Chapitre I: ELECTROSTATIQUE

L'électrostatique est l'étude des phénomènes créés par des charges électriques à l'état statique et les interactions qu'elles exercent entre elles.

Particules et charges électriques

Les atomes sont constitués de noyaux portant des charges électriques positives (protons) autour desquels tournent les électrons qui portent des charges électriques négatives. Ils existent aussi des particules, les neutrons, qui sont présents dans le noyau des atomes dépourvus de charges.

Les valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International sont :

Electron : $q_e = -e = -1.602\times10^{-19}$ C $\quad m_e = 9.109\times10^{-31}$ kg

Proton : $q_p = +e = 1.602\times10^{-19}$ C $\quad m_p = 1.672\times10^{-27}$ kg

Neutron : $q_n = 0$ C $\quad m_n = 1.674\times10^{-27}$ kg

Dans le Système International des unités, la charge électrique est exprimée en Coulomb (C).

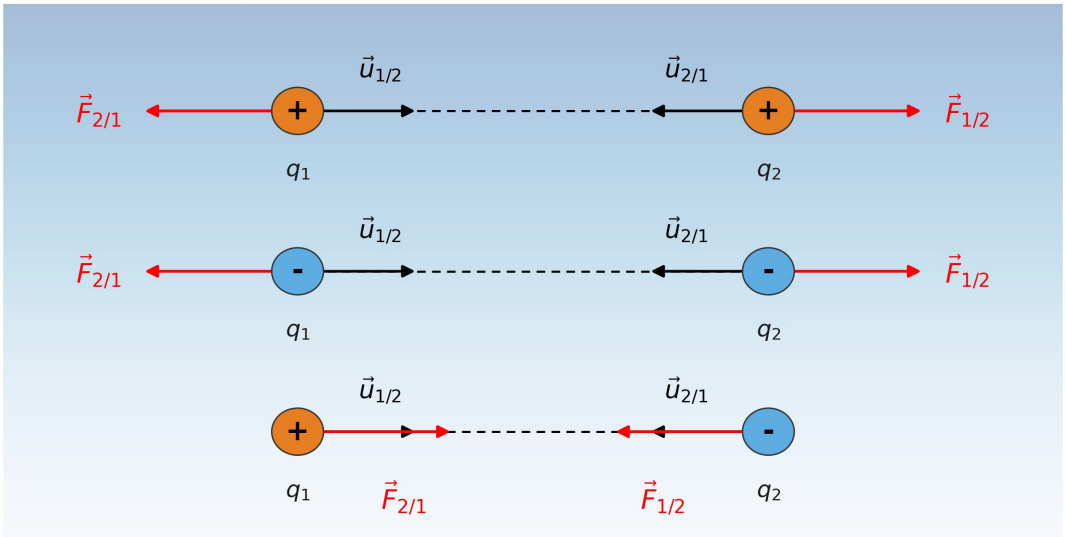
1. Distributions discrètes de charges

Une distribution discrète est utilisée dans le cas où les charges sont situées dans des endroits de l'espace bien déterminés et distantes entres elles.

1.1. Forces électrostatiques : *Loi de Coulomb*

- Attraction et répulsion de deux charges:

Soit deux charges q_1 et q_2 distante de r. Ces charges peuvent être de même signe ou de signe contraire. Il existe deux comportements qui peuvent s'établir entre deux charges électriques : des forces d'attraction ou des forces de répulsion.



Expressions de la force électrostatique :

- La force électrostatique $\vec{F}_{1/2}$ exercée par q_1 sur la charge q_2 est de la forme :

$$\vec{F}_{1/2} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{1/2}$$

- La force électrostatique $\vec{F}_{2/1}$ exercée par q_2 sur la charge q_1 est de la forme :

$$\vec{F}_{2/1} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{2/1}$$

Où :

- K est la constante de Coulomb $\left(K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\times 10^9\ N.m^2/C^2\right)$.
- ε_0 est la permittivité électrique du vide $(\varepsilon_0 = 8.85\times 10^{-12}\ F/m)$.
- $\vec{u}_{1/2}$ est le vecteur unitaire dirigé de q_1 vers q_2.
- $\vec{u}_{2/1}$ est le vecteur unitaire dirigé de q_2 vers q_1 (sachant que $\vec{u}_{1/2} = -\vec{u}_{2/1}$, ce qui représente le principe d'action-réaction de Newton

1.2. Principe de superposition

Si une charge q placée en M est soumise à l'influence de n charges q_1, q_2,……, q_n placées respectivement aux points M_1, M_2,…. M_n. alors la force électrostatique totale exercée sur la charge q s'écrit :

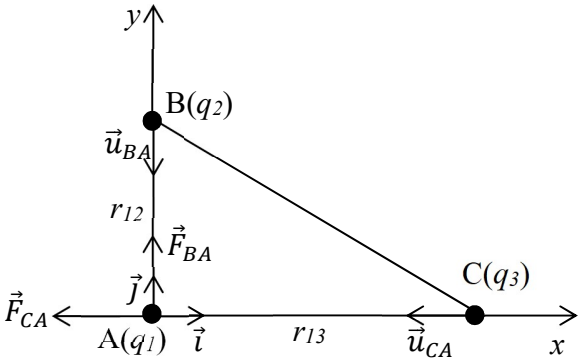
$$\vec{F}_M = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

Exemple: Considérons trois charges q_1, q_2 et q_3 situées aux sommets d'un triangle ABC rectangle en A. Calculer la force qui s'exerce sur la charge q_1, due à la présence des charges q_2 et q_3.
q_1=10µc , q_2= -20µc , q_3=30µc , AB=1m , AC=2m.

Solution

Soit $\vec{F}_{BA}$ la force exercée par la charge q_2 sur q_1
et $\vec{F}_{CA}$ la force exercée par la charge q_3 sur q_1
En utilisant la loi de Coulomb, on obtient:

$$\vec{F}_{BA} = K\frac{q_B q_A}{(BA)^2}\vec{u}_{BA}$$
$$\vec{F}_{CA} = K\frac{q_C q_A}{(CA)^2}\vec{u}_{CA}$$



W.KAZI-TANI

Choisissons un système de coordonnées d'axes *x* et *y* dans lequel on écrit chaque force en fonction de ses composantes et des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (voir la figure).
Donc : $\overrightarrow{u_2} = -\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_3} = -\vec{\imath}$

$$\vec{F}_{BA} = K\frac{q_B q_A}{(BA)^2}(-\vec{\jmath}) = -9\times 10^9 \frac{10\times 10^{-6}\times(-20)\times 10^{-6}}{(1)^2}\vec{\jmath} = 1.8\vec{\jmath}(N)$$
$$\vec{F}_{CA} = K\frac{q_C q_A}{(CA)^2}(-\vec{\imath}) = -9\times 10^9 \frac{10\times 10^{-6}\times 30\times 10^{-6}}{(2)^2}\vec{\imath} = -0.675\vec{\imath}(N)$$

En effectuant la somme vectorielle des deux forces :

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} = -0.675\vec{\imath} + 1.8\vec{\jmath}(N)$$

Le module de cette force est:

$$F = \sqrt{(-0.675)^2 + (1.8)^2} = 1.922\ N$$

Remarques

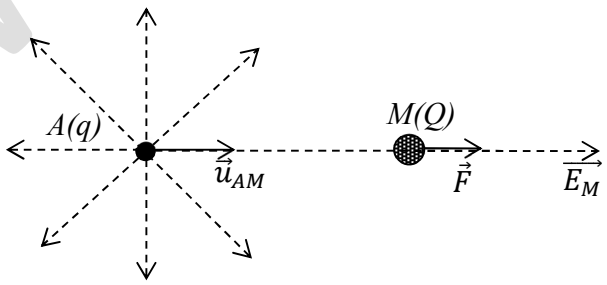
- ✓ La loi de Coulomb n'est valable que pour des charges électriques *immobiles dans le vide*.
- ✓ Cette loi a les mêmes propriétés vectorielles que la loi de l'attraction universelle de Newton($\vec{F} = G\frac{m_A m_B}{(AB)^2}\vec{u}$). La différence fondamentale est que la gravitation est uniquement *attractive.*

1.3. Champ électrostatique

Le champ électrostatique crée au point *M* par la charge *q* placée en *A* est exprimé par la relation :

$$\vec{E}_M = K\frac{q}{(AM)^2}\vec{u}_{AM}$$

$\vec{u}_{AM}$ étant le vecteur unitaire radial.
La charge *q* crée un champ $\vec{E}_M$ dans tout l'espace.



Champ électrostatique dû à la charge q

W.KAZITANI

Le champ électrique est une grandeur vectorielle.

Dans le Système International des unités, le champ électrique est exprimé en Newton par Coulomb (N/C) ou bien en Volt par mètre (V/m).

Le champ électrostatique créé par une distribution ponctuelle de charges

Le champ électrique total créé par un ensemble de n charges q_1, q_2,……, q_n , placées respectivement aux points M_1, M_2,…. M_n , en un point M, s'écrit :

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) + \cdots + \vec{E}_n(M)$$

Relation entre force et champ électrostatique:

Lorsqu'une charge Q est placée en un point M auquel est associé un champ électrostatique $\vec{E}_M$cette charge subit une force :

$$\vec{F}_M = Q\vec{E}_M$$

Remarques

Le champ électrostatique produit par une charge q est:

- ✓ Radial (les lignes de champ sont des demis droites d'origine *q).*
- ✓ Dirigé vers l'extérieur si $q>0$.
- ✓ Dirigé vers l'intérieur si $q<0$.

1.4. Le potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique créé au point M par la charge q placée en A est exprimé par la relation:

$$V_M = K\frac{q}{AM}$$

Le potentiel électrostatique est un scalaire.
Dans le Système International des unités le potentiel électrostatique est exprimé en volt (v).

Le potentiel électrostatique créé par une distribution ponctuelle de charges

Le potentiel électrique total créé par un ensemble de n charges q_1, q_2,……, q_n, placées respectivement aux points M_1, M_2,…. M_n , en un point M, s'écrit :

$$V_M = V_1(M) + V_2(M) + \cdots + V_n(M)$$

Remarques

- ✓ Le potentiel électrostatique est positif si $q>0$

W.KAZI-TANI

- ✓ Le potentiel électrostatique est négatif si $q<0$
- ✓ Le potentiel électrostatique d'une charge q a la même valeur en tous points situés à une même distance r, donc le potentiel est constant sur des sphères de rayon r, et ces sphères constituent des surfaces équipotentielles.
- ✓ *Une surface équipotentielle* est une surface telle que le potentiel électrostatique est identique en tout point.
- ✓ Le champ électrostatique $\vec{E}$ dérive du potentiel V, alors $\vec{E}$ est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

Relation entre le champ est le potentiel électrostatique

La relation entre le champ est le potentiel électrostatique est donnée par :

$$\vec{E}_M = -\overrightarrow{grad}\,V(M)$$

Ce résultat se généralise à tous les systèmes de coordonnées. En coordonnées cartésiennes cette relation signifie :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

On dit que le champ électrostatique $\vec{E}_M$ dérive du potentiel $V(M)$.

2. Distributions continues de charges

Les distributions continues de charges sont caractérisées par une densité moyenne de charges électriques, définie en tout point de l'espace.

2.1. Champ et potentiel électrostatique

Dans les distributions continues de charges, les particules chargées peuvent être réparties uniformément sur une droite ou une surface ou dans un volume. Dans une telle répartition de charges, on calcule le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}(M)$ en un point M créé par une charge élémentaire dq et on remplace la somme vectorielle par une intégrale. Ainsi, le champ électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est:

$$\vec{E}(M) = \int \overrightarrow{dE}(M) \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{dE}(M) = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

De même pour le potentiel :

$$V(M) = \int dV(M) = \int K\frac{dq}{r}$$

On définit alors trois types de répartitions continues :

3.1.1. Distribution linéique

$$dq = \lambda . dl$$

W.KAZI-TANI

dl est un élément infinitésimal du fil
λ est la densité linéique de charge
Le champ et le potentiel électrostatique total créé en un point M par cette distribution de charges est donc :

$$\vec{E}(M) = \int K\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}$$
$$V(M) = \int K\frac{\lambda.dl}{r}$$

3.1.2. Distribution surfacique

$$dq = \sigma.ds$$

ds est un élément de surface infinitésimal
σ :est la densité surfacique de charge
Le champ et le potentiel électrostatique total créé par une distribution surfacique de charge est:

$$\vec{E}(M) = \iint K\frac{\sigma.ds}{r^2}\vec{u}$$
$$V(M) = \iint K\frac{\sigma.ds}{r}$$

3.1.3. Distribution volumique

$$dq = \rho.dV$$

dV*:* élément de volume infinitésimal
ρ : est la densité volumique de charge
dans ce cas on aura :

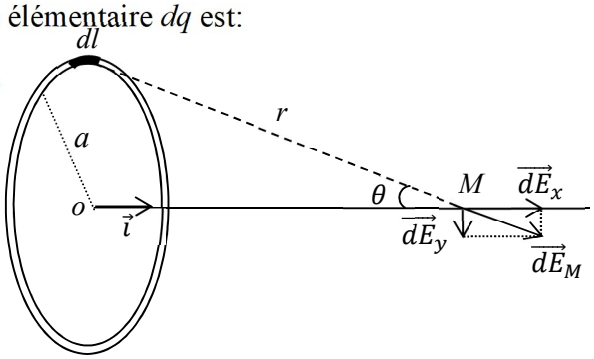
$$\vec{E}(M) = \iiint K\frac{\rho.dV}{r^2}\vec{u}$$
$$V(M) = \iiint K\frac{\rho.dV}{r}$$

2.2. Exemple d'application

Soit une charge q uniformément répartie, avec une densité linéique λ, sur un fil en forme d'anneau de centre O et de rayon a.
Calculer le champ électrostatique produit par le fil au point M situé sur l'axe (ox) à une distance x du centre.

Solution
Calcul du champ électrostatique au point M :
Calculons le champ produit par la charge linéique au point M
Choisissons un petit élément de l'anneau dl qui porte la charge élémentaire dq.
Le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ produit au point M par la charge élémentaire dq est:

$$\overrightarrow{dE} = dE_x\vec{\imath} + dE_y\vec{\jmath}$$



Par raison de symétrie,
le champ total est porté sur l'axe (ox)

W.KAZI-TANI

donc $E_y = 0$ et $\overrightarrow{E_M} = E_x\vec{\imath}$

$$E_x = \int dE_x = \int dE.\cos\alpha = \int K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha$$

avec $dq = \lambda dl$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ et $r = \sqrt{x^2 + a^2}$

$$E_x = \int_0^{2\pi} K\frac{\lambda.dl}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E_x = K\frac{\lambda x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} dl$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda x}{(x^2+a^2)^{3/2}}2\pi a$$

$$E_x = \frac{\lambda a x}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\overrightarrow{E_M} = E_x\vec{\imath} = \frac{\lambda a x}{2\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}\vec{\imath}$$

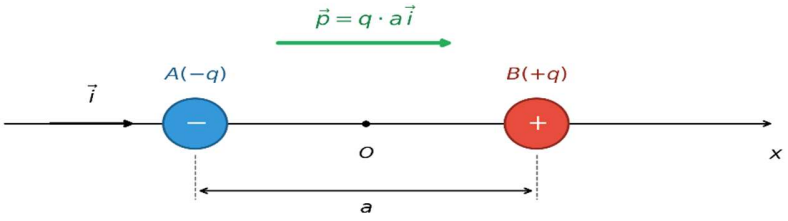
3. Dipôle électrostatique

Le dipôle électrostatique est constitué de deux charges ponctuelles de même grandeur et de signes opposées ($-q$ placée en A et $+q$ placée en B), séparées par une très petite distance $a = AB$.

On caractérise ce dipôle par une grandeur vectorielle appelée moment dipolaire :

$$\vec{p} = q.a\vec{\imath} = q.\overrightarrow{AB}$$

où:
a est la distance entre les deux charges (en m)
q est la valeur positive de la charge (en C)
$\vec{\imath}$ un vecteur unitaire porté par l'axe *(ox)* du dipôle, toujours dirigé de la charge négative $(-q)$ vers la charge positive $(+q)$.
Dans le système international, le moment dipolaire s'exprime en Coulomb-mètre (C.m).



W.KAZI-TANI

Pour un point M quelconque de l'espace repéré par sa distance r au centre O, $(O \gg a)$ et l'angle θ par rapport à l'axe du dipôle, on retient les expression suivantes :

- Potentiel électrostatique :

$$V(M) = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$$

- Module du champ électrostatique :

$$E(M) = \frac{Kp}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

4. Théorème de GAUSS

1. Introduction

Pour calculer le champ électrique, on pourrait toujours utiliser la loi de Coulomb. Mais lorsque les charges sont réparties de manière symétrique, les calculs peuvent devenir longs.

Le théorème de Gauss nous donne alors une méthode beaucoup plus simple lorsque la distribution de charges possède une symétrie plane, cylindrique ou sphérique.

2. Le flux du champ électrique

Le flux électrique mesure la quantité de champ électrique qui traverse une surface.

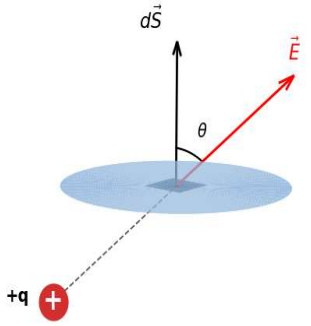
Considérons une charge ponctuelle $+q$ et une surface élémentaire dS orientée par son vecteur surface $\overrightarrow{dS}$ tel que :

$$\overrightarrow{dS} = \vec{n}.dS$$

$\vec{n}$: est le vecteur unitaire normal à la surface.

Le flux élémentaire à travers cette surface est alors :

$$d\Phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS.\cos\theta$$



Où

θ : est l'angle entre $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$.

Dans le système international l'unité de Φ est :

$$Nm^2/C$$

Interprétation :

Si $\vec{E}$ sort de la surface $(\theta < 90°)$, $d\Phi > 0$

W KAZI-TANI

Si $\vec{E}$ entre de la surface ($\theta > 90°$), $d\Phi < 0$

Si $\vec{E}$ est tangent à la surface ($\theta = 90°$), $d\Phi = 0$

Si $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface ($\theta = 0°$), $d\Phi = E.dS$

3. Enoncé du théorème de Gauss

3.1. Enoncé

Le théorème de Gauss établit une relation simple entre le **flux du champ électrique** à travers une surface fermée et la **charge électrique contenue à l'intérieur** de cette surface.

Le flux total du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge totale enfermée dans cette surface divisée par la permittivité du vide ε_0.

$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Où

$\vec{E}$: le champ électrique ;
$\overrightarrow{dS}$: le vecteur surface élémentaire, orienté vers l'extérieur de la surface fermée ;
Q_{int}: la charge totale enfermée dans la surface ;
ε_0 : la permittivité électrique du vide
Le symbole $\oiint$ indique que l'intégration est effectuée sur toute une surface fermée
Avec :

$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$$

Le théorème de Gauss s'applique à différentes distributions de charges : Charges ponctuelles, linéiques, surfaciques ou volumiques.

3.2. La surface de Gauss

Pour appliquer le théorème de Gauss, on imagine une **surface fermée** autour de la région étudiée. Cette surface est appelée **surface de Gauss**, notée S_G.

Une surface de Gauss est :

- Fermée ;
- Imaginaire ;

W.KAZI-TN

3.3. Choix de la surface de Gauss

On cherche une surface qui possède **la même symétrie que la distribution de charges**. Cela permet de déterminer plus facilement la direction du champ et de simplifier le calcul du flux.

Les principaux cas sont :

Distribution sphérique

Pour une charge ponctuelle ou une distribution possédant une symétrie sphérique, on choisit une **sphère** centrée sur la distribution de charges.

Fil chargée infiniment long

Pour un fil chargé infiniment long, on choisit un **cylindre** dont l'axe coïncide avec celui du fil.

Calcul du champ électrique créé par une charge ponctuelle $+q$ à l'aide du théorème de Gauss

Enoncé : Considérons une charge ponctuelle positive $+q$, placée en un point *O*. Déterminer le champ électrostatique créé par cette charge à une distance r de *O*, en utilisant le théorème de Gauss

Etape 1 : déterminer la direction du champ

Par symétrie le champ électrique crée par la charge est radial.

Choisissons une surface de Gauss sphérique de rayon r, centrée sur la charge.

Tous les points de cette sphère sont à la même distance r de la charge.

Donc le champ possède la même valeur en tout point de la surface $(E = constante)$

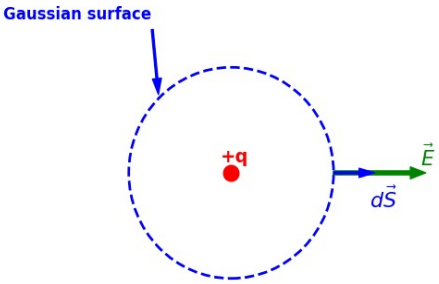
De plus, le champ est perpendiculaire à la surface, donc $\vec{E}//\overrightarrow{dS}$ et l'angle entre les deux vecteurs est nul $(\theta = 0)$, ainsi :

W.KAZI-TANI

$$\vec{E}.\overrightarrow{dS} = E.dS$$

Etape 2 : calculer le flux

Le flux à travers la surface de Gauss est :



$$\Phi = \oiint_{S_G} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_{S_G} E.dS$$

Comme E est constant :

$$\Phi = E \oiint_{S_G} dS$$

Or l'aire d'une sphère est :

$$S = 4\pi r^2$$

Donc :

$$\Phi = E.4\pi r^2$$

Etape 3 : appliquer le théorème de Gauss

La charge enfermée dans la surface de Gauss est :

$$Q_{int} = q$$

D'après le théorème de Gauss :

$$E.4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

On obtient :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

On retrouve ainsi l'expression du champ électrique créé par une charge ponctuelle.

W.KAZI-T