Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatique

1ère Année Licence Informatique
2026-2027

Analyse 1
Fiche de TD 2
Les nombres Complexes

Exercice 1.

Soit $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2) Écrire z_1, $\dfrac{(z_1)}{(z_2)}$ et $\dfrac{(z_1)^3}{(z_2)^5}$ sous forme exponentielle et trigonométrique.
3) En déduire $\cos\dfrac{7\pi}{12}$, $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.
4) Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1 + \sqrt{3}\,i)^n$ soit un réel positif.

Exercice 2.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation : $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.
2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que $\left(i \cdot \dfrac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1) Déterminer les racines carrées de :
   a) $z_0 = -3$
   b) $z_1 = 3 + 4i$
   c) $z_2 = i$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$:
   a) $z^2 + z + 1 = 0$
   b) $z^2 - \sqrt{3}\,z - i = 0$
   c) $z^2 + iz - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$
   d) $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 = 3 + 4i$

Exercice 4.

Déterminer les solutions complexes de :

a) $z^3 = \dfrac{1}{4}(-1 + i)$.
b) $z^{25} - 1 = 0$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-2}{z+i}$.

(a) Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
(b) Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Exercice 6. (*Facultatif*)

(a) Calculer les racines carrées de $1 + 2\sqrt{2}\,i$.

(b) Résoudre $z^2 + iz - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Exercice 7. (*Facultatif*)

(a) Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ sous forme algébrique puis trigonométrique.

(b) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 8. (*Facultatif*)

Soit $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(a) Calculer les racines carrées de z.

(b) Donner le module et l'argument de z, et l'écrire sous forme exponentielle.

(c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 9. (*Facultatif*)

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z = \dfrac{(5-i)z + 2(1+i)}{iz + 2}$, avec $z = 2i$.

(b) Écrire z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$ sous forme exponentielle avec $|z_1| > |z_2|$.

Exercice 10. (*Facultatif*)

Trouver les lieux géométriques suivants :

(a) $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) < 1$

(b) $|z - 4 + i| = 1$

(c) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 11. (*Facultatif*)

(a) Montrer que :

$$1 + e^{i\pi/5} + e^{i2\pi/5} + e^{i3\pi/5} + e^{i4\pi/5} = \frac{2}{1 - e^{i\pi/5}}.$$

(b) En déduire les valeurs des sommes :

$$S = \sum_{k=0}^{4} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right), \qquad S' = \sum_{k=0}^{4} \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right).$$