Chapitre 2 : Construction de l'intégrale stochastique et formule d'Ito

I- Martingales à temps continu

Objectifs et prérequis

Objectif. Les martingales sont l'outil clé de toute la suite du cours : l'intégrale d'Itô sera une martingale, la formule d'Itô servira à fabriquer des martingales, et les propriétés des EDS reposeront sur les inégalités de martingales.

Notations. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. B désigne un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien standard. Z désigne une variable $\mathcal{N}(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.

1. Rappels sur l'espérance conditionnelle

Soit X intégrable et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. Les propriétés suivantes seront utilisées sans cesse ; toutes les égalités sont p.s.

Propriété	Énoncé
Linéarité	$\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\,\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$
Espérance totale	$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[X]$
« Ce qui est connu sort »	Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable (et XY intégrable) : $\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = Y\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$
Indépendance	Si X est indépendante de $\mathcal{G}$: $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$
Emboîtement (tour)	Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$
Jensen	si φ est convexe et $\varphi(X)$ intégrable : $\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{G}]$

Le calcul type avec le brownien. Pour $s \leq t$, on écrit toujours $B_t = B_s + Y$ avec $Y = B_t - B_s$. Alors B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable (« connu ») et Y est indépendante de $\mathcal{F}_s$, de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$. Pour tout polynôme g :

$$\mathbb{E}[g(B_s + Y) \mid \mathcal{F}_s] = G(B_s), \qquad \text{où } G(x) = \mathbb{E}[g(x+Y)].$$

Autrement dit : on « gèle » B_s comme une constante x, on calcule l'espérance en Y, puis on remplace x par B_s. On utilisera les moments $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y^3] = 0$, $\mathbb{E}[Y^2] = t - s$, $\mathbb{E}[Y^4] = 3(t-s)^2$.

2. Martingales : définition et exemples

2.1 Définition

Définition. Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une **martingale** (par rapport à $(\mathcal{F}_t)$) si :

1. M est adapté : M_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t ;
2. M est intégrable : $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ pour tout t ;
3. pour tous $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.$$

Si l'on a seulement $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \geq M_s$, on parle de **sous-martingale** ; si $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \leq M_s$, de **sur-martingale**.

Interprétation. Une martingale modélise un **jeu équitable** : connaissant tout le passé jusqu'à s, la meilleure prévision de la valeur future M_t est la valeur présente M_s. Une sous-martingale « monte en moyenne », une sur-martingale « descend en moyenne ».

Conséquence immédiate. En prenant l'espérance dans la condition 3 (espérance totale) : $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_s]$ pour tous s, t. Une martingale est donc **d'espérance constante** : $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.

Attention : la réciproque est fausse. Un processus d'espérance constante n'est pas forcément une martingale (exercice 2).

Martingale de carré intégrable. M est dite de carré intégrable si $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$ pour tout t. Ce sera le cadre naturel de l'intégrale d'Itô.

2.2 Les trois martingales browniennes fondamentales

Proposition. Les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t)$-martingales :

$$\text{(a) } B_t, \qquad \text{(b) } B_t^2 - t, \qquad \text{(c) } \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Preuve. Les trois processus sont adaptés (fonctions de B_t et de t) et intégrables (moments gaussiens finis). Soit $s \leq t$ et $Y = B_t - B_s$, indépendante de $\mathcal{F}_s$, de loi $\mathcal{N}(0, t-s)$.

(a) $\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}_s] = B_s + \mathbb{E}[Y] = B_s$.

(b) En développant $(B_s + Y)^2 = B_s^2 + 2B_s Y + Y^2$:

$$\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = B_s^2 + 2B_s\,\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] = B_s^2 + (t-s).$$

Donc $\mathbb{E}[B_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s] = B_s^2 + t - s - t = B_s^2 - s$.

(c) On utilise $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] = e^{\lambda^2 (t-s)/2}$ (transformée de Laplace de $\mathcal{N}(0, t-s)$) :

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{\lambda B_s}\,\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] = e^{\lambda B_s}\,e^{\lambda^2(t-s)/2}.$$

En multipliant par $e^{-\lambda^2 t/2}$, on obtient $\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2} \mid \mathcal{F}_s\right] = e^{\lambda B_s - \lambda^2 s/2}$. ▫

Remarque. Le terme $-t$ dans (b) et le terme $-\lambda^2 t/2$ dans (c) sont des **compensateurs** i.e ils retirent exactement la « dérive moyenne » de B_t^2 et de $e^{\lambda B_t}$. On retrouvera ces termes dans la formule d'Itô.

2.3 Autres exemples

Martingale fermée. Soit X une variable intégrable. Alors $M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$ est une martingale. En effet, par emboîtement, pour $s \le t$: $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_s] = M_s$. C'est la « prévision de X mise à jour au fil de l'information ». En finance, le prix actualisé d'un actif est de cette forme sous la probabilité risque-neutre.

Sous-martingales obtenues par convexité. Si M est une martingale et φ une fonction convexe telle que $\varphi(M_t)$ soit intégrable, alors $\varphi(M_t)$ est une sous-martingale. Par Jensen conditionnel :

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t) \mid \mathcal{F}_s] \ge \varphi(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]) = \varphi(M_s).$$

Exemples : $|B_t|$, B_t^2 et e^{B_t} sont des sous-martingales.

Vérification directe pour B_t^2. D'après (b), $\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}_s] = B_s^2 + (t-s) \ge B_s^2$: c'est bien une sous-martingale, et la « montée moyenne » vaut exactement $t - s$.

2.4 Méthode pour montrer qu'un processus est une martingale

1. Vérifier l'adaptation et l'intégrabilité.
2. Écrire, pour $s \le t$, la quantité à l'instant t en fonction de la valeur à l'instant s et d'un accroissement indépendant du passé.
3. Calculer l'espérance conditionnelle avec les règles du § 1 (ce qui est connu sort, l'accroissement indépendant donne une espérance ordinaire).
4. Comparer le résultat à la valeur à l'instant s.

3. Temps d'arrêt et théorème d'arrêt

3.1 Martingale arrêtée

Si M est une martingale continue et τ un temps d'arrêt, le processus arrêté $M_t^\tau = M_{t\wedge\tau}$ est encore une martingale (admis en temps continu ; la preuve en temps discret est à l'exercice 5). Intuition : s'arrêter de jouer selon une règle qui ne regarde pas le futur ne rend pas un jeu équitable favorable.

3.2 Théorème d'arrêt

Théorème (Doob, temps d'arrêt bornés). Soit M une martingale continue et $\sigma \le \tau$ deux temps d'arrêt **bornés** (il existe une constante N avec $\tau \le N$). Alors M_τ est intégrable et

$$\mathbb{E}[M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma, \qquad \text{en particulier } \mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0].$$

Preuve en temps discret (idée clé). Soit (M_n) une martingale discrète et $\tau \le N$ un temps d'arrêt. On écrit M_τ comme une somme télescopique :

$$M_\tau = M_0 + \sum_{k=1}^{N} (M_k - M_{k-1})\ \mathbf{1}_{\{\tau \ge k\}}.$$

(Pour ω fixé, seuls les termes $k \le \tau(\omega)$ restent, et leur somme vaut $M_\tau - M_0$.)
L'événement $\{\tau \ge k\}$ est le complémentaire de $\{\tau \le k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}$: il est connu à l'instant $k-1$. Donc

$$\mathbb{E}\big[(M_k - M_{k-1})\,\mathbf{1}_{\{\tau \ge k\}}\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{\tau \ge k\}}\,\mathbb{E}[M_k - M_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}]\Big] = 0.$$

En sommant, $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$. Le cas du temps continu s'obtient en approchant τ par des temps d'arrêt à valeurs dans une grille dyadique, puis en utilisant la continuité de M (admis). ▫

4. Inégalités de martingales (Doob)

Les inégalités de Doob contrôlent **tout le chemin** $\sup_{s \le t} |M_s|$ à l'aide de la seule valeur finale M_t. Elles serviront à construire l'intégrale d'Itô comme processus continu et à prouver l'existence des solutions d'EDS.

4.1 Inégalité maximale

Théorème. Soit M une martingale continue. Pour tous $t \ge 0$ et $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\big(\sup_{s \le t} |M_s| \ge \lambda\big) \le \frac{\mathbb{E}|M_t|}{\lambda}.$$

Plus généralement, si X est une sous-martingale continue positive : $\lambda\,\mathbb{P}\big(\sup_{s \le t} X_s \ge \lambda\big) \le \mathbb{E}\left[X_t \mathbf{1}_{\{\sup_{s \le t} X_s \ge \lambda\}}\right] \le \mathbb{E}[X_t]$.

Comparaison avec Markov. L'inégalité de Markov donne $\mathbb{P}(|M_t| \ge \lambda) \le \mathbb{E}|M_t|/\lambda$ pour la seule valeur **finale**. Doob donne la **même borne** pour le maximum sur tout l'intervalle $[0, t]$: c'est un gain considérable.

Preuve en temps discret. Soit $X_0, \dots, X_N$ une sous-martingale positive et $S = \max_{k \le N} X_k$. On découpe l'événement $\{S \ge \lambda\}$ selon le premier instant où le niveau λ est franchi :

$A_k = \{X_k \geq \lambda \text{ et } X_j < \lambda \text{ pour } j < k\}$, $\{S \geq \lambda\} = A_0 \cup \ldots \cup A_N$ (réunion disjointe).

Chaque A_k est dans $\mathcal{F}_k$, et sur A_k on a $X_k \geq \lambda$. Par la propriété de sous-martingale, $\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_k] \geq X_k$, donc

$$\lambda\, \mathbb{P}(A_k) \leq \mathbb{E}\big[X_k \mathbf{1}_{A_k}\big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X_N \mid \mathcal{F}_k]\, \mathbf{1}_{A_k}\big] = \mathbb{E}\big[X_N \mathbf{1}_{A_k}\big].$$

En sommant sur k : $\lambda\, \mathbb{P}(S \geq \lambda) \leq \mathbb{E}\big[X_N \mathbf{1}_{\{S \geq \lambda\}}\big] \leq \mathbb{E}[X_N]$. On applique ceci à $X = |M|$ (sous-martingale par Jensen). Le cas continu s'obtient en prenant le maximum sur une grille dyadique de plus en plus fine et en utilisant la continuité des trajectoires. ▫

4.2 Inégalité L^2 de Doob

Théorème. Soit M une martingale continue de carré intégrable. Pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\big[\sup_{s \leq t} M_s^2\big] \leq 4\, \mathbb{E}[M_t^2].$$

Plus généralement, pour $p > 1$: $\mathbb{E}\big[\sup_{s \leq t} |M_s|^p\big] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|M_t|^p$; pour $p = 2$, on retrouve la constante $(2/1)^2 = 4$.

Preuve pour $p = 2$ (temps discret). Avec les notations précédentes ($X = |M|$, $S = \max_{k \leq N} X_k$, qui est de carré intégrable car $S \leq |M_0| + \cdots + |M_N|$), on utilise la formule $\mathbb{E}[S^2] = \int_0^\infty 2\,\lambda\, \mathbb{P}(S \geq \lambda)\, d\lambda$ et l'inégalité maximale :

$$\mathbb{E}[S^2] \leq \int_0^\infty 2\ \mathbb{E}\big[X_N \mathbf{1}_{\{S \geq \lambda\}}\big]\, d\lambda = 2\, \mathbb{E}\left[X_N \int_0^S d\,\lambda\right] = 2\, \mathbb{E}[X_N S] \leq 2\sqrt{\mathbb{E}[X_N^2]}\,\sqrt{\mathbb{E}[S^2]}.$$

(L'échange intégrale/espérance est justifié par Fubini, tout étant positif ; la dernière étape est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.) En divisant par $\sqrt{\mathbb{E}[S^2]}$ (si non nul) puis en élevant au carré : $\mathbb{E}[S^2] \leq 4\, \mathbb{E}[X_N^2] = 4\, \mathbb{E}[M_N^2]$. ▫

4.3 Application au brownien

Avec $M = B$ et $\mathbb{E}[B_t^2] = t$:

$$\mathbb{E}\big[\sup_{s \leq t} B_s^2\big] \leq 4t,$$

$$\mathbb{P}\big(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq \lambda\big) \leq \frac{t}{\lambda^2} \quad \text{(inégalité maximale appliquée à la sous-martingale } B^2\text{)}.$$

Par exemple, $\mathbb{P}\big(\sup_{s \leq 1} |B_s| \geq 2\big) \leq 1/4$. L'exercice 7 compare cette borne à la valeur donnée par le principe de réflexion.

5. Variation quadratique d'une martingale

5.1 Rappel : le cas du brownien

On a montré en semaine 2 que, pour toute suite de subdivisions π de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\sum_i \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \to t \quad \text{dans } L^2.$$

On note $\langle B \rangle_t = t$: c'est la **variation quadratique** du brownien. Remarquons que $B_t^2 - \langle B \rangle_t = B_t^2 - t$ est une martingale (§ 2.2).

5.2 Orthogonalité des accroissements

Lemme. Soit M une martingale de carré intégrable et $s \leq t$. Alors

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathcal{F}_s].$$

Preuve. On développe et on sort ce qui est connu :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s\,\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] + M_s^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 \mid \mathcal{F}_s] - 2M_s^2 + M_s^2.\end{aligned}$$ ▫

Conséquence (Pythagore pour les martingales). Pour une subdivision $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$, les accroissements sont orthogonaux dans L^2 et

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2\right].$$

C'est exactement ce mécanisme qui donnera l'**isométrie d'Itô** la semaine prochaine.

5.3 Définition de la variation quadratique

Théorème (admis). Soit M une martingale continue de carré intégrable. Il existe un unique processus $\langle M \rangle$ continu, adapté, croissant, nul en 0, tel que

$$M_t^2 - \langle M \rangle_t \text{ soit une martingale.}$$

De plus, pour toute suite de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, $\sum_i \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \to \langle M \rangle_t$ en probabilité.

Exemples.

Martingale M_t	Variation quadratique $\langle M \rangle_t$	Justification
B_t	t	$B_t^2 - t$ est une martingale
σB_t (σ constant)	$\sigma^2 t$	$\sigma^2 B_t^2 - \sigma^2 t$ est une

Martingale M_t	Variation quadratique $\langle M \rangle_t$	Justification
		martingale
B_{ct} $(c > 0)$, pour la filtration $(\mathcal{F}_{ct})$	ct	$B_{ct}^2 - ct$ est une martingale
$\int_0^t H_s \, dB_s$	$\int_0^t H_s^2 \, ds$	isométrie d'Itô

Remarque sur les processus à dérive. Pour $X_t = B_t + \mu t$ (qui n'est pas une martingale si $\mu \neq 0$), la somme des carrés des accroissements tend encore vers t : la dérive ne contribue pas à la variation quadratique (exercice 9).

5.4 Une martingale continue non constante n'est jamais à variation finie

Proposition. Soit M une martingale continue, bornée, nulle en 0, dont les trajectoires sont à variation finie. Alors $M_t = 0$ pour tout t, p.s.

Preuve. Soit V la variation totale de M sur $[0, t]$ (supposée bornée, pour simplifier, par une constante C). Pour une subdivision de $[0, t]$:

$$\sum_i \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2 \leq \left(\max_i \left|M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right|\right) \cdot V \to 0,$$

car M est uniformément continue sur $[0, t]$. Par Pythagore (§ 5.2) et convergence dominée : $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\left[\sum_i \left(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}\right)^2\right] \to 0$. Donc $M_t = 0$ p.s. ▫

Message. Les trajectoires des martingales intéressantes (non constantes) sont à variation infinie. On ne peut donc pas définir $\int H \, dM$ trajectoire par trajectoire comme une intégrale de Stieltjes : il faut une **nouvelle intégrale**, construite dans L^2 grâce à la variation quadratique. C'est l'intégrale d'Itô.

5.5 Aperçu : le choix du point compte

Considérons les sommes de Riemann-Stieltjes de « $\int_0^t B \, dB$ » sur une subdivision $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$, en notant $\Delta_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$. Les identités algébriques

$$B_{t_{i-1}} \Delta_i = \frac{B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 - \Delta_i^2}{2}, \qquad B_{t_i} \Delta_i = \frac{B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 + \Delta_i^2}{2}$$

donnent, après télescopage et grâce à $\sum_i \Delta_i^2 \to t$:

Point choisi	Somme	Limite dans L^2
gauche t_{i-1}	$\sum_i B_{t_{i-1}} \Delta_i$	$\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

Point choisi	Somme	Limite dans L^2
droite t_i	$\sum_i B_{t_i}\,\Delta_i$	$\frac{1}{2}(B_t^2 + t)$
moyenne des deux	$\sum_i \frac{1}{2}(B_{t_{i-1}} + B_{t_i})\Delta_i$	$\frac{1}{2}B_t^2$ (égalité exacte)

Pour une fonction dérivable, les trois choix donneraient la même limite. Ici, elles diffèrent de $\pm t/2$: c'est l'effet de la variation quadratique. Le choix du point **gauche** (Itô) est le seul qui fournit une martingale : $\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ en est une, d'après le § 2.2. C'est ce choix que l'on fera la semaine prochaine.

6. À retenir

1. Martingale = adaptée + intégrable + $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$; son espérance est constante.
2. B_t, $B_t^2 - t$ et $e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$ sont les trois martingales browniennes de base.
3. Théorème d'arrêt : valable pour des temps d'arrêt **bornés** ; sinon, arrêter en $t \wedge \tau$ puis justifier le passage à la limite.
4. Doob : $\mathbb{P}\big(\sup_{s\le t}|M_s| \ge \lambda\big) \le \mathbb{E}|M_t|/\lambda$ et $\mathbb{E}\big[\sup_{s\le t} M_s^2\big] \le 4\,\mathbb{E}[M_t^2]$.
5. $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ est une martingale ; $\langle B\rangle_t = t$; une martingale continue non constante est à variation infinie.

7. TD — Exercices corrigés

Exercice 1 — Martingales polynomiales

1. Montrer que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale.
2. Montrer que $Y_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ est une martingale. En déduire $\mathbb{E}[B_t^4]$.

Exercice 2 — Espérance constante ne suffit pas

1. Montrer que e^{B_t} est une sous-martingale et trouver la constante c telle que $e^{B_t - ct}$ soit une martingale.
2. Soit $X_t = tB_1$ pour $t \in [0,1]$. Vérifier que $\mathbb{E}[X_t] = 0$ pour tout t. X est-il une martingale pour la filtration brownienne ?

Exercice 3 — Martingale fermée

Soit $M_t = \mathbb{E}[B_1^2 \mid \mathcal{F}_t]$ pour $t \in [0,1]$.

1. Calculer M_t explicitement.
2. Vérifier directement que M est une martingale et calculer M_0 et M_1.

Exercice 4 — Premier temps de passage et transformée de Laplace

Soit $a > 0$ et $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$.

1. Soit $\lambda > 0$ et $\theta = \sqrt{2\lambda}$. En appliquant le théorème d'arrêt à $N_t = \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$, montrer que $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda \tau_a}\right] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$.
2. En déduire que $\mathbb{E}[\tau_a] = +\infty$.

Exercice 5 — Théorème d'arrêt en temps discret

Soit (S_n) la marche aléatoire simple : $S_0 = 0$, $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$, avec ε_k i.i.d., $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = 1/2$, et $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

1. Montrer que S_n et $S_n^2 - n$ sont des martingales.
2. Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que la martingale arrêtée $S_{n \wedge \tau}$ est une martingale.
3. Soit T le premier instant où S atteint -2 ou 3. Calculer $\mathbb{P}(S_T = 3)$ et $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 6 — Brownien avec dérive : probabilité de sortie

Soit $\mu > 0$, $X_t = B_t + \mu t$, et $a, b > 0$. On pose $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \in \{-a, b\}\}$; on admet que $T < \infty$ p.s.

1. Montrer que $e^{-2\mu X_t}$ est une martingale.
2. En déduire $p = \mathbb{P}(X_T = b)$.
3. Vérifier que l'on retrouve $a/(a+b)$ quand $\mu \to 0$.

Exercice 7 — Inégalités de Doob pour le brownien

1. Majorer $\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq 1} |B_s| \geq 2\right)$ par l'inégalité maximale de Doob.
2. Majorer la même probabilité à l'aide du principe de réflexion, sachant que $\Phi(2) \approx 0{,}9772$. Comparer.
3. **Borne exponentielle.** Soit $a, t > 0$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a\right) \leq e^{-a^2/(2t)}$.

Exercice 8 — Pythagore pour les martingales

Soit $M_t = B_t^2 - t$.

1. Calculer $\mathbb{E}[M_t^2]$ directement.
2. Pour $s \leq t$, calculer $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2]$ et vérifier que $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[M_s^2] + \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2]$.

Exercice 9 — Variation quadratique

1. Soit $X_t = B_t + \mu t$. Pour la subdivision uniforme $t_i = it/n$ de $[0, t]$, montrer que $\sum_{i=1}^{n} \left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)^2 \to t$ dans L^2.
2. Soit $M_t = \sigma B_t$. Vérifier par la définition que $\langle M \rangle_t = \sigma^2 t$.

Exercice 10 — Sommes de Riemann et choix du point

Sur la subdivision uniforme de $[0, t]$ en n intervalles, on pose $G_n = \sum_i B_{t_{i-1}} \Delta_i$ et $D_n = \sum_i B_{t_i} \Delta_i$.

1. Montrer que $D_n - G_n = \sum_i \Delta_i^2$ et $D_n + G_n = B_t^2$.
2. En déduire les limites L^2 de G_n et D_n.
3. Calculer $\mathbb{E}[G_n]$ et $\mathbb{E}[D_n]$. Lequel des deux choix est compatible avec une intégrale d'espérance nulle ?

Références

Données bibliographiques de mémoire, à contrôler en bibliothèque.

- B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 6e éd., 2003 — référence prioritaire du plan ; martingales au chapitre 3 (appendice sur les martingales).
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses — chapitre sur le mouvement brownien et les martingales, en français.
- J.-F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, coll. Mathématiques et Applications 71, 2013 — chapitre 3 (filtrations et martingales), en français.
- I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, GTM 113, 2e éd., 1991 — chapitre 1 (martingales à temps continu, inégalités de Doob, décomposition de Doob-Meyer).
- S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004 — chapitres 2 et 3, très pédagogique.