'argument $\dfrac{3\pi}{2}$ n'est pas principal puisqu'il n'appartient pas à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Pour obtenir l'argument principal, on le ramène dans cet intervalle en lui retranchant 2π :

$$\frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, l'argument principal de z_2 est $-\dfrac{\pi}{2}$

Exemple (Pour les étudiants)

Déterminer les racines n-ièmes de 1 (de l'unité)

Corrigé

Les racines n-ièmes de 1 sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Forme exponentielle de 1 : $w = 1 = 1 + 0i$, $|w| = 1$ et $\theta = \arg w$ vérifie $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, soit $\theta = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $1 = e^{0i}$.

Cherchons $z = \rho\, e^{i\alpha}$ tel que $z^n = 1$:

$$z^n = 1 \iff \rho^n\, e^{in\alpha} = 1 \cdot e^{0i} \iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\alpha = 0 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Les n racines n-ièmes distinctes sont données par

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

L'ensemble des solutions de $z^n = 1$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{\frac{2k\pi}{n}i} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}.$$

2.12 Les lieux géométriques et les nombres complexes

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux nombres complexes et R un nombre réel positif. L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant :

- $|z - z_A| = R$ est le **cercle** de centre A et de rayon R.
  En coordonnées, $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2 = R^2$ est l'équation du cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R.
- $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la **médiatrice** du segment $[AB]$.

Exemple

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - 1 + 2i| = 3$.

Corrigé

Soit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} |z - 1 + 2i| = 3 &\iff |x + iy - 1 + 2i| = 3 \iff |(x-1) + i(y+2)| = 3 \\ &\iff \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3 \\ &\iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \\ &\iff (x-1)^2 + \big(y - (-2)\big)^2 = 3^2. \end{aligned}$$

L'ensemble des points vérifiant $|z - 1 + 2i| = 3$ est un cercle de centre $(1, -2)$ et de rayon 3.