Résistance Des Matériaux 1

(Cours de L2 Génie Civil)

PAR DR NAOUAL DJAFOUR NÉE BENKELFAT

DÉPARTEMENT DE GÉNIE CIVIL - FACULTÉ DE TECHNOLOGIE

UNIVERSITÉ ABOUBEKR BELKAID DE TLEMCEN

Sollicitations axiales

COURS II

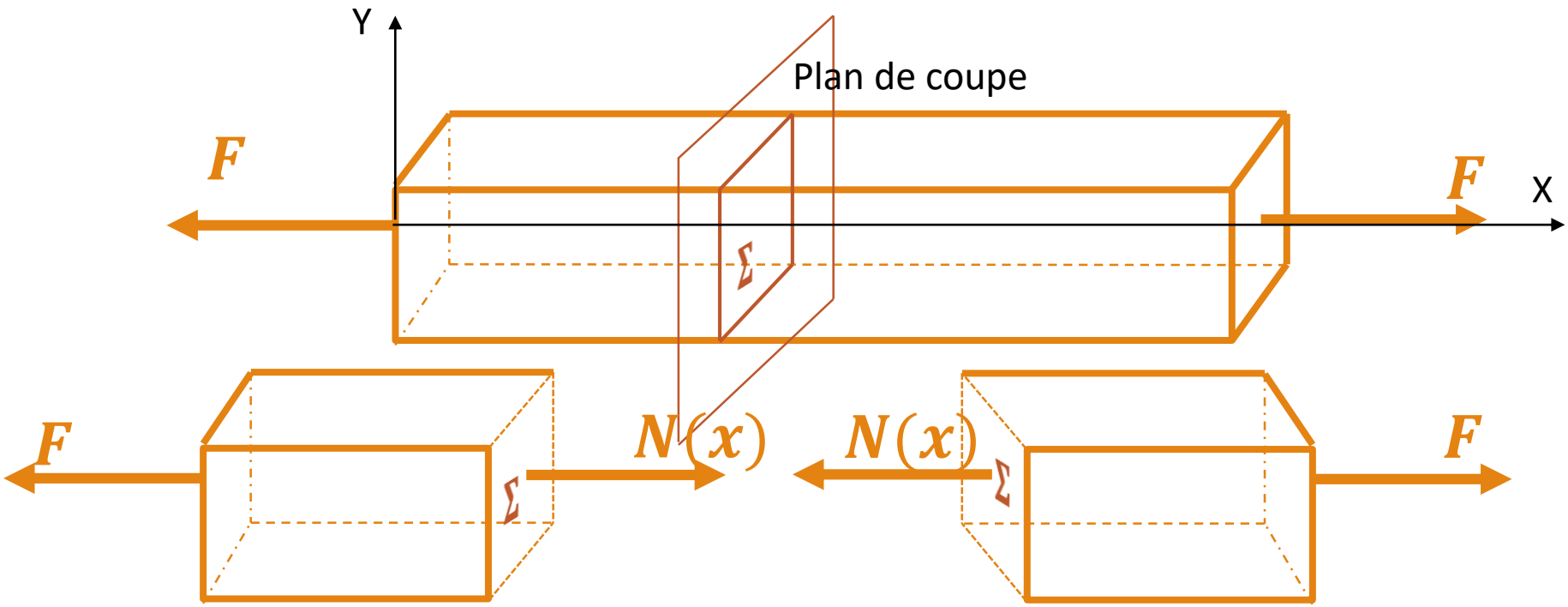
Définition

Une poutre est soumise à une sollicitation axiale (traction ou compression) lorsque le torseur de cohésion au centre de gravité d'une section a la forme

$$\tau_{coh} = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

- Si N > 0 c'est une traction
- Si N < 0 c'est une compression

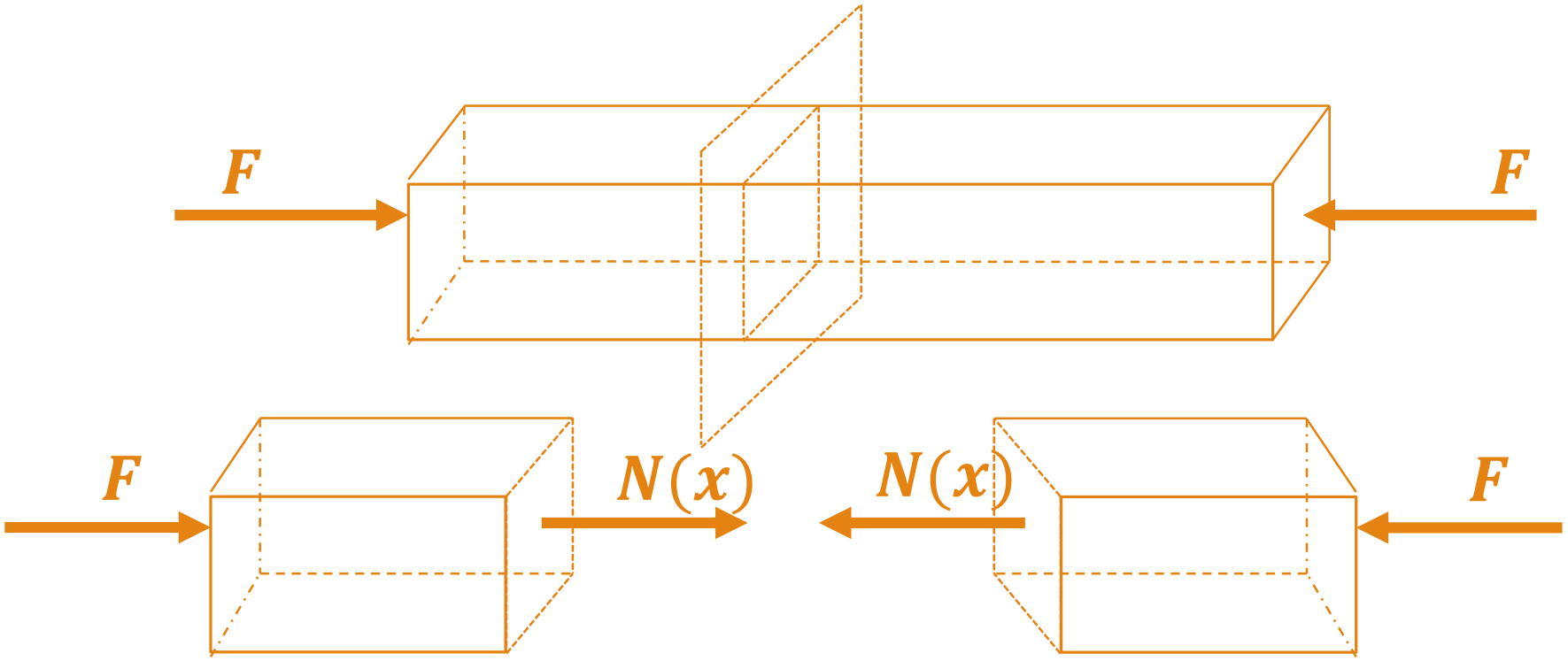
Traction



L'équilibre du tronçon gauche
Elément de réduction au centre de gravité de la section Σ
$N(x) = F$

L'équilibre du tronçon droit
Elément de réduction au centre de gravité de la section Σ
$N(x) = F$

Compression



L'équilibre du tronçon gauche

$$N(x) = -F$$

L'équilibre du tronçon droit

$$N(x) = -F$$

Essai de traction

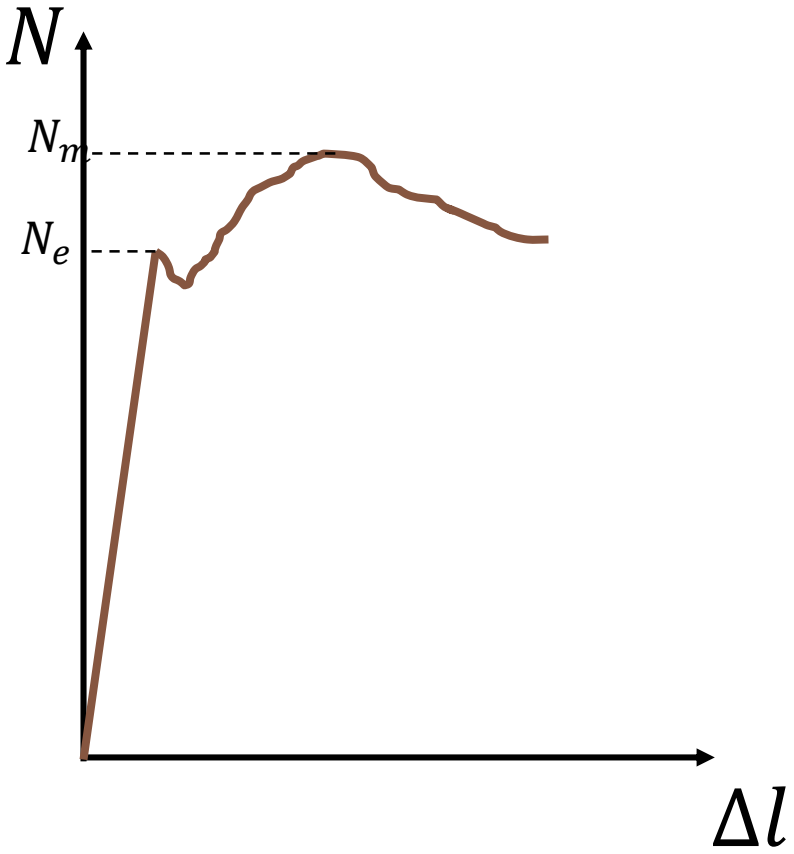
Un essai de traction normalisé consiste à exercer un effort de traction sur une éprouvette en acier.

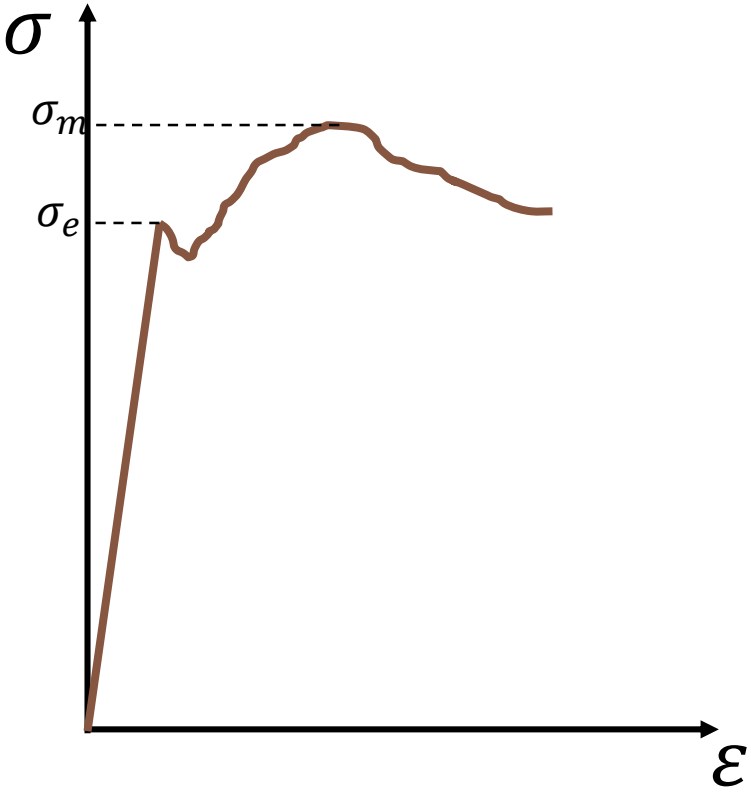
Lors de l'essai de traction, l'effort normal N est enregistré en fonction de l'allongement Δl

On représente cependant la contrainte σ en fonction de la déformation $\varepsilon = \Delta l / l$. On obtient un diagramme contrainte-déformations.

Sur ce diagramme on peut observer plusieurs domaines de déformations

Résultat de l'essai de traction





Interprétation

Dans la zone linéaire, la déformation est élastique et il y a proportionnalité entre la contrainte appliquée et la déformation, le phénomène de déformation reste réversible, et si la contrainte est relâchée l'éprouvette retrouve sa longueur initiale .

Le coefficient de proportionnalité $\boldsymbol{E}$ s'exprime sous la forme de la loi de **Hooke**

MPa ← $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{S}}$ → N, mm^2

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}.\frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{\varepsilon}$$ **Loi de Hooke**

$\boldsymbol{E}$:module d'élasticité longitudinal ou module de Young $(\frac{N}{mm^2} = MPa)$

L'allongement est alors donné par l'expression

$$\boldsymbol{\Delta l} = \frac{\boldsymbol{N.l}}{\boldsymbol{E.S}}$$

Interprétation

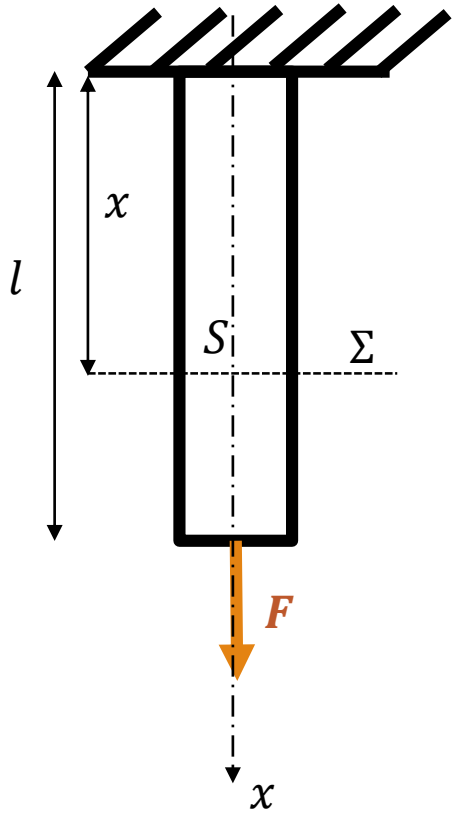
La valeur maximale du domaine élastique σ_e s'appelle limite élastique, au-delà de laquelle le matériau se déformera plastiquement de façon irréversible.

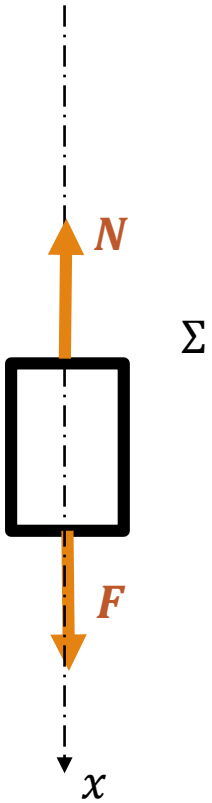
Une diminution du diamètre e de l'éprouvette. Cette diminution est caractérisée par la relation de proportionnalité $\boldsymbol{\frac{\Delta e}{e} = -\nu \frac{\Delta l}{l}}$

Le coefficient de proportionnalité $\boldsymbol{\nu}$ est appelé **coefficient de Poisson** et est sans dimension. Le signe est du à la diminution du diamètre lorsque la contrainte augmente.

Etat de contrainte

Considérons une poutre sollicitée en traction





$$N(x) = \iint_S \sigma . dS$$

$$N(x) = \sigma \iint_S dS$$

$$N(x) = F$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

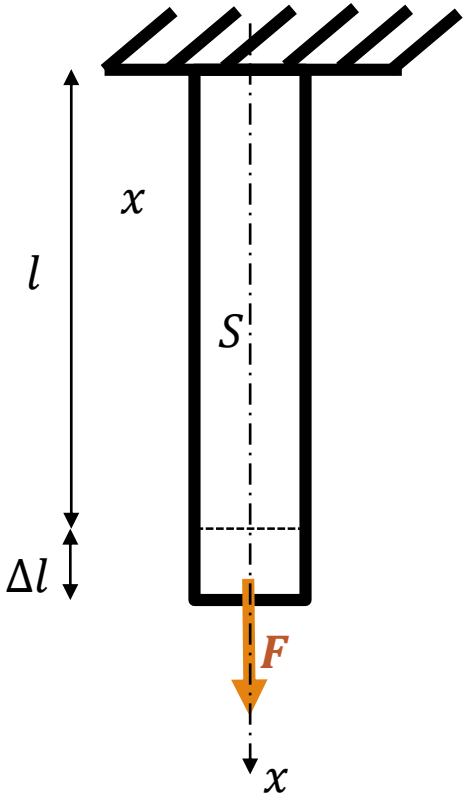
Etat de déformation

La poutre sollicitée à la traction va subir un allongement Δl donc une déformation $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

$$\sigma = E.\varepsilon$$

$$\frac{F}{S} = E.\frac{\Delta l}{l}$$

$$\Delta l = \frac{F.l}{E.S}$$



Condition de résistance

La barre doit pouvoir résister en toute sécurité à la sollicitation .

Les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ doivent rester dans le domaine élastique

La contrainte normale $\boldsymbol{\sigma}$ doit être au plus égale à une contrainte limite appelée résistance ou contrainte admissible et notée $\boldsymbol{\sigma_{adm}}$

Pour tenir compte des hypothèses sur le matériau et sur le mode d'application des forces, on utilise un coefficient de sécurité noté s tel que $\boldsymbol{\sigma_{adm}} = \frac{\boldsymbol{\sigma_e}}{\boldsymbol{s}}$ $\boldsymbol{s}$ varie de 2 à 5.

La condition de résistance est donc

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma_{adm}}$$

Sollicitation de Cisaillement

COURS III

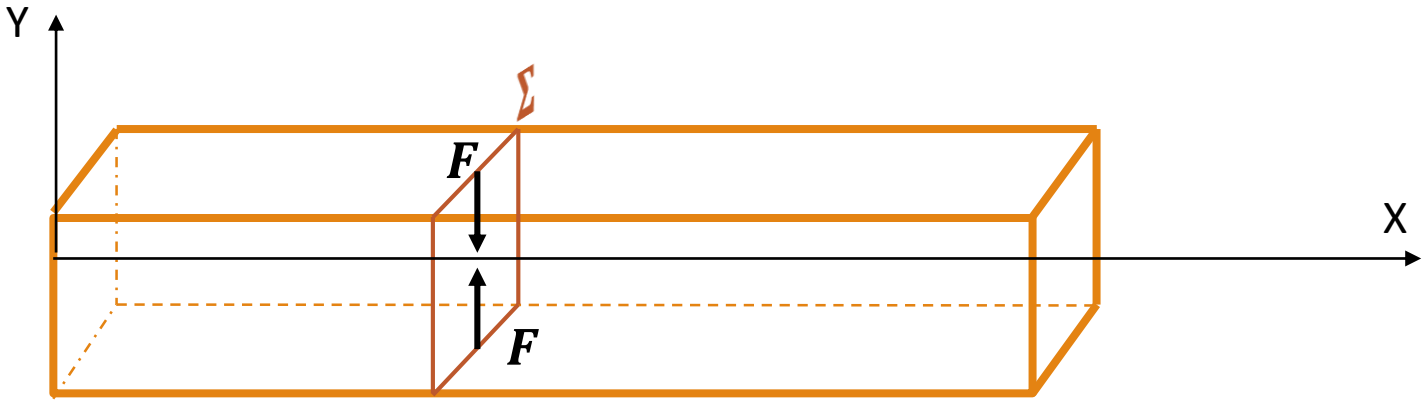
Définition

Une poutre est soumise à une sollicitation de cisaillement pur lorsque le torseur de cohésion au centre de gravité d'une section a la forme

$$\tau_{coh} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}$$

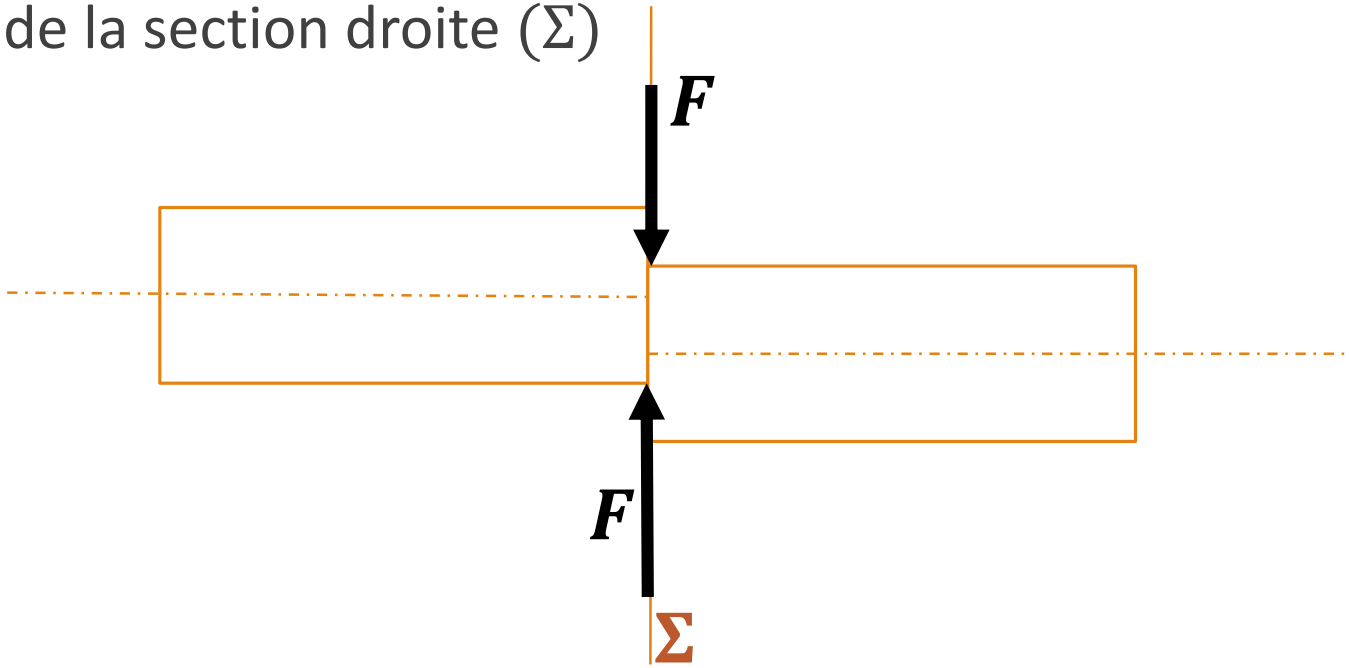
Définition

Il y a sollicitation de cisaillement lorsqu'une poutre est soumise à deux forces égales directement opposées et dont le support est dans un plan perpendiculaire à la ligne moyenne.



Définition

Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux parties glissant l'une par rapport à l'autre dans le plan de la section droite (Σ)



Essai de cisaillement

Un essai de cisaillement pur ne peut être réalisé.

- Il est absolument impossible d'appliquer deux forces opposées situées exactement dans le même plan.
- Un effort sera situé à une distance Δx du plan contenant la force opposée.
- Il y a alors naissance de ce qu'on appelle un moment de flexion $M_{fz} = \Delta x . F$ mais qui sera négligeable devant l'effort tranchant (Δx très petit).

Lors de l'essai de cisaillement, en réalité la poutre subit une sollicitation composée CISAILLEMENT et FLEXION. Cette sollicitation est appelée **CISAILLEMENT SIMPLE.** Mais la poutre est considérée solliciter à du **CISAILLEMENT PUR**

Etat de contrainte

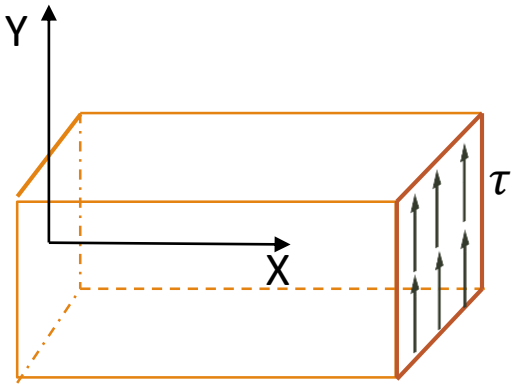
Chaque élément de surface $\boldsymbol{dS}$ supporte une contrainte de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ contenue dans la section cisaillée $\boldsymbol{S}$. Elle est définie par

$$\mathrm{T}(x) = \iint_S \ \tau . dS$$

$$\mathrm{T}(x) = \tau . \iint_S \ dS$$

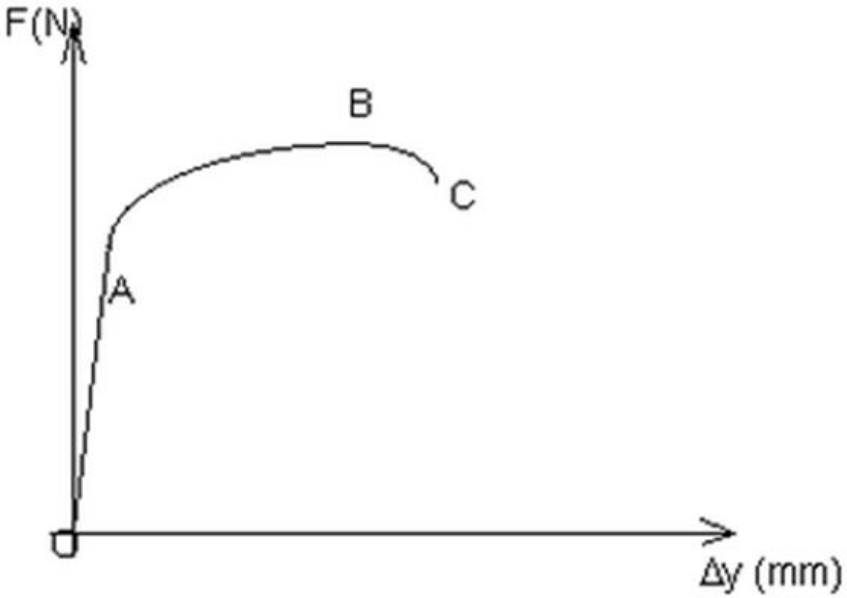
$$\mathrm{T}(x) = F$$

$$\tau = \frac{F}{S}$$



Etat de déformation

Si on trace la variation du glissement Δy en fonction de l'effort F, on obtient la courbe ci dessous, ayant une zone de déformations élastiques (OA) et une zone de déformations plastiques (ABC).



Etat de déformation

La section S cisaillée se déplace dans son plan. Ce déplacement est un glissement. Il est défini par un angle de glissement γ. Cet angle est défini par $tg\ \gamma = \Delta y/\Delta x$.

La déformation γ , appelée glissement relatif ou déviation (sans unité) reste faible dans le domaine élastique d'où $\gamma = \Delta y/\Delta x$

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ , on introduit alors le module de Coulomb G

$$\tau = G.\gamma \quad \text{ou} \quad G = \frac{E}{2.(1+\nu)}$$

Ou ν est le coefficient de Poisson

Condition de résistance

La barre doit pouvoir résister en toute sécurité à la sollicitation .

Les déformations doivent rester dans le domaine élastique

La contrainte de cisaillement τdoit être au plus égale à une contrainte limite appelée résistance ou contrainte admissible et notée τ_{adm}

Pour tenir compte des hypothèses sur le matériau et sur le mode d'application des forces, on utilise un coefficient de sécurité noté s tel que $\tau_{adm} = \frac{\tau}{s}$

La condition de résistance est donc

$$\tau \leq \tau_{adm}$$

Représentation graphique des contraintes

COURS IV

Cercle de Mohr

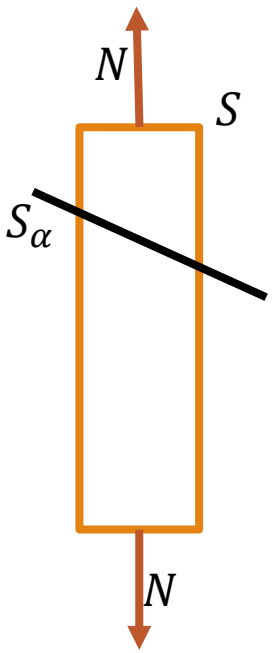
Définition et utilité

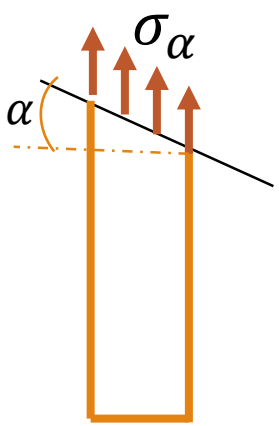
Le cercle de Mohr est une représentation graphique des états de contrainte.

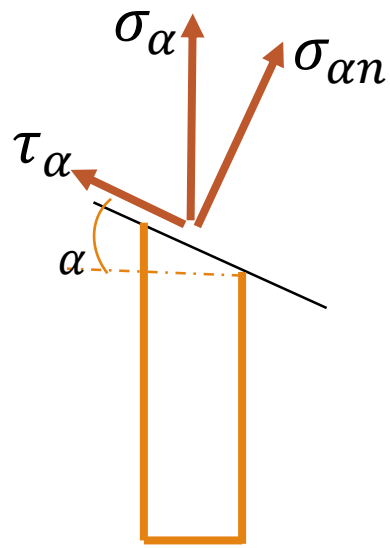
- l'axe horizontal représente l'amplitude de la contrainte normale (σ_n)
- L'axe vertical représente l'amplitude de la contrainte de cisaillement (tangentielle) (τ)

Le cercle de Mohr représente différents états de contrainte en un point. Chaque point du cercle représente un plan pour lequel on peut déterminer l'orientation, la contrainte normale ainsi que la contrainte tangentielle.

Contrainte sur plan incliné







$$\sigma_{\alpha n} = \sigma \cos^2\alpha$$

$$\sigma = \frac{N}{S} \qquad \sigma_\alpha = \frac{N}{S_\alpha} = \frac{N}{S}\cos\alpha = \sigma \cos\alpha$$

$$\tau_\alpha = \sigma \cos\alpha . \sin\alpha = \frac{\sigma \sin 2\alpha}{2}$$

Contrainte sur plan incliné

$\sigma_{\alpha n} = \sigma\ cos^2\alpha$ est la composante **normale**

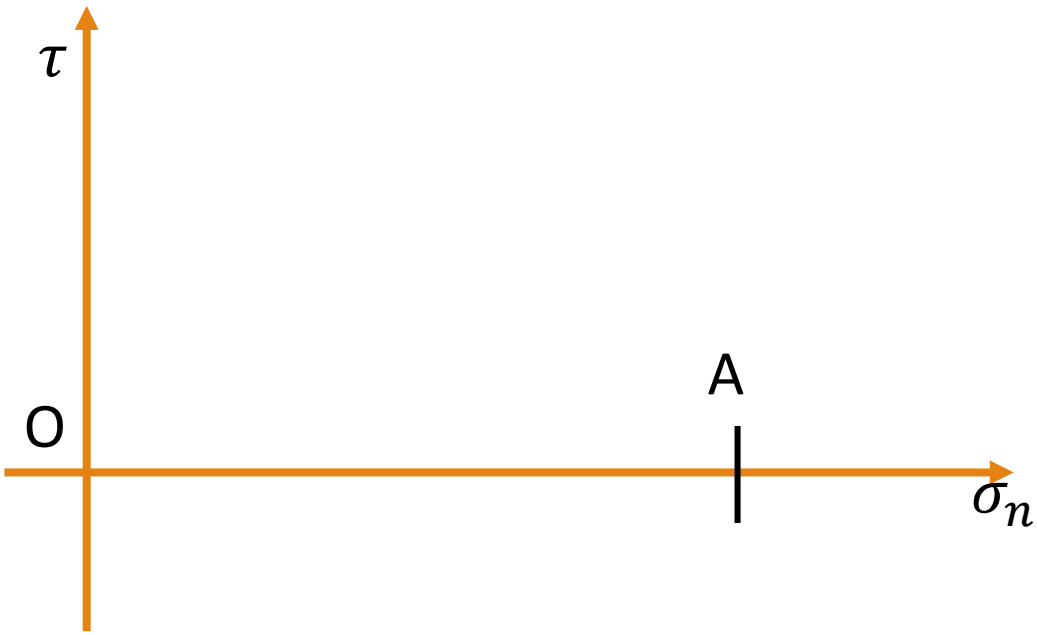
$\tau_\alpha = \sigma\ cos\alpha . sin\alpha = \frac{\sigma\ sin2\alpha}{2}$ est la composante **tangentielle**

L'orientation qui donne le maximum des 2 composantes

$\sigma_{\alpha n} = \sigma_{max} = \sigma \qquad pour \quad cos^2\alpha = 1 \ \Rightarrow \quad \alpha = 0 \Rightarrow \quad \tau_\alpha = 0$

$\tau_\alpha = \tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \qquad pour \quad sin2\alpha = 1 \ \Rightarrow \quad \alpha = 45 \Rightarrow \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2}$

Contrainte sur plan incliné



Contrainte qui agit sur le plan $\varphi = 0$

$(\sigma_n, \tau) = (\sigma, 0)$

Composantes du point A qui correspond au plan de normal l'axe longitudinal de la barre

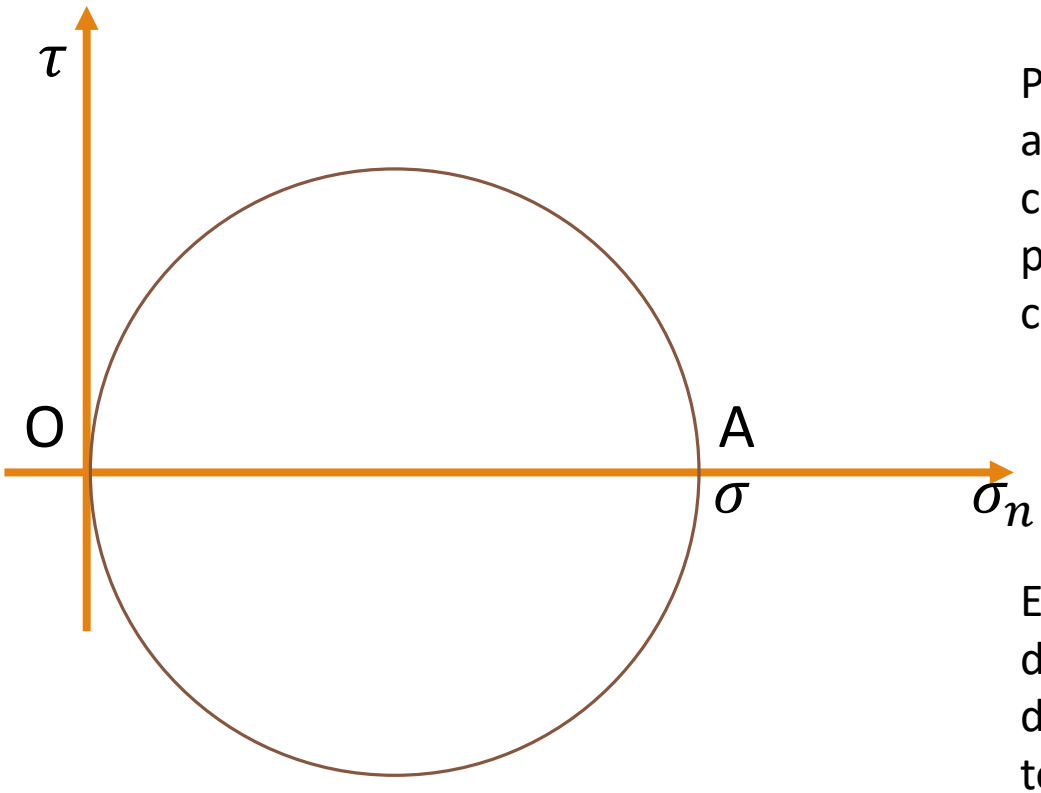
Pour un plan parallèle à l'axe de la barre

$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow (\sigma_n, \tau) = (0,0)$

Composantes du point O qui correspond Au plan de normal l'axe perpendiculaire A l'axe longitudinal de la barre

Cercle de diamètre $\overline{OA}$

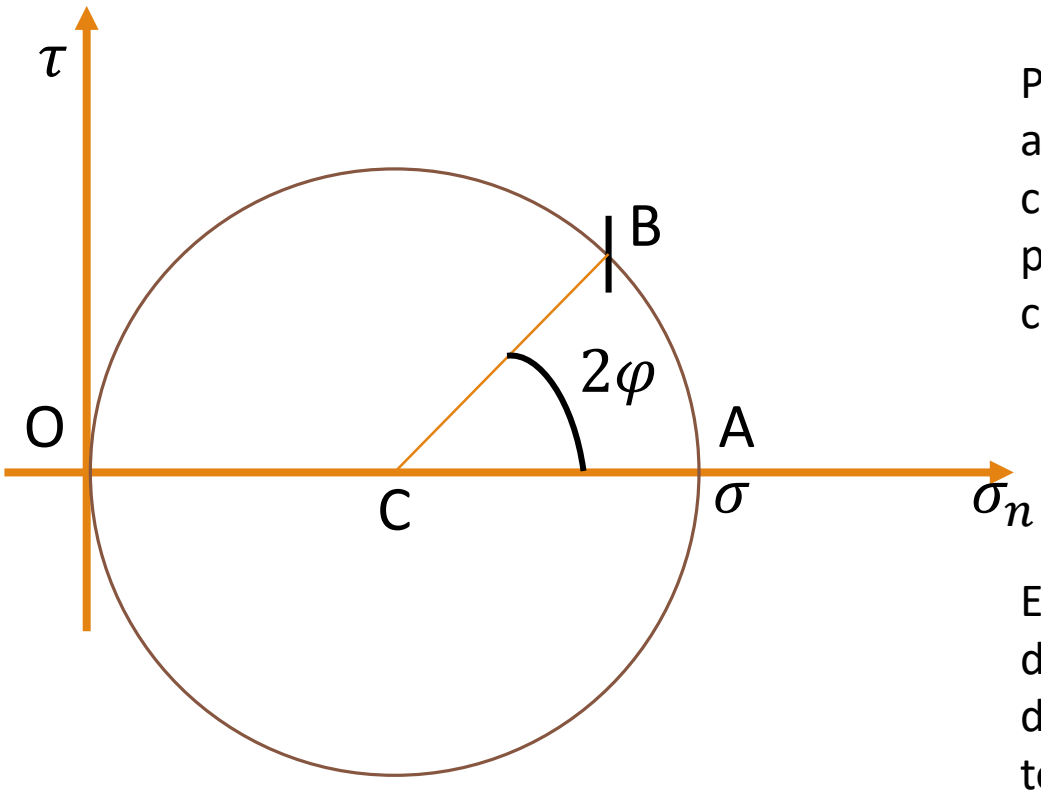
Contrainte sur plan incliné



Pour toute section $S_\alpha$orienté d'un angle α les composantes de la contrainte peuvent être représentées par les coordonnées d'un point de ce cercle

En décrivant, à partir du point **A** et dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) un arc sous tendant un angle égal à $\mathbf{2\varphi}$.

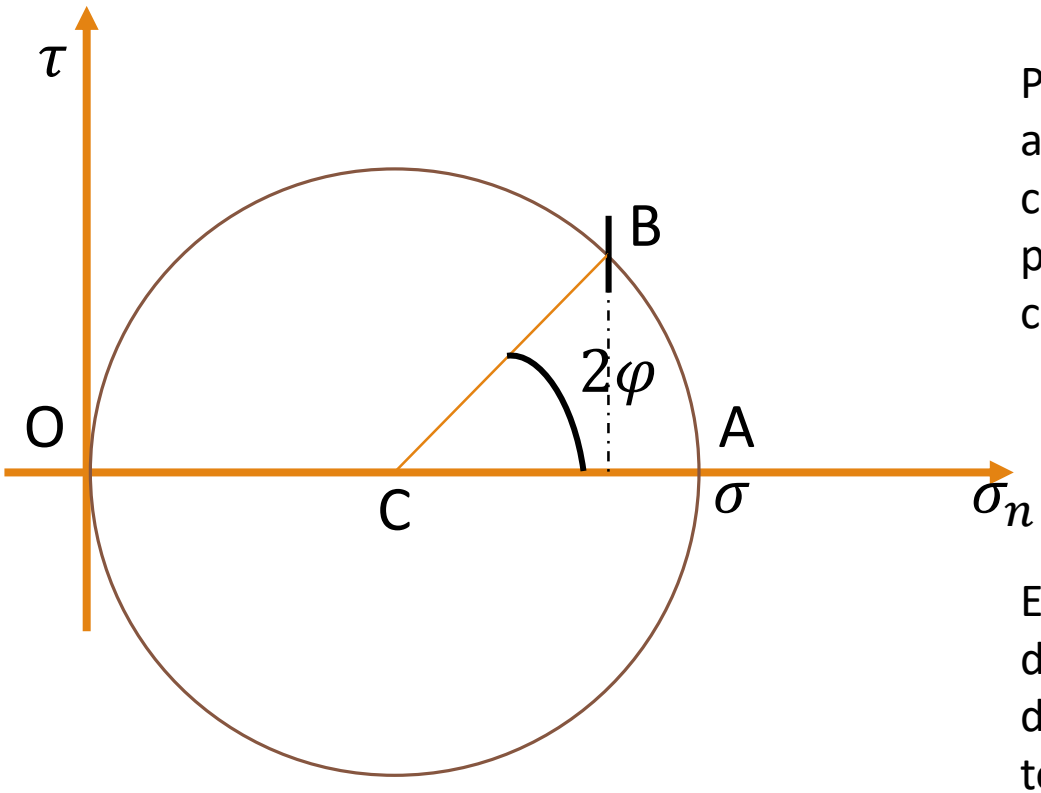
Contrainte sur plan incliné



Pour toute section $S_\alpha$orienté d'un angle α les composantes de la contrainte peuvent être représentées par les coordonnées d'un point de ce cercle

En décrivant, à partir du point **A** et dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) un arc sous tendant un angle égal à $\boldsymbol{2\varphi}$**.**

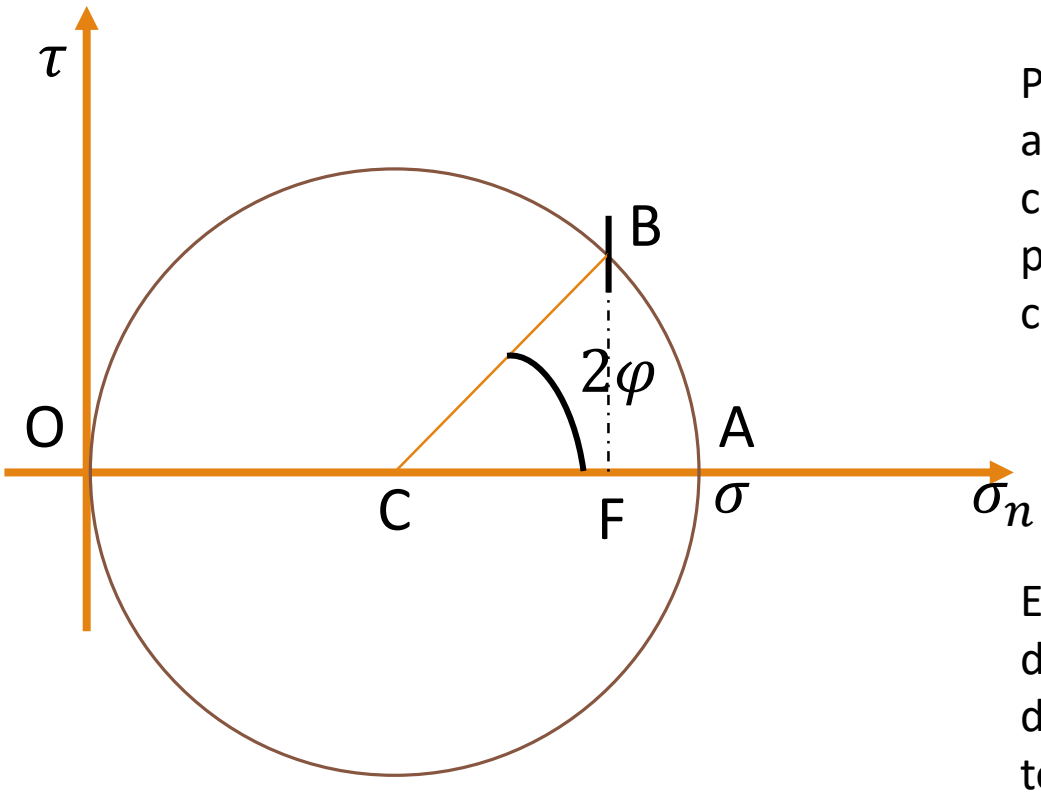
Contrainte sur plan incliné



Pour toute section $S_\alpha$orienté d'un angle α les composantes de la contrainte peuvent être représentées par les coordonnées d'un point de ce cercle .

En décrivant, à partir du point **A** et dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) un arc sous tendant un angle égal à $\boldsymbol{2\varphi}$**.**

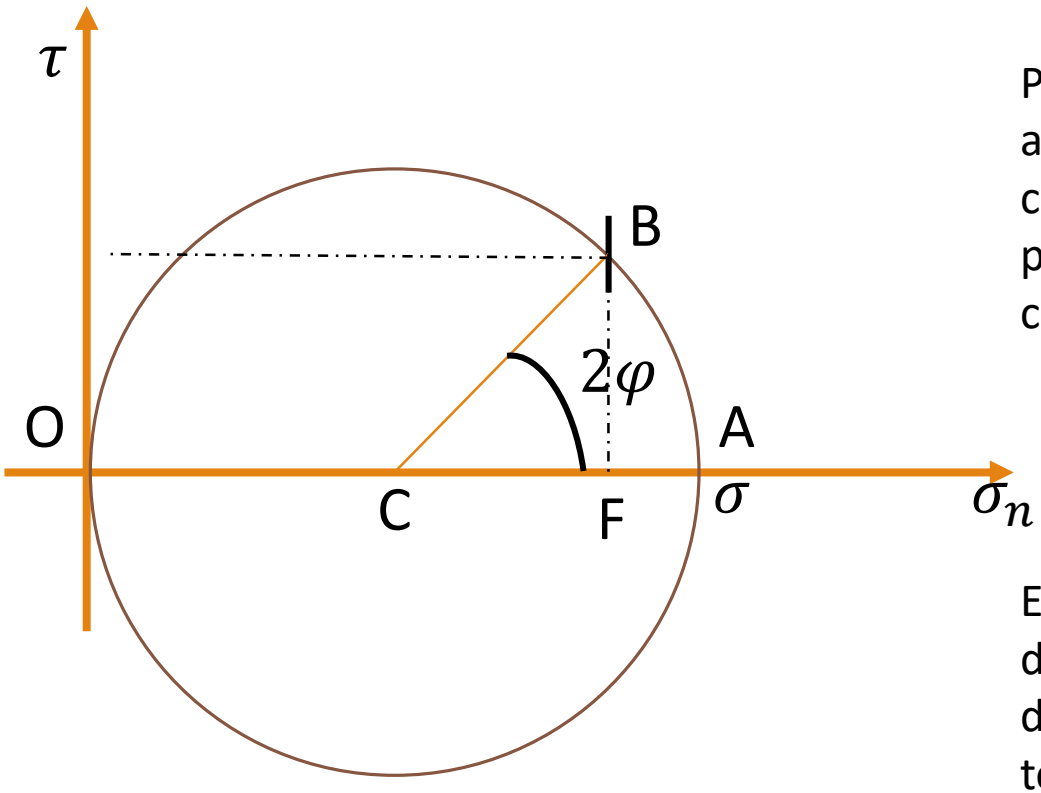
Contrainte sur plan incliné



Pour toute section $S_\alpha$orienté d'un angle α les composantes de la contrainte peuvent être représentées par les coordonnées d'un point de ce cercle .

En décrivant, à partir du point **A** et dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) un arc sous tendant un angle égal à $\boldsymbol{2\varphi}$**.**

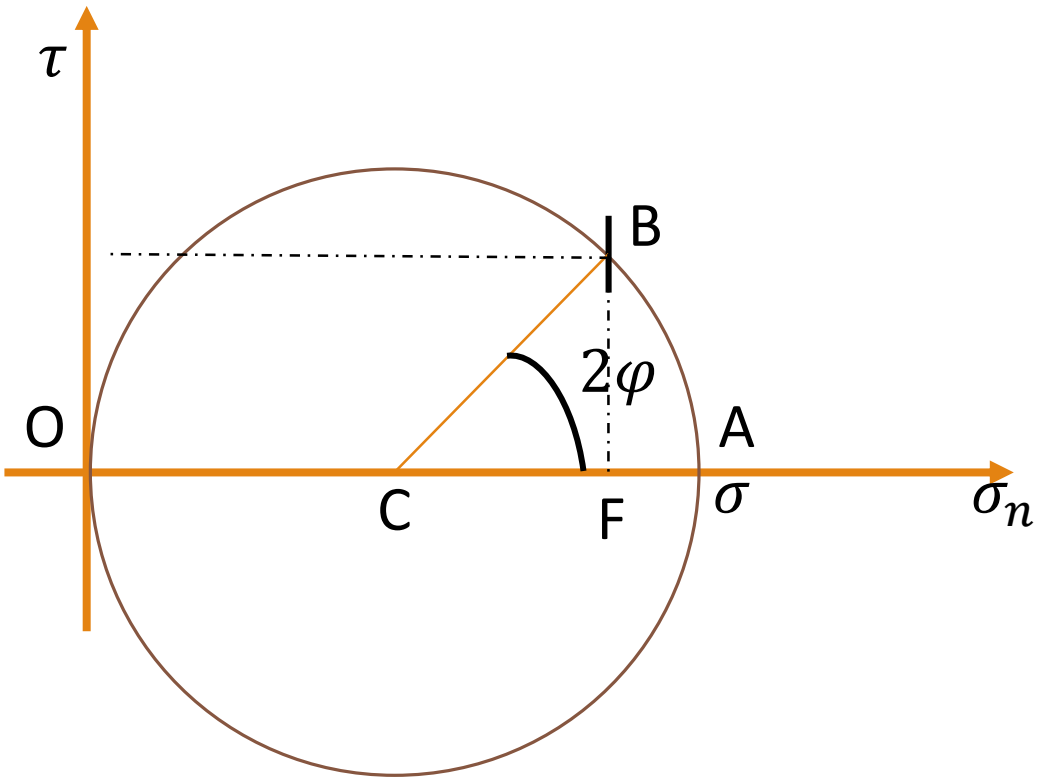
Contrainte sur plan incliné



Pour toute section $S_\alpha$orienté d'un angle α les composantes de la contrainte peuvent être représentées par les coordonnées d'un point de ce cercle .

En décrivant, à partir du point **A** et dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) un arc sous tendant un angle égal à $\boldsymbol{2\varphi}$**.**

Contrainte sur plan incliné



A partir du cercle on peut écrire

$$OF = OC + CF = \frac{1}{2}\sigma + \frac{1}{2}\sigma\cos 2\varphi$$

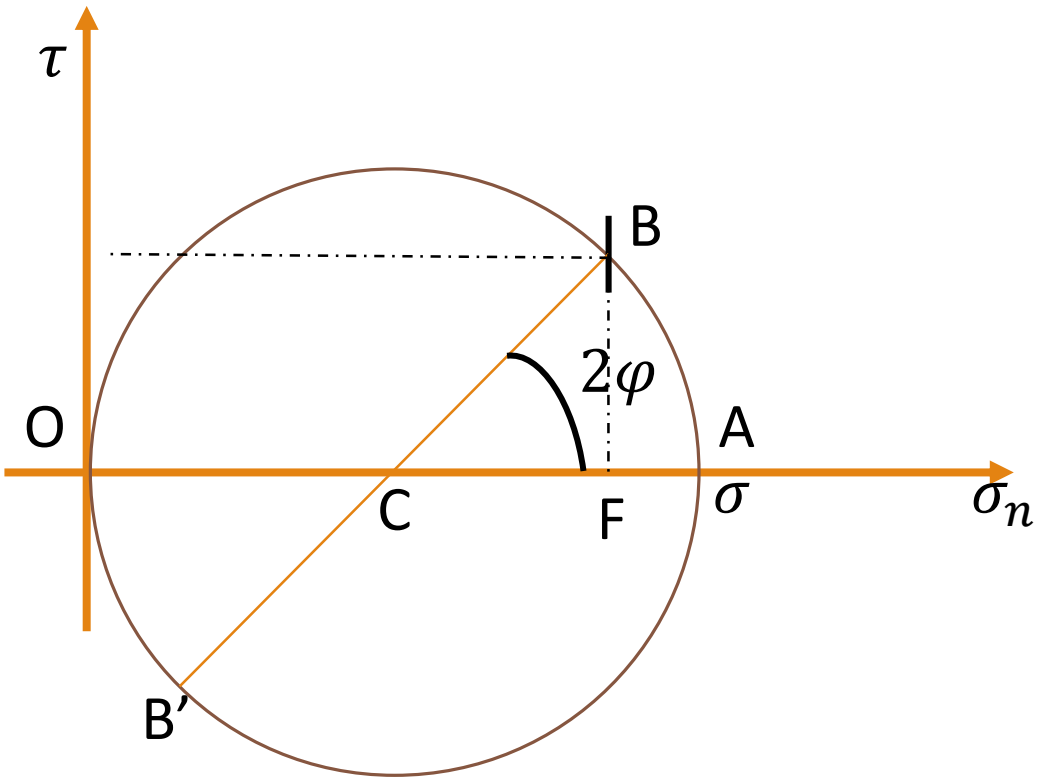
$$cos2\varphi = 2cos^2\varphi - 1$$

$$\boldsymbol{OF = \sigma cos^2\varphi}$$

$$BF = CBsin2\varphi = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\varphi$$

$$\boldsymbol{BF = \frac{1}{2}\sigma\, sin\, 2\varphi}$$

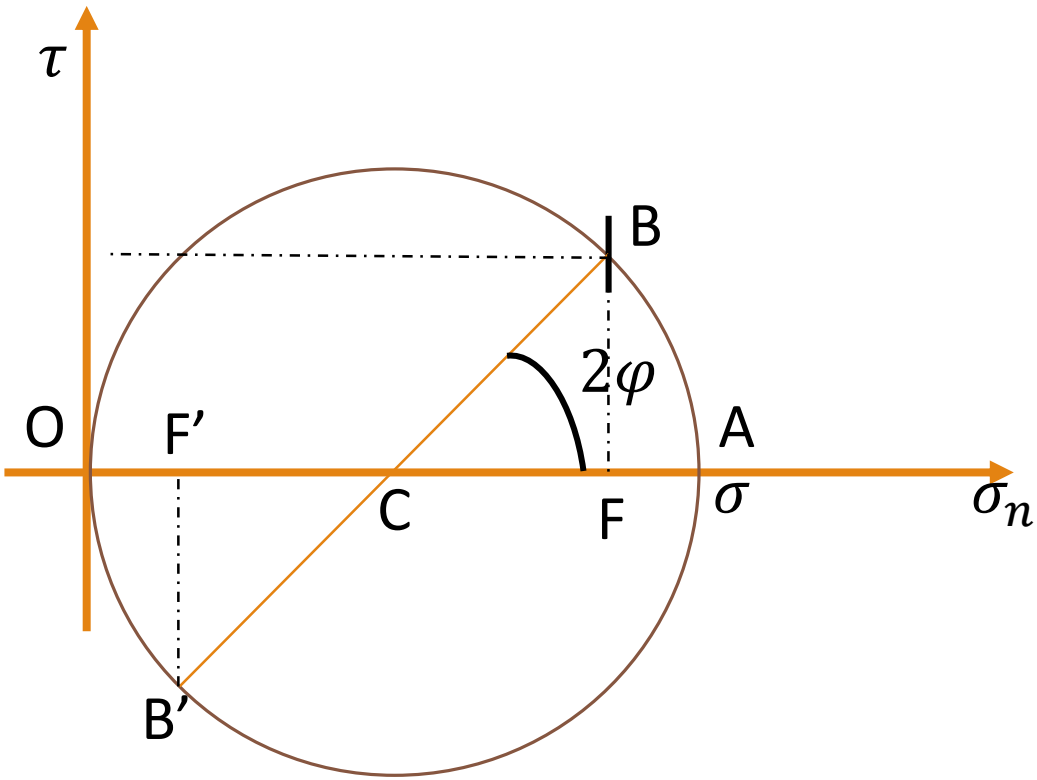
Contrainte sur plan incliné



B' représente sur le cercle le plan perpendiculaire au plan par le point B.

Les composantes de sa contrainte

Contrainte sur plan incliné



B' représente sur le cercle le plan perpendiculaire au plan par le point B.

Les composantes de sa contrainte

$\sigma_n(B') =$ OF'=OC−F'C=$\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sigma\, cos2\varphi$

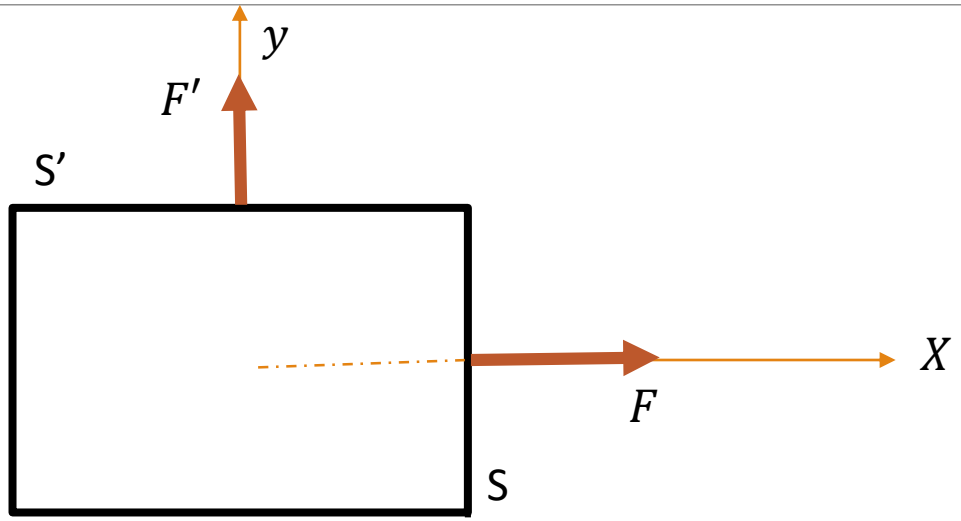
$cos2\varphi = 1 - sin^2\varphi$

$$\boldsymbol{\sigma_n(B') =} \textbf{OF'=} \boldsymbol{\sigma\, sin^2\varphi}$$

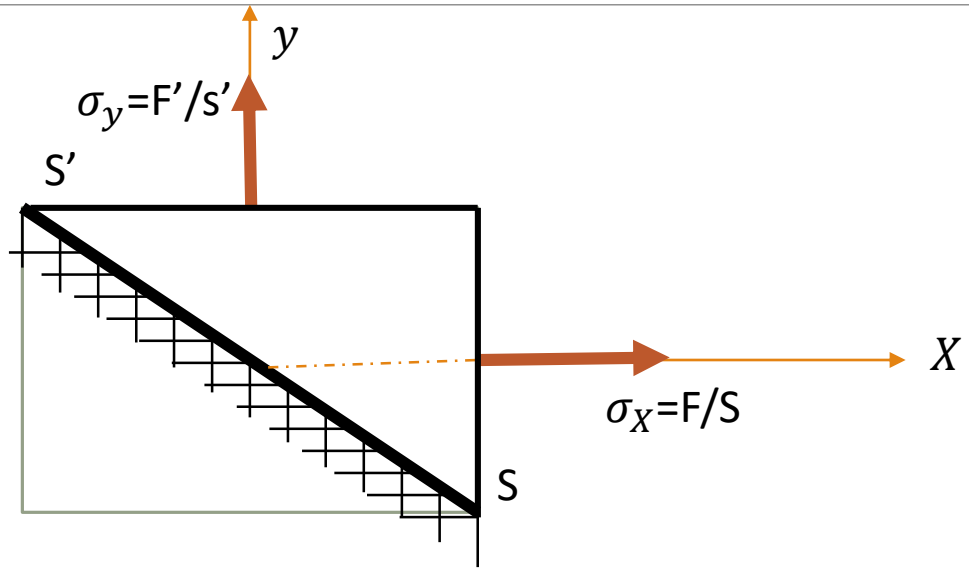
$$\tau(B') = -F'B' = -CB' sin2\varphi$$
$$= -\frac{1}{2}\sigma\, sin2\varphi$$

$$\boldsymbol{\tau(B') = -\frac{1}{2}\sigma\, sin2\varphi}$$

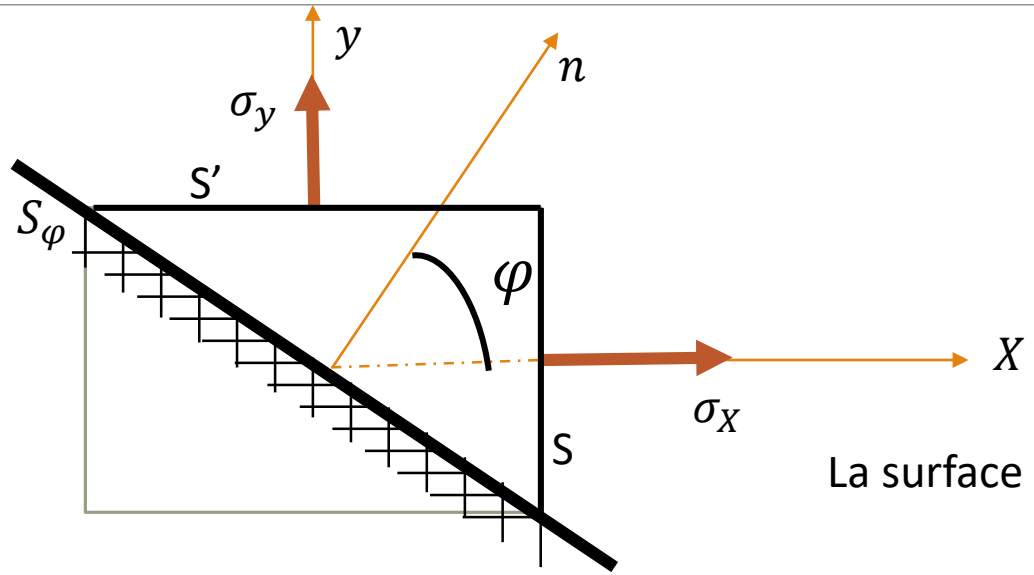
Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires



Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires



Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires

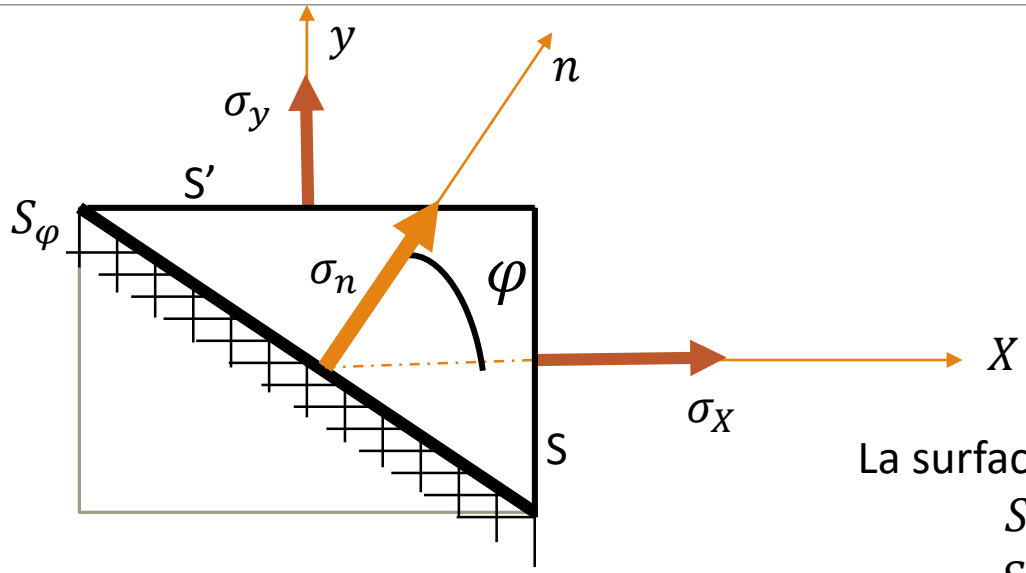


La surface du plan inclinée

$$S_\varphi = S\cos\varphi$$

$$S_\varphi = S'\sin\varphi$$

Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires

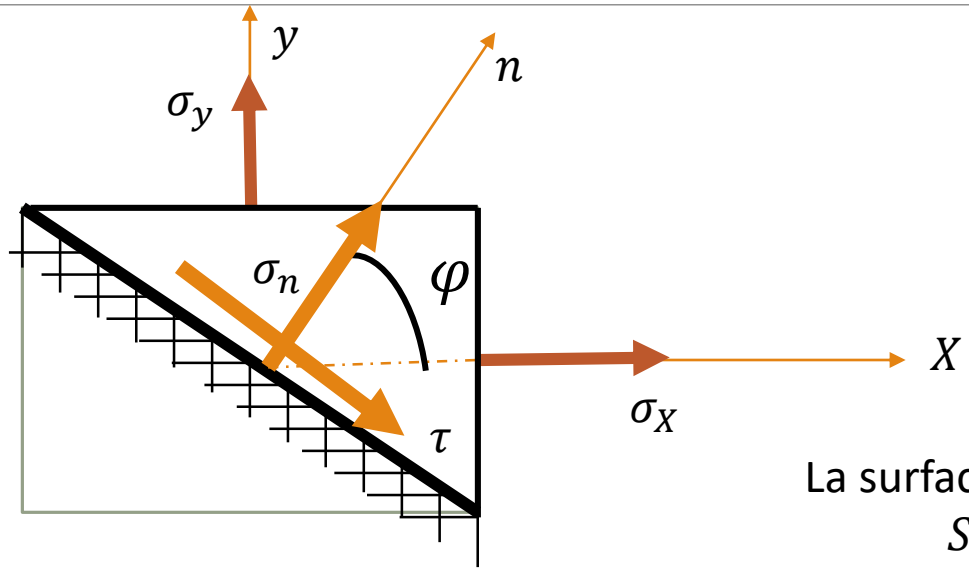


La surface du plan inclinée

$$S_\varphi = S\cos\varphi$$

$$S_\varphi = S'\sin\varphi$$

Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires



La surface du plan inclinée

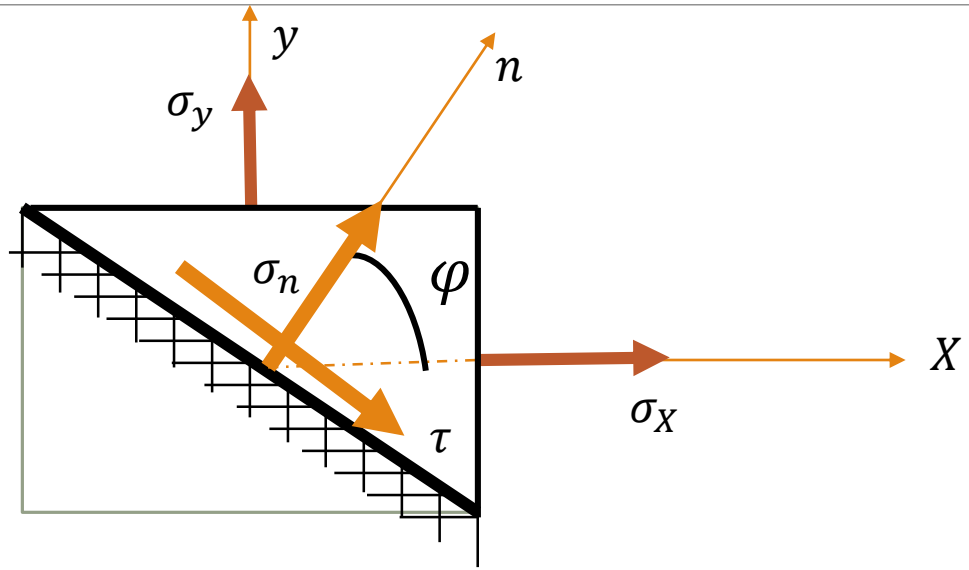
$$S_\varphi = S\ /\cos\varphi$$

$$S_\varphi = S'/\ sin\varphi$$

$$\sigma_{x\varphi} = \sigma_x\ cos\varphi$$

$$\sigma_{y\varphi} = \sigma_y\ sin\varphi$$

Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires



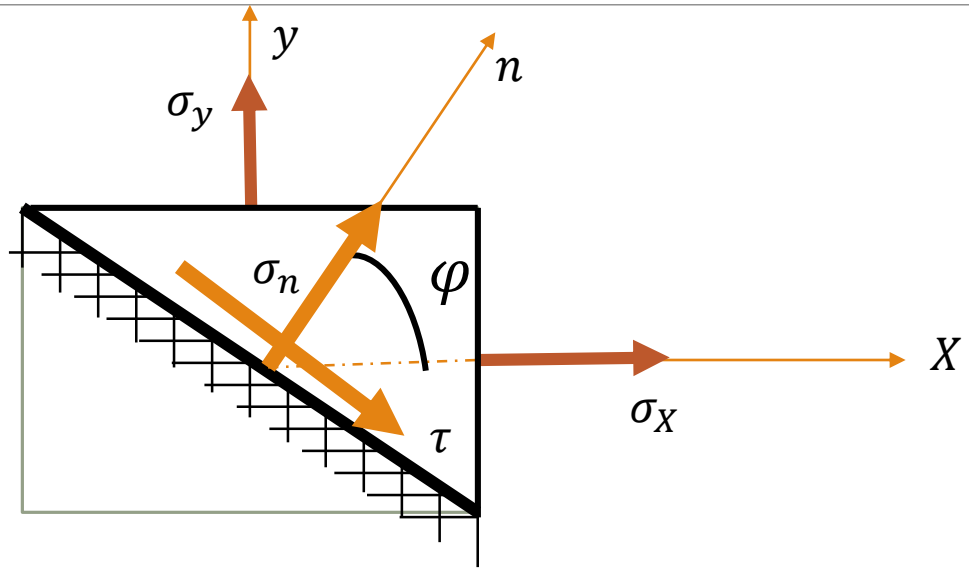
$$\sigma_{x\varphi} = \sigma_x \cos\varphi$$

$$\sigma_{y\varphi} = \sigma_y \sin\varphi$$

$$\sigma_n' = \sigma_{x\varphi}\cos\varphi = \sigma_x\cos^2\varphi \qquad \tau' = \sigma_{x\varphi}\sin\varphi = \sigma_x\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sigma_x\sin 2\varphi \quad (1)$$

$$\sigma_n'' = \sigma_{y\varphi}\sin\varphi = \sigma_y\sin^2\varphi \qquad \tau'' = -\sigma_{y\varphi}\cos\varphi = -\sigma_y\sin\varphi\cos\varphi = -\frac{1}{2}\sigma_y\sin 2\varphi \quad (2)$$

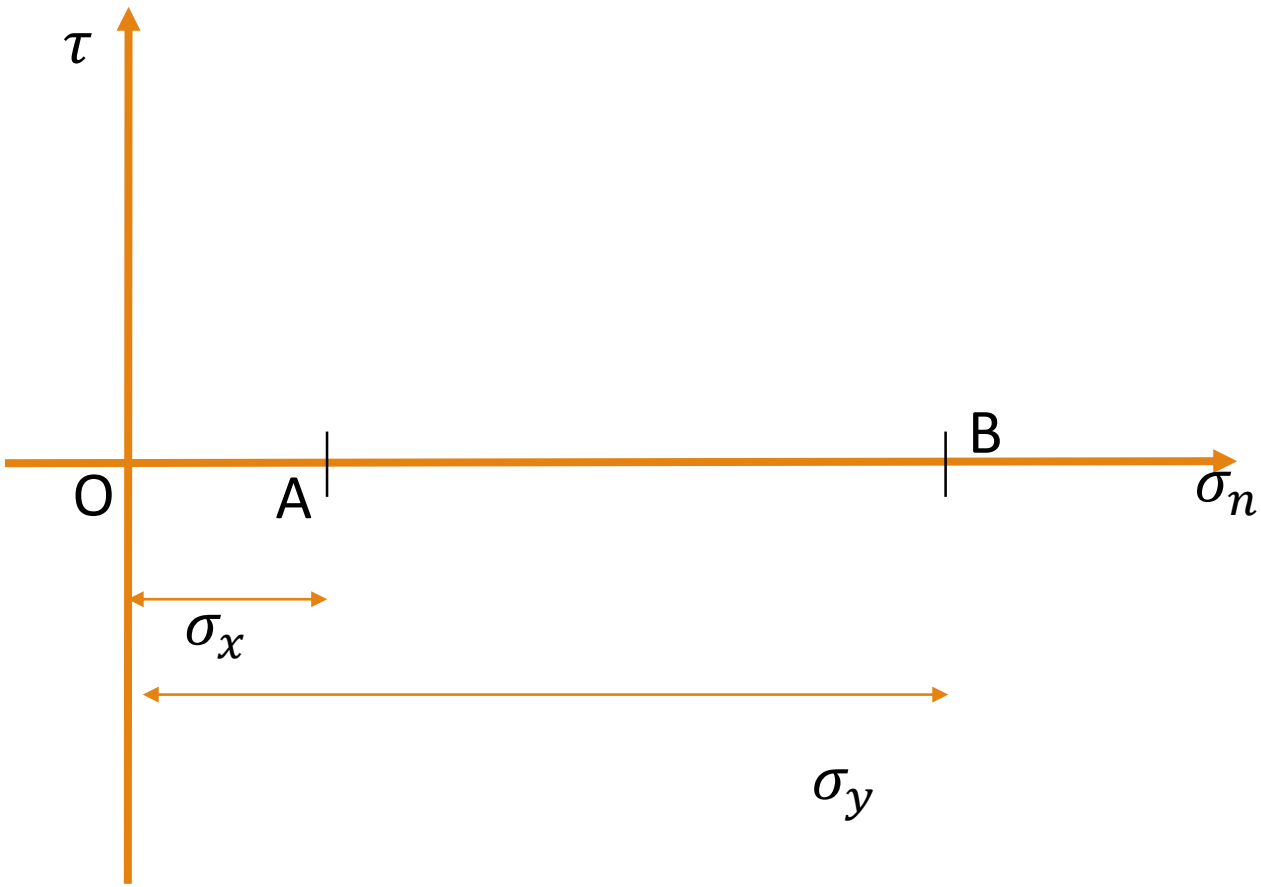
Contraintes agissant suivant deux directions perpendiculaires



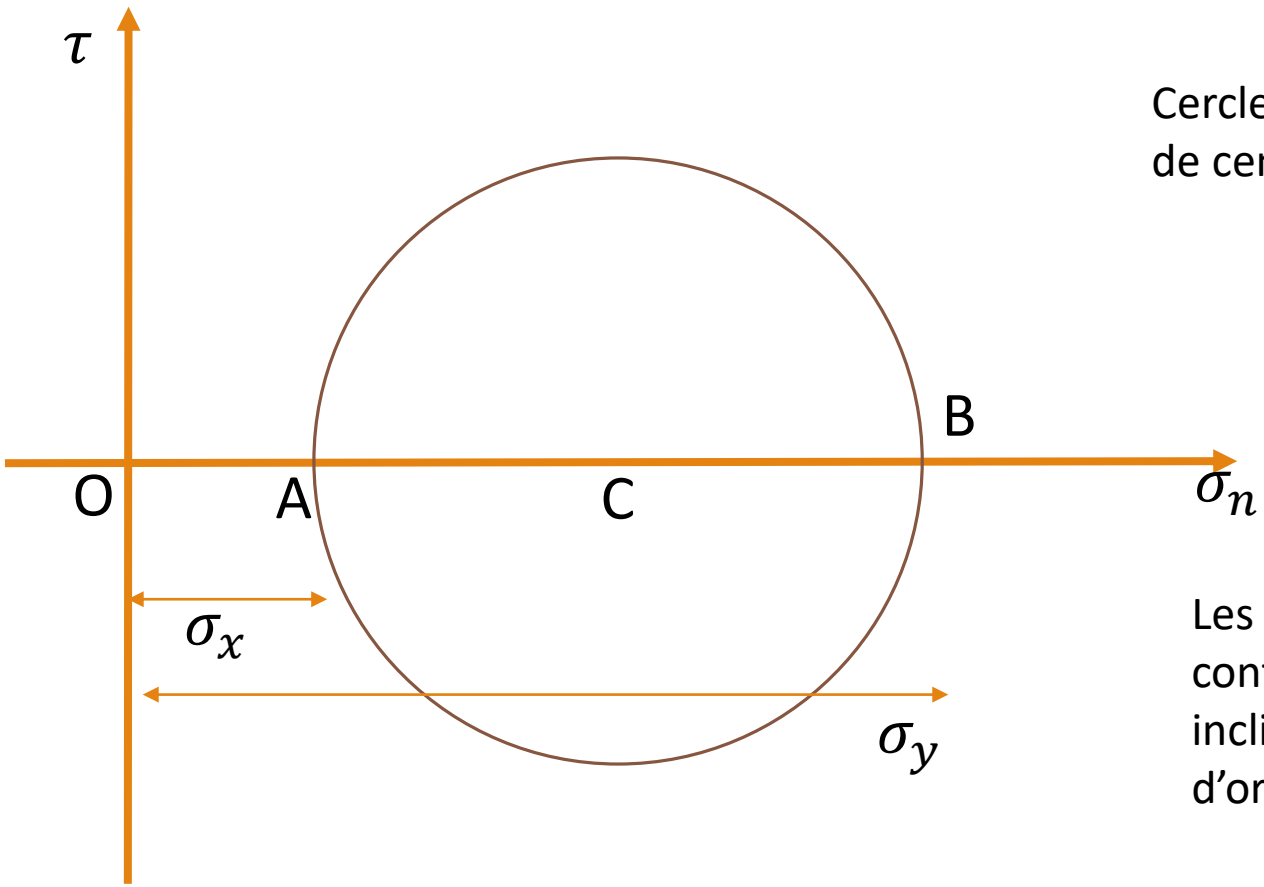
$\boldsymbol{\sigma_n = \sigma_x cos^2\varphi + \sigma_y sin^2\varphi}$ contrainte normale résultante sur le plan incliné

$\boldsymbol{\tau = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) sin2\varphi}$ contrainte de cisaillement résultante sur le plan incliné

Cercle de Mohr des contraintes associées



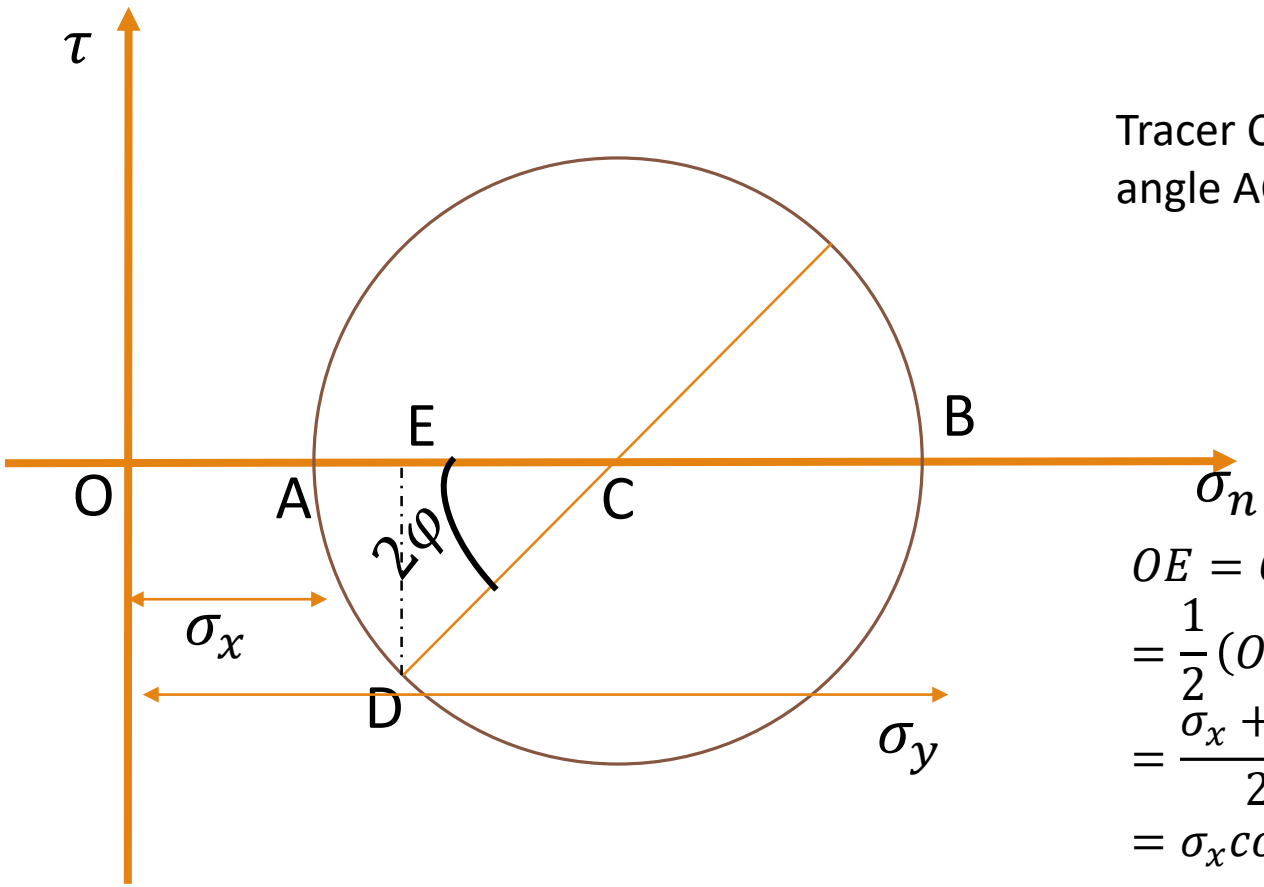
Cercle de Mohr des contraintes associées



Cercle de diamètre AB et de centre C

Les composantes de la contrainte sur un plan incliné quelconque d'orientation φ

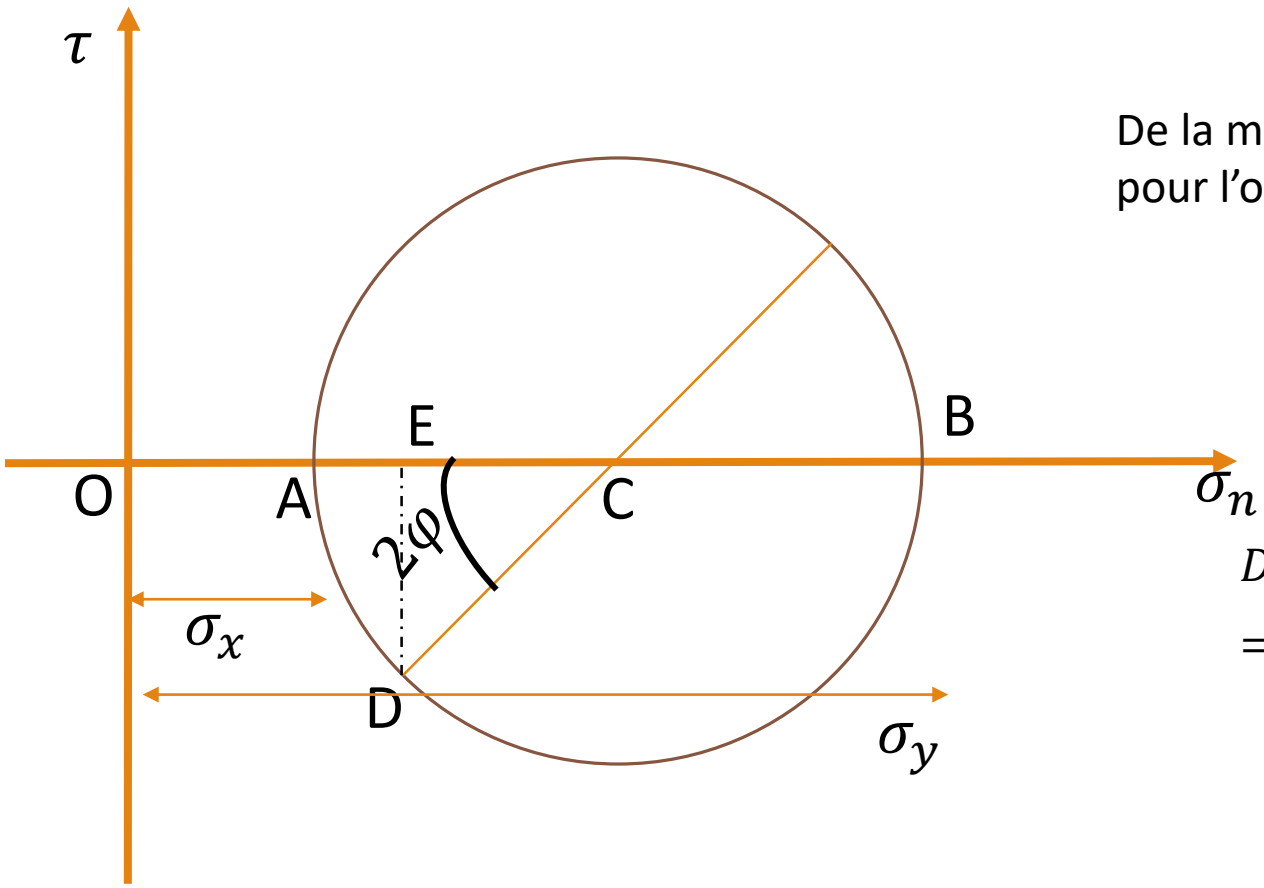
Cercle de Mohr des contraintes associées



Tracer CD faisant un angle ACD égal à 2φ

$$OE = OC - CE$$
$$= \frac{1}{2}(OB - OA)cos2\varphi$$
$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}cos2\varphi$$
$$= \sigma_x cos^2\varphi + \sigma_y sin^2\varphi$$

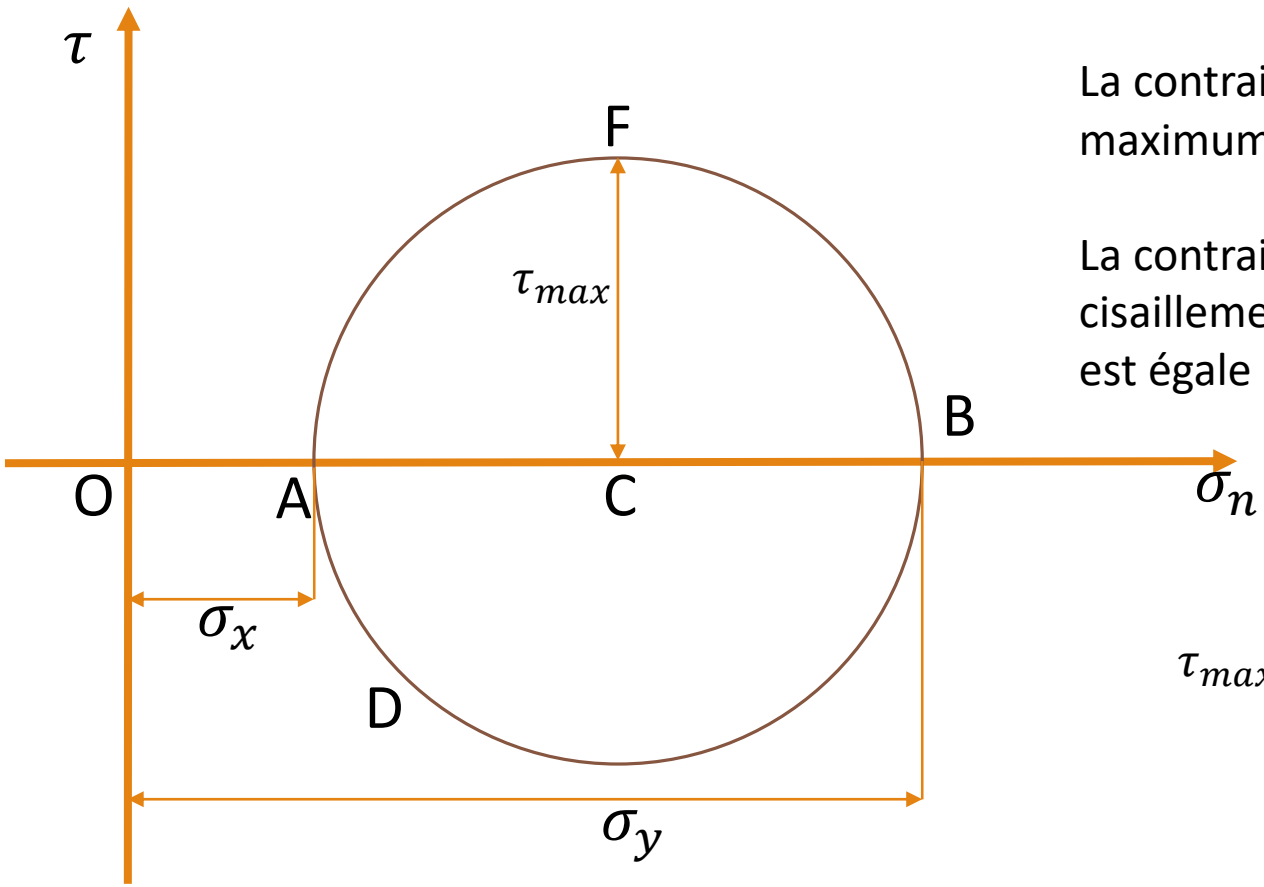
Cercle de Mohr des contraintes associées



De la même manière pour l'ordonnée

$$DE = CD sin2\varphi$$
$$= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} sin2\varphi$$

Cercle de Mohr des contraintes associées



La contrainte normale maximum est égale à σ_y

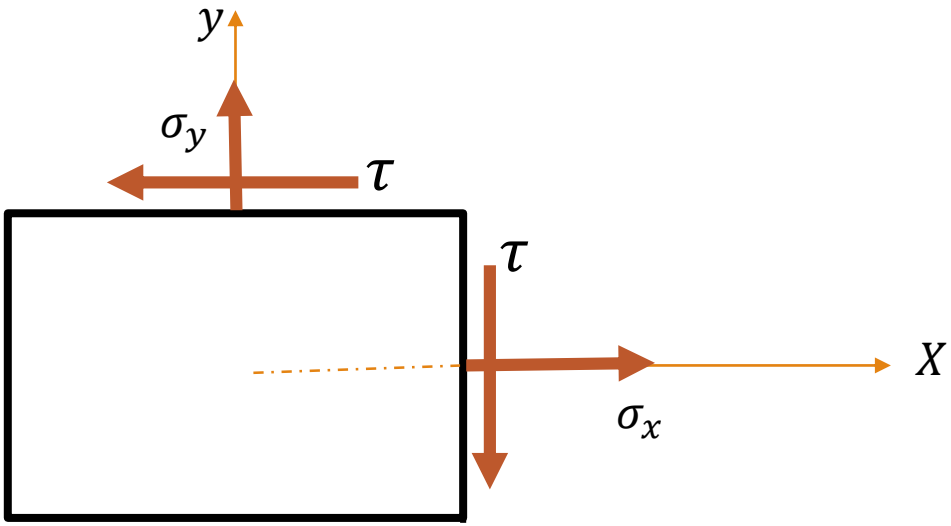
La contrainte de cisaillement maximum est égale au rayon CF

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$$

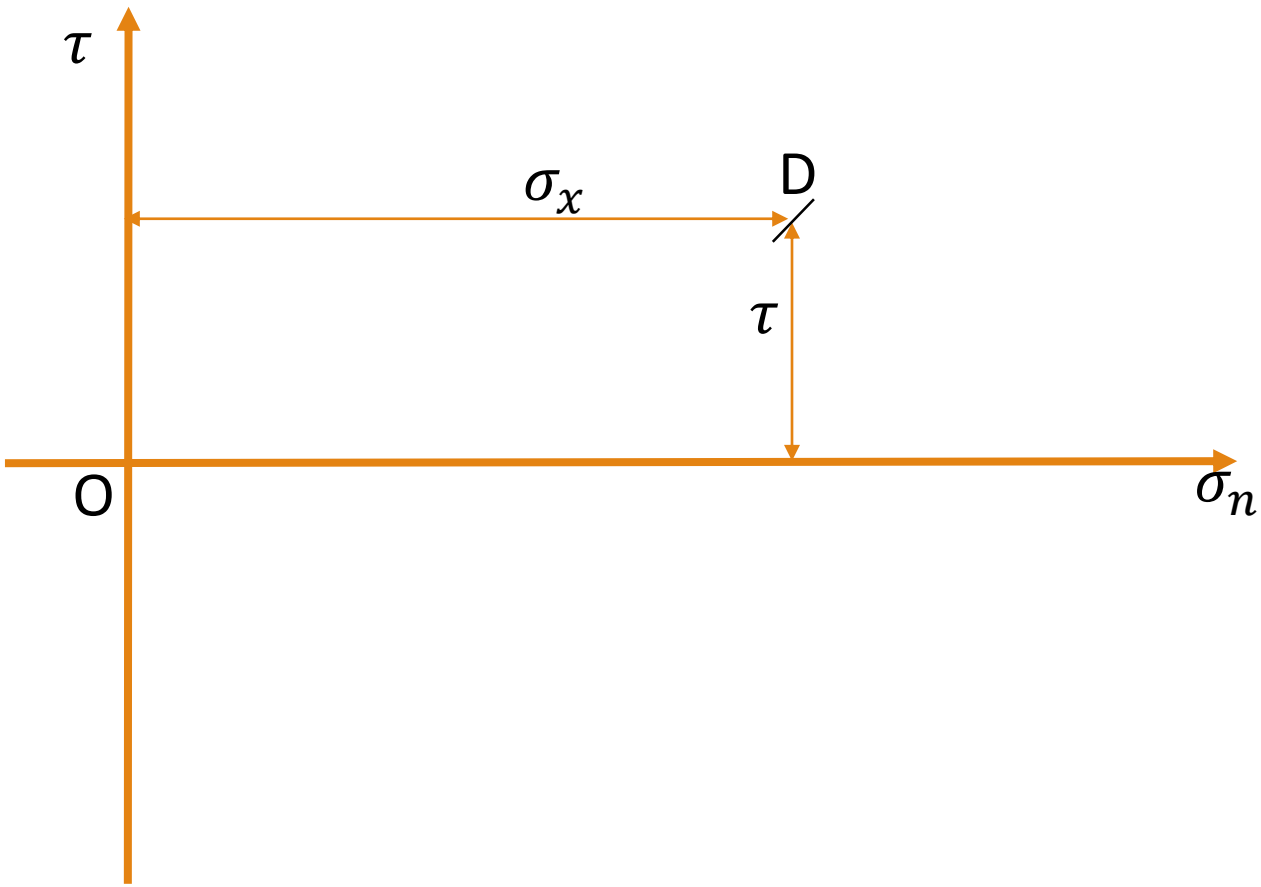
Contraintes principales

- Dans le cas d'une traction ou d'une compression suivant deux directions perpendiculaires x et y, l'une des deux contraintes normales σ_x ou σ_y est maximum et l'autre est minimum.
- Pour tous les plans inclinés, la valeur de la contrainte normale σ_n est comprise entre ces valeurs limites.
- Sur tous ces plans, il s'exerce également des contraintes de cisaillement appelées aussi contraintes tangentielles τ.
- Les contraintes normales σ_x et σ_y sont appelées contraintes principales et les deux plans sur lesquels elles s'exercent sont les plans principaux
- Aucune contrainte de cisaillement ne se développe sur les plans principaux

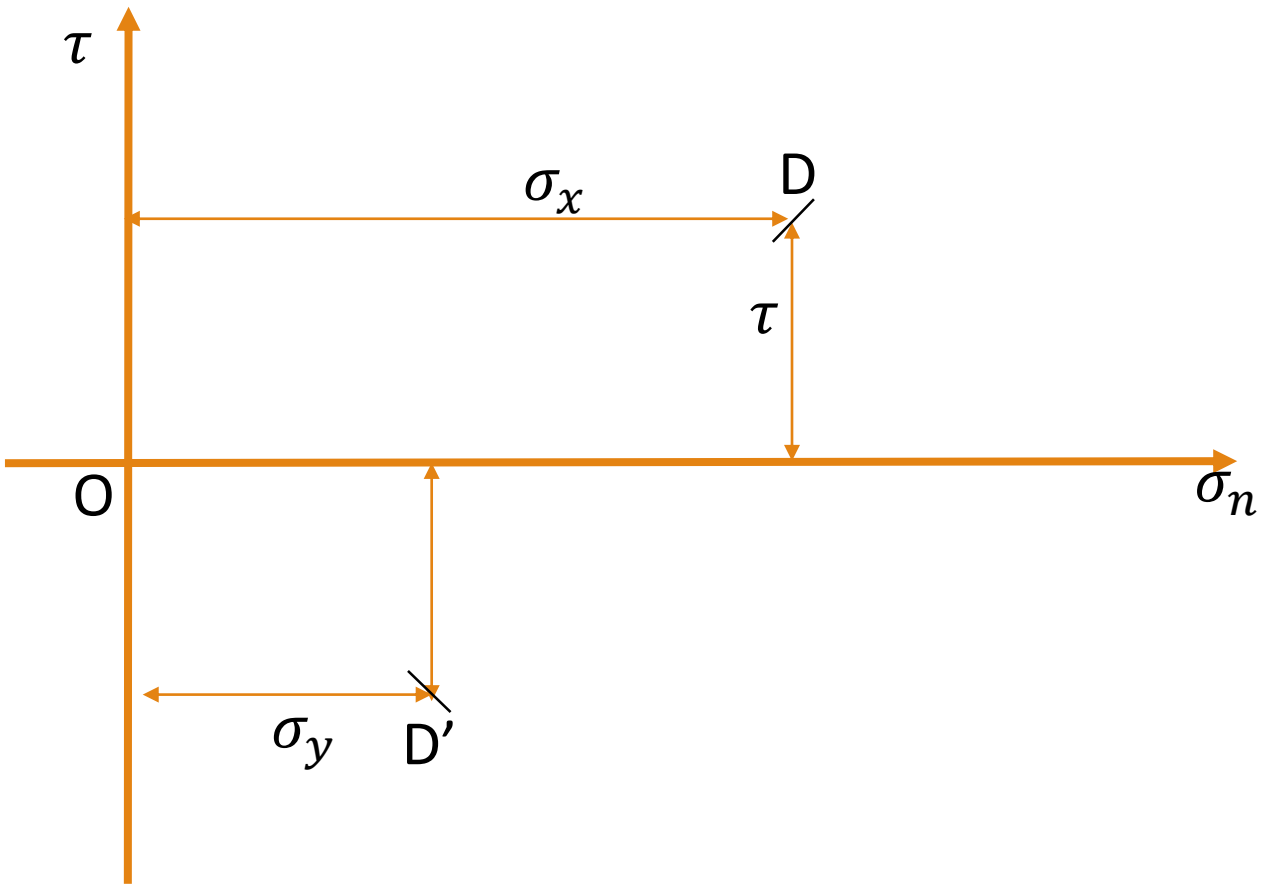
Contraintes principales



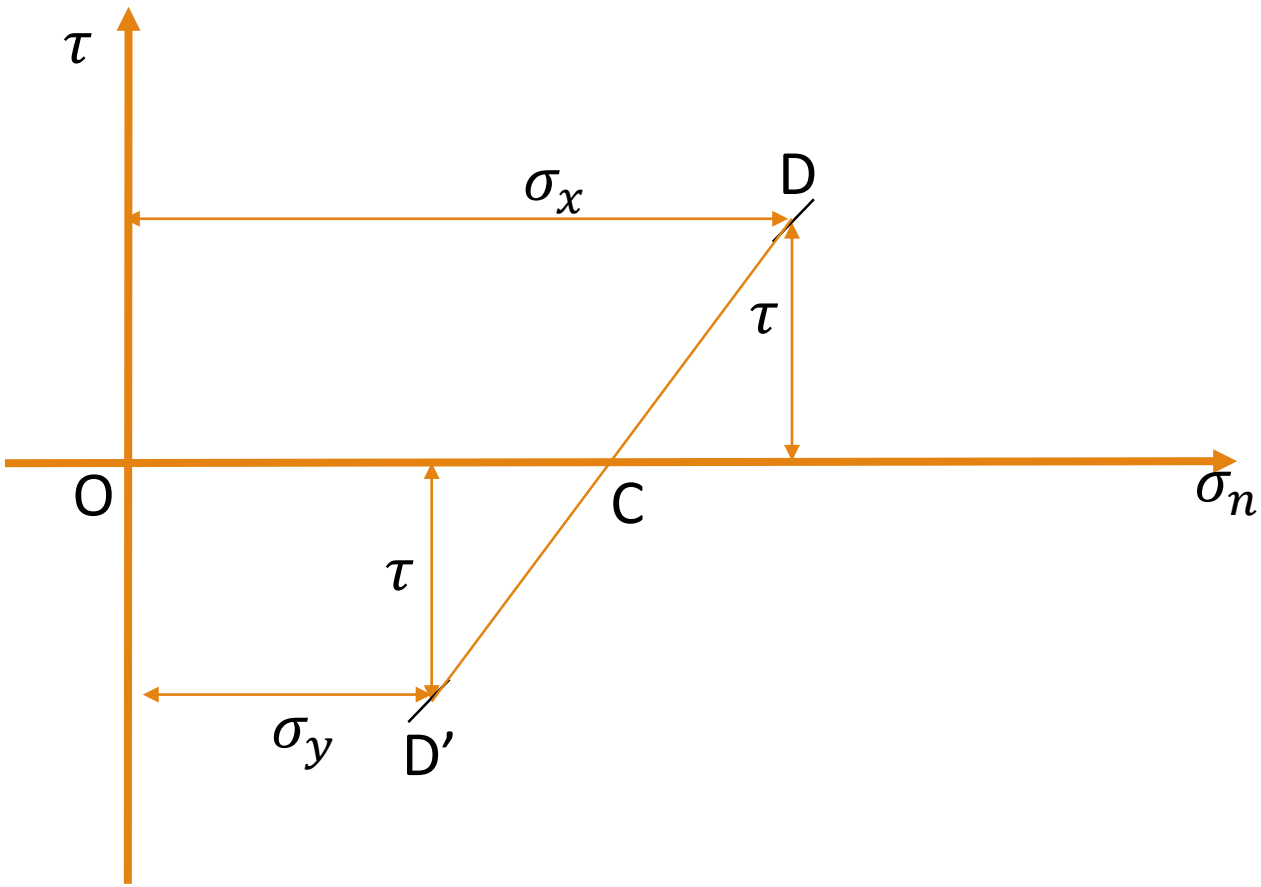
Cercle de Mohr



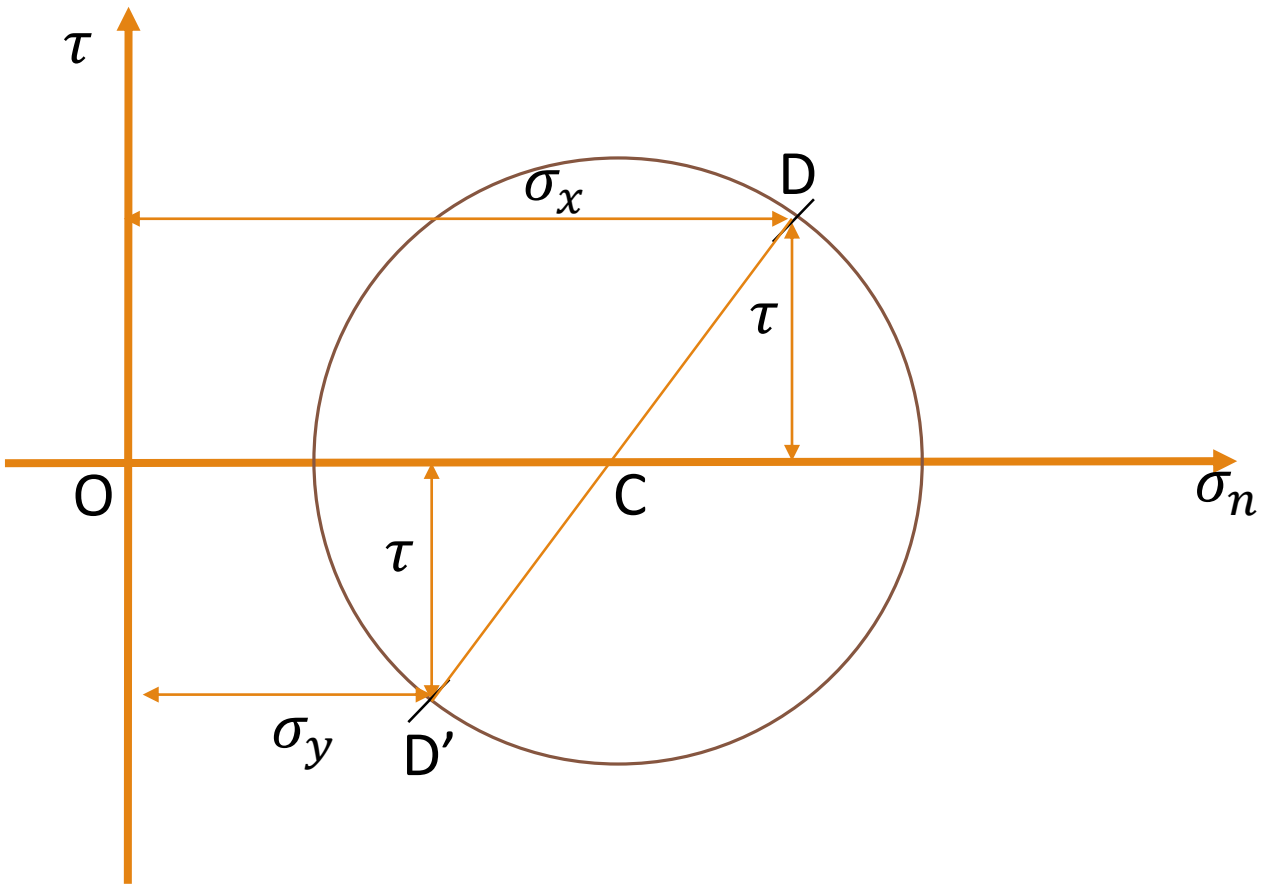
Cercle de Mohr



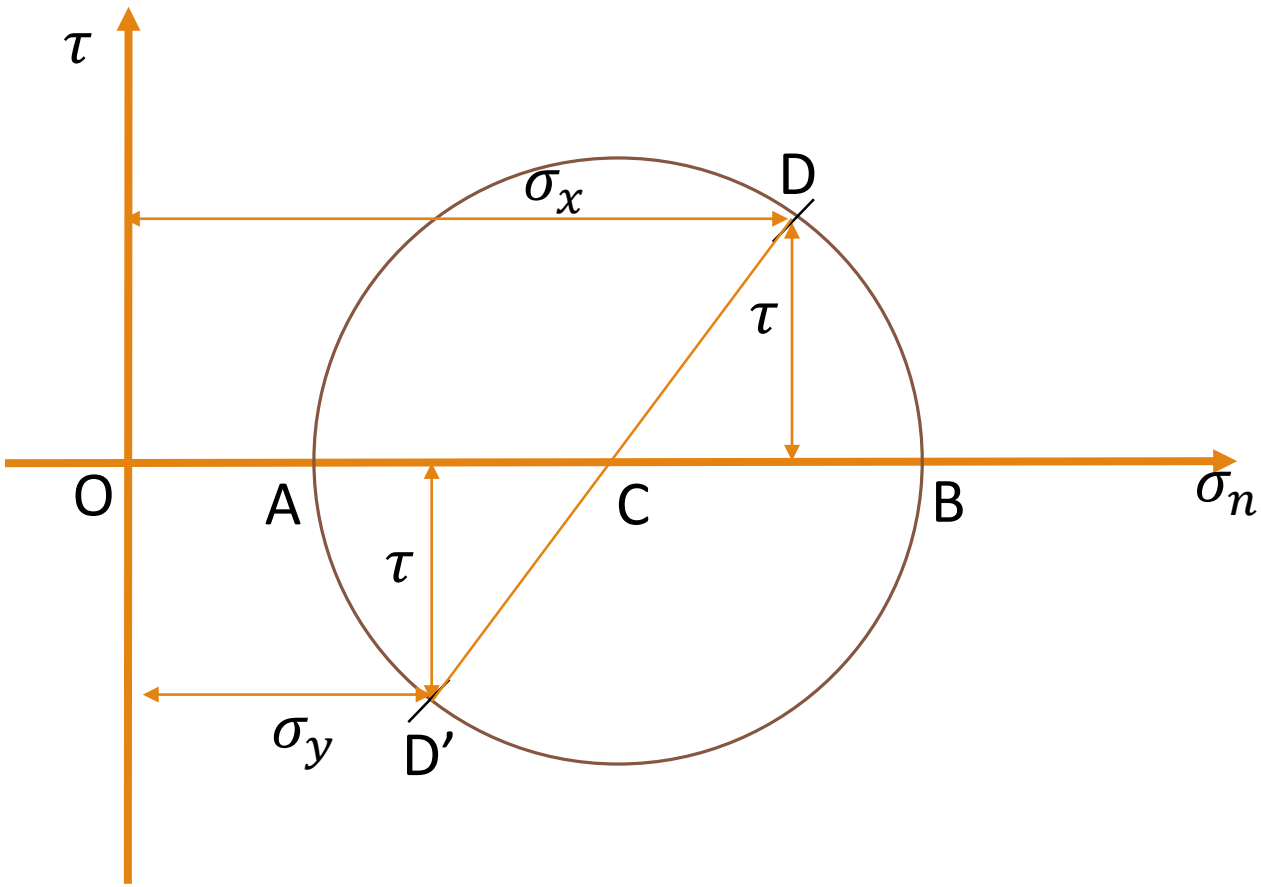
Cercle de Mohr



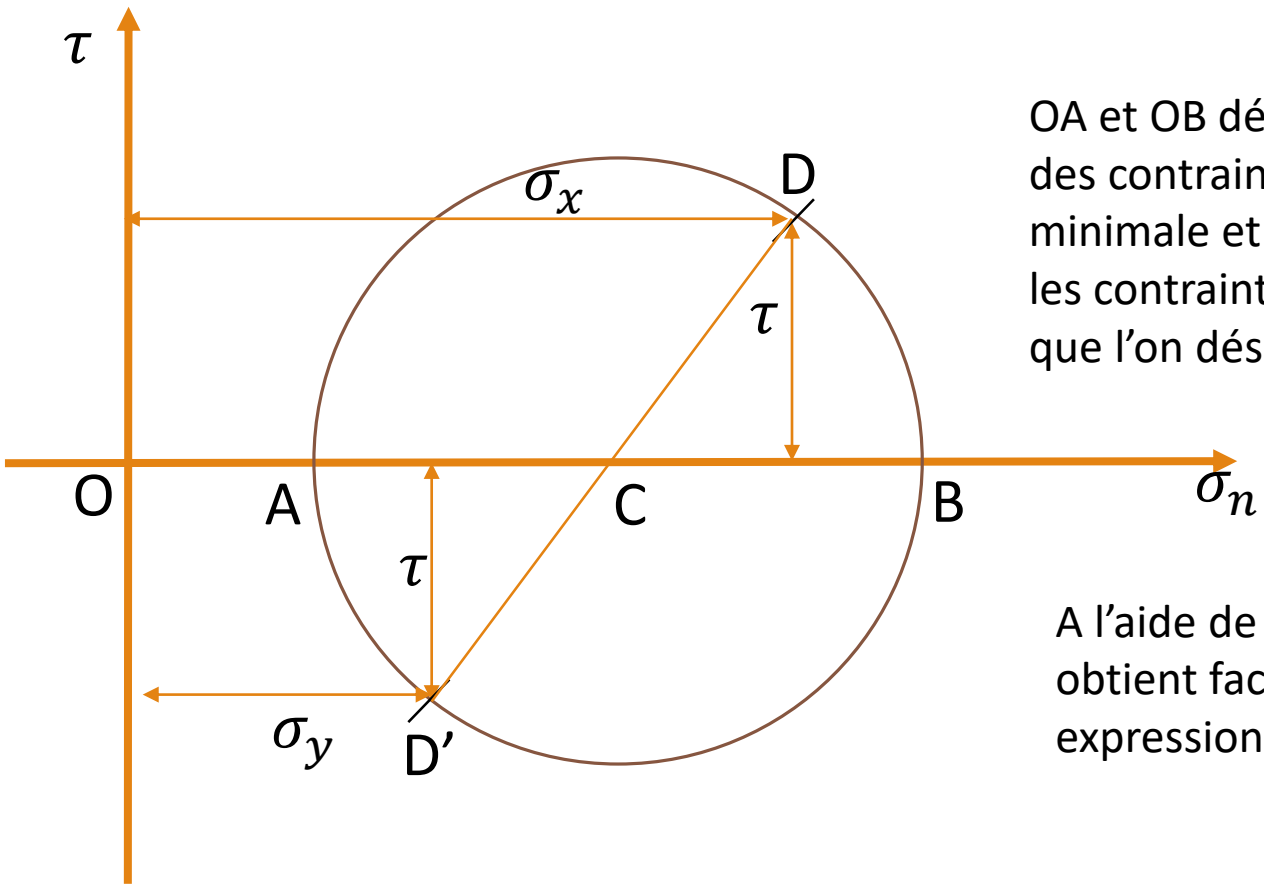
Cercle de Mohr



Cercle de Mohr



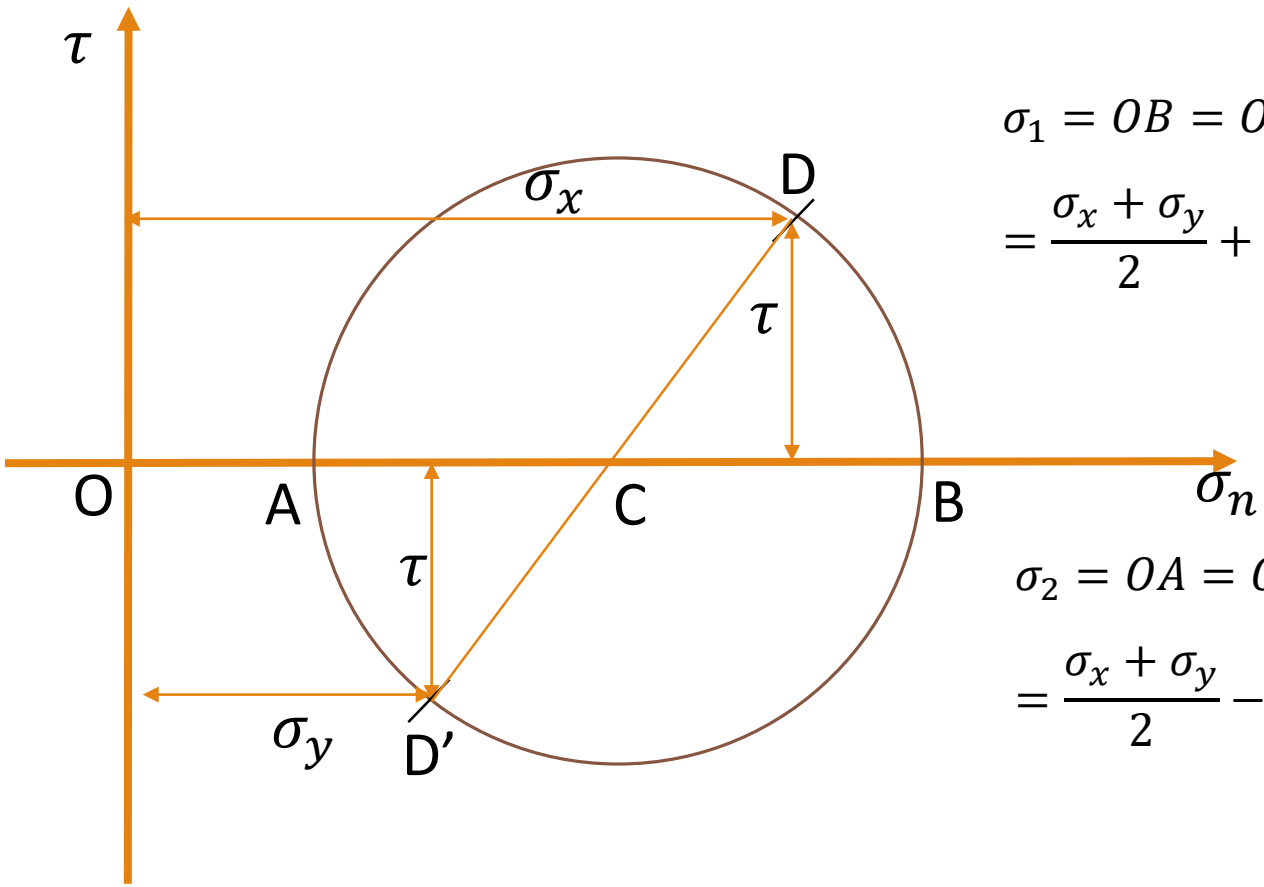
Cercle de Mohr



OA et OB définissent les valeurs des contraintes normales minimale et maximale qui sont les contraintes principales et que l'on désigne par σ_1 et σ_2

A l'aide de ce cercle on obtient facilement les expressions de σ_1 et σ_2

Cercle de Mohr



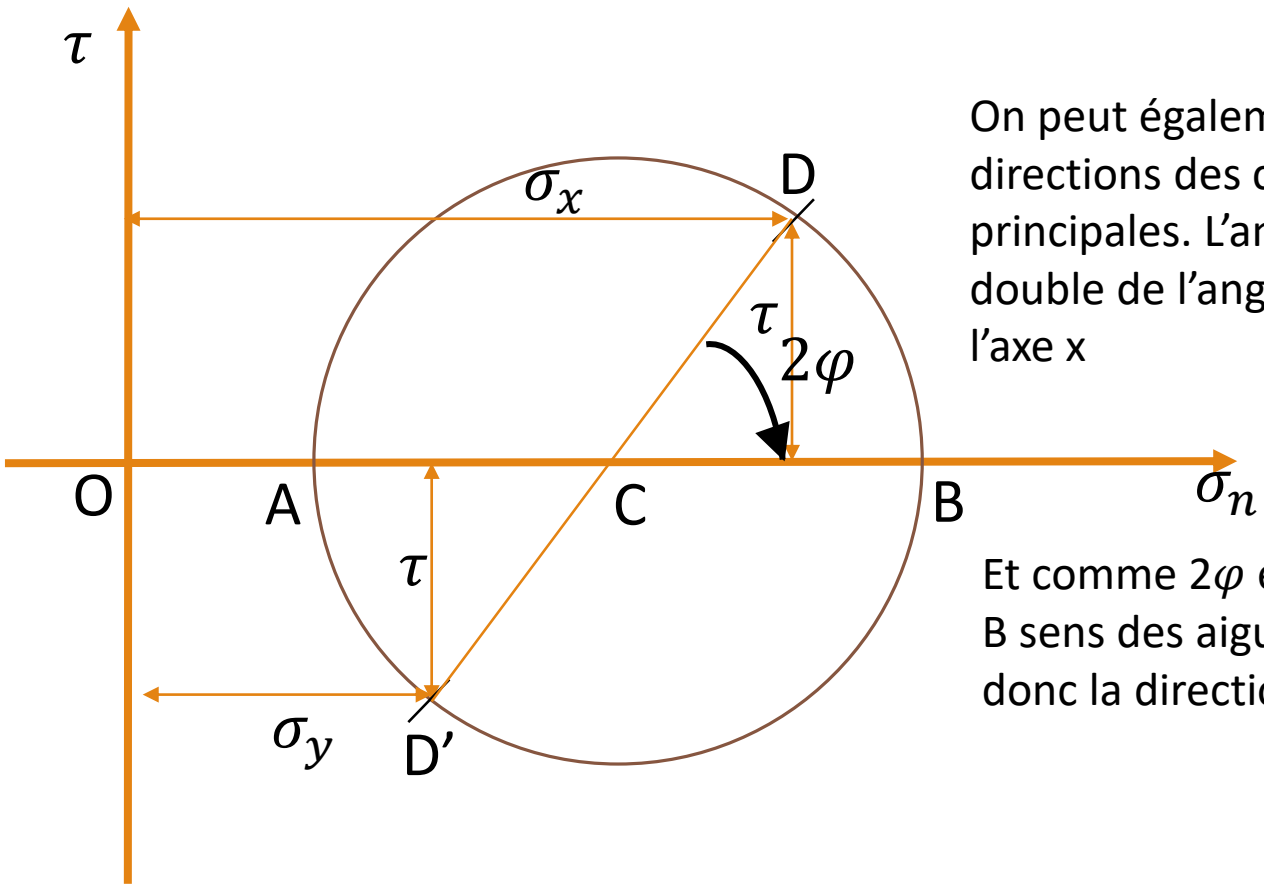
$$\sigma_1 = OB = OC + CD$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = OA = OC - CD$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

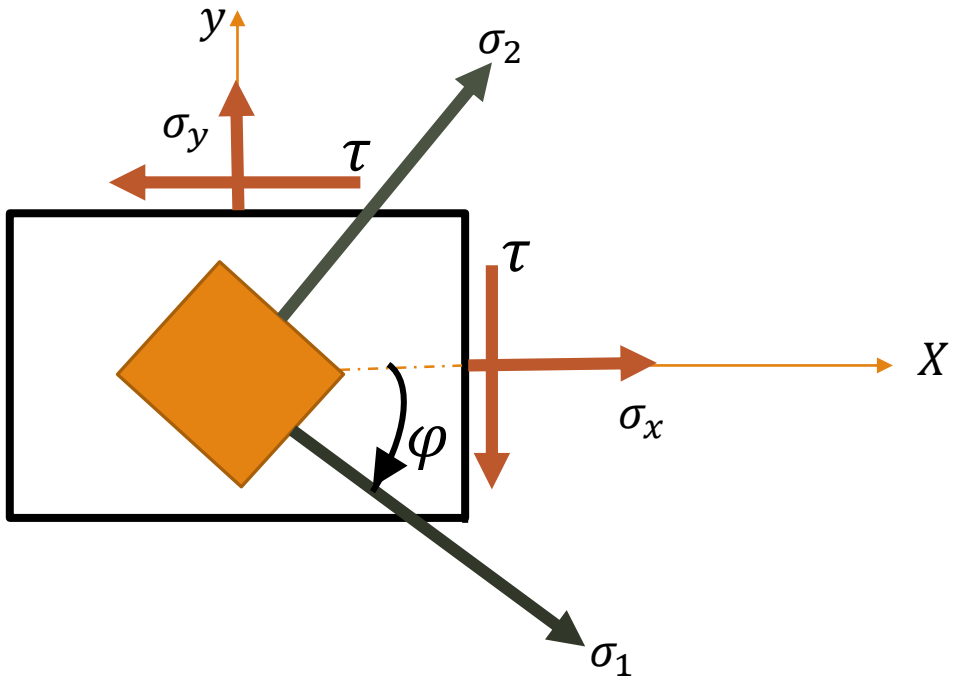
Cercle de Mohr



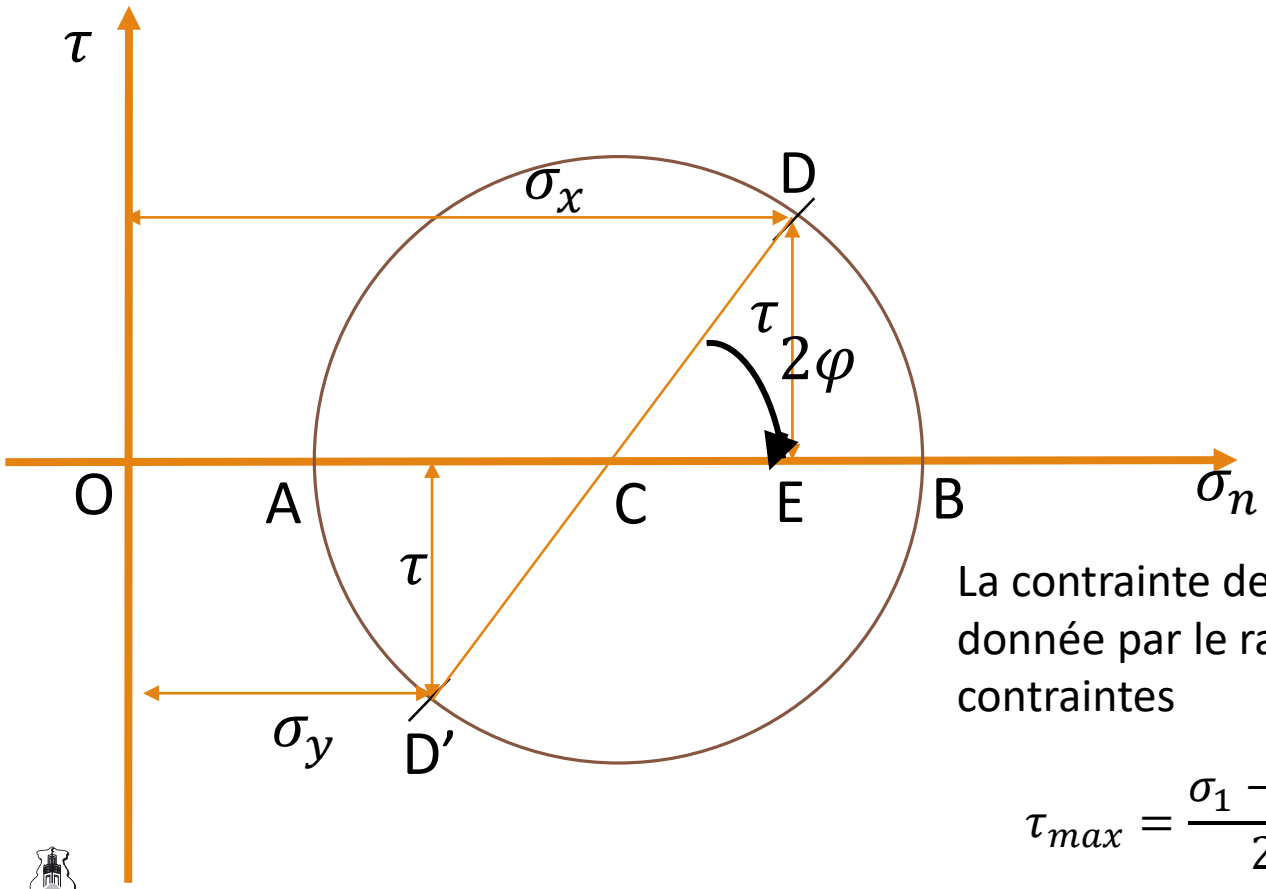
On peut également déterminer les directions des contraintes principales. L'angle DCA est le double de l'angle que fait σ_1 avec l'axe x

Et comme 2φ est compté de D vers B sens des aiguilles d'une montre donc la direction de σ_1 est

Contraintes principales



Cercle de Mohr



$$|tg2\varphi| = \frac{DE}{CE}$$

$$tg2\varphi = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

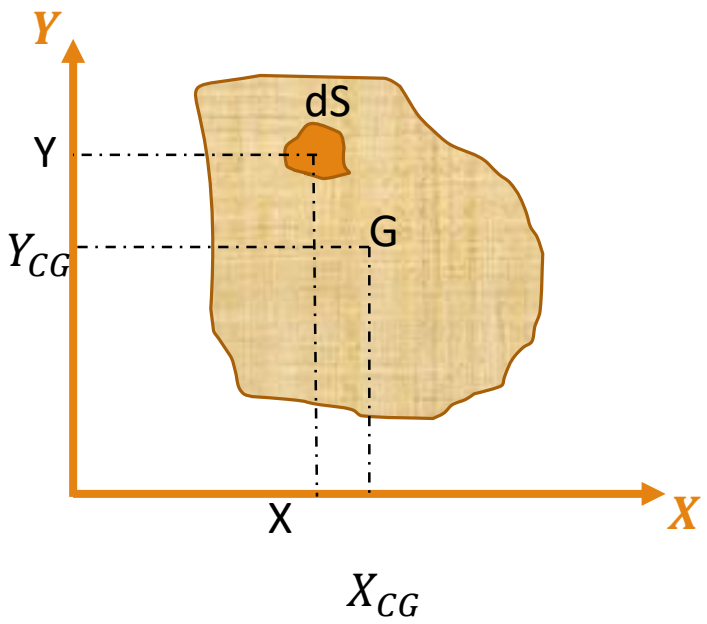
La contrainte de cisaillement maximale est donnée par le rayon du cercle des contraintes

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Caractéristiques géométriques des sections droites

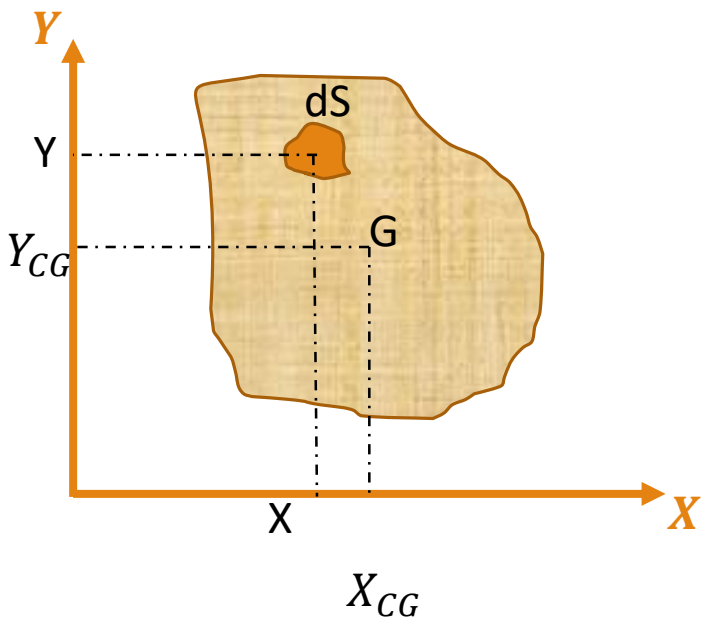
COURS V

Centre de gravité

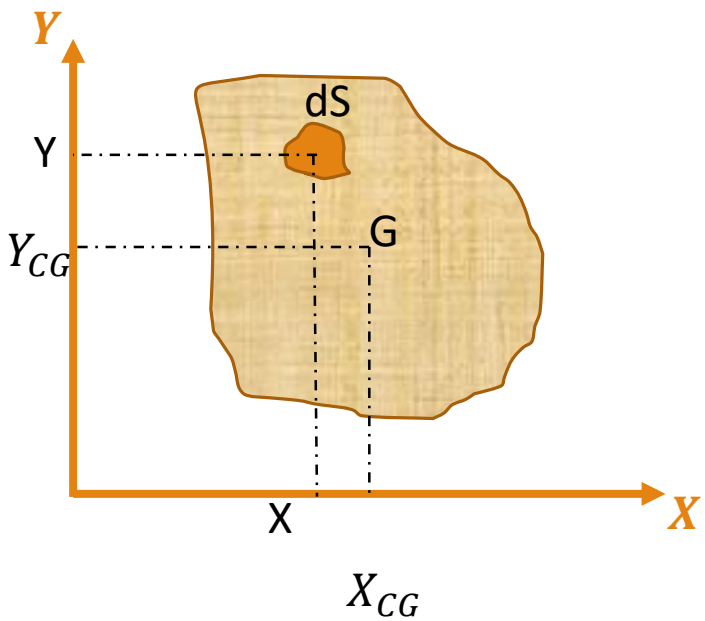


Centre de gravité

La coordonnée suivant l'axe X



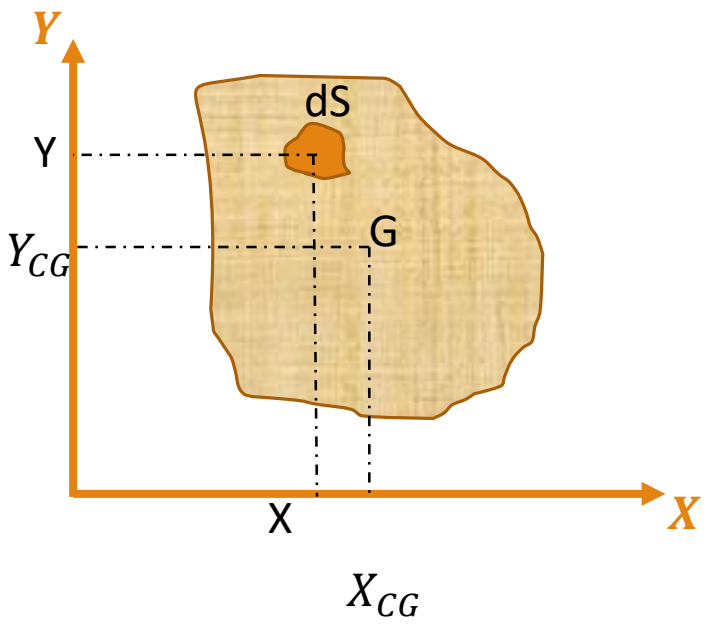
Centre de gravité



La coordonnée suivant l'axe X

$$X_{CG} = \frac{\iint_S X dS}{S}$$

Centre de gravité

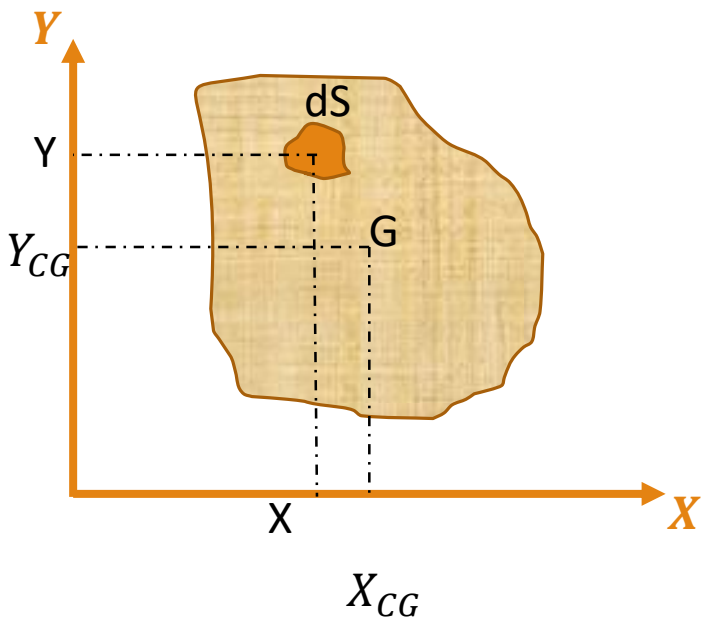


La coordonnée suivant l'axe X

$$X_{CG} = \frac{\iint_S Y dS}{S}$$

La coordonnée suivant l'axe Y

Centre de gravité



La coordonnée suivant l'axe X

$$X_{CG} = \frac{\iint_S Y dS}{S}$$

La coordonnée suivant l'axe Y

$$Y_{CG} = \frac{\iint_S Y dS}{S}$$

Centre de gravité

Si la section S peut être décomposée en n sous sections simples d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (X_{Gi}, Y_{Gi})

Centre de gravité

Si la section S peut être décomposée en n sous sections simples d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (X_{Gi}, Y_{Gi})

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i X_{Gi}}{S}$$

Centre de gravité

Si la section S peut être décomposée en n sous sections simples d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (X_{Gi}, Y_{Gi})

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i X_{Gi}}{S}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i Y_{Gi}}{S}$$

Centre de gravité

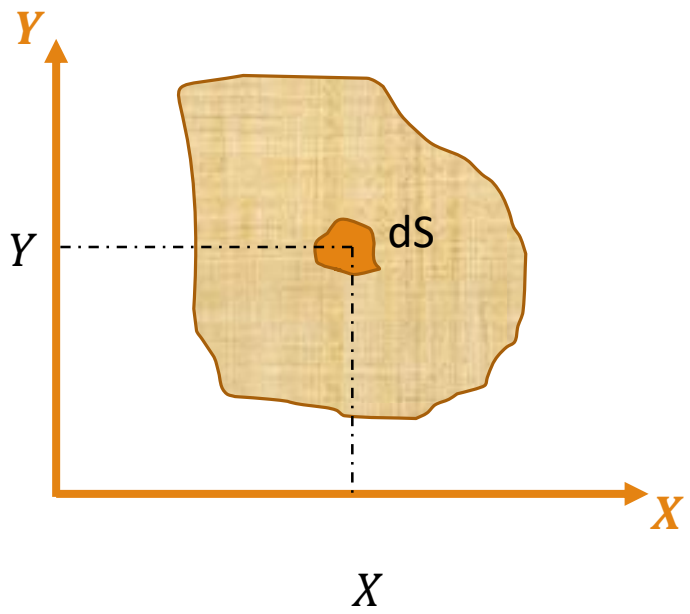
Si la section S peut être décomposée en n sous sections simples d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (X_{Gi}, Y_{Gi})

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i X_{Gi}}{S}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i Y_{Gi}}{S}$$

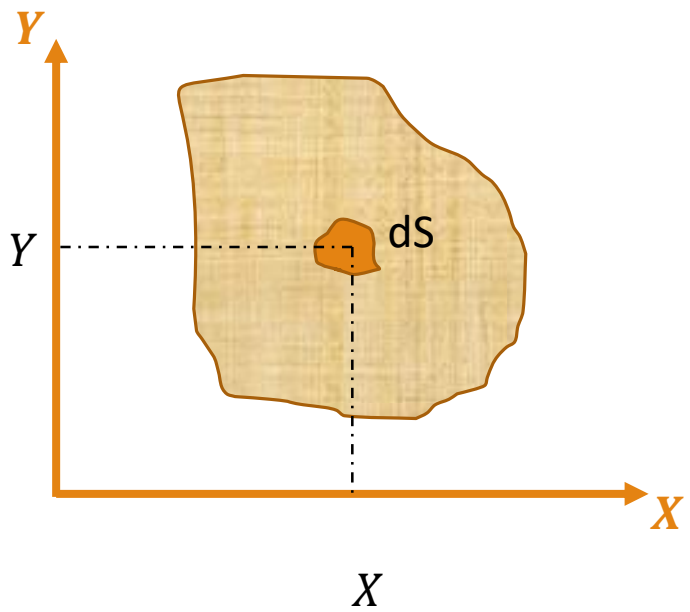
Si la section est symétrique le centre de gravité se trouve sur l'axe de symétrie

Moments statiques



Pour un élément de surface dS le moment statique par rapport aux axes OX et OY

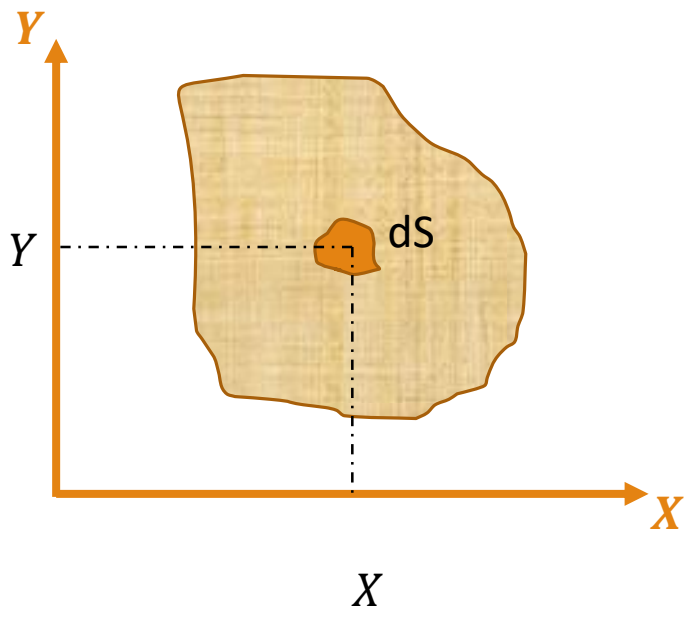
Moments statiques



Pour un élément de surface dS le moment statique par rapport aux axes OX et OY

$$S_X = \iint_S Y \, dS$$

Moments statiques

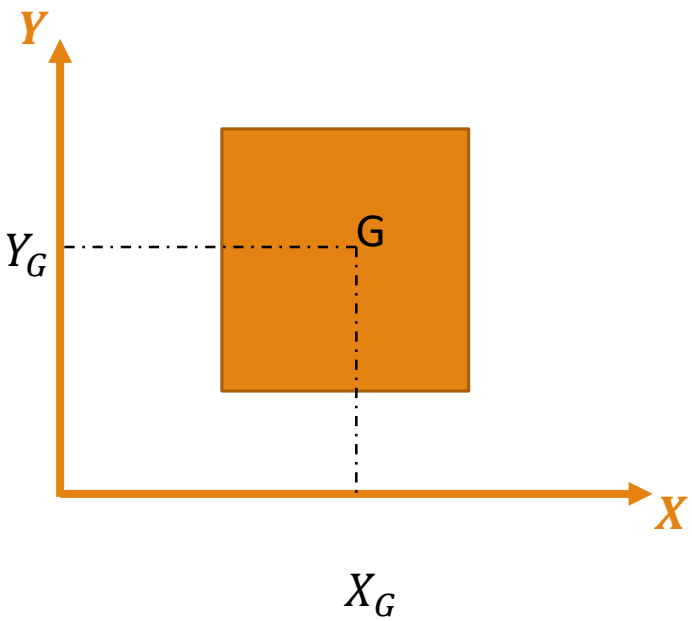


Pour un élément de surface dS le moment statique par rapport aux axes OX et OY

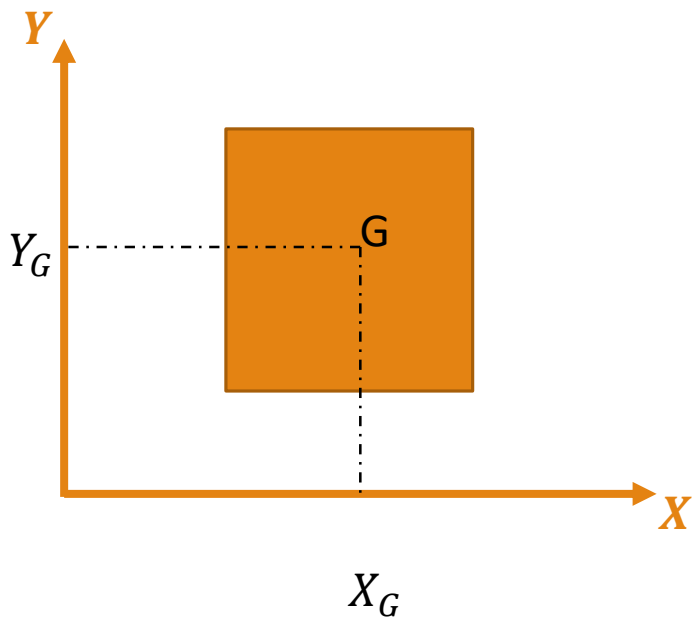
$$S_X = \iint_S Y\, dS$$

$$S_Y = \iint_S X\, dS$$

Moments statiques

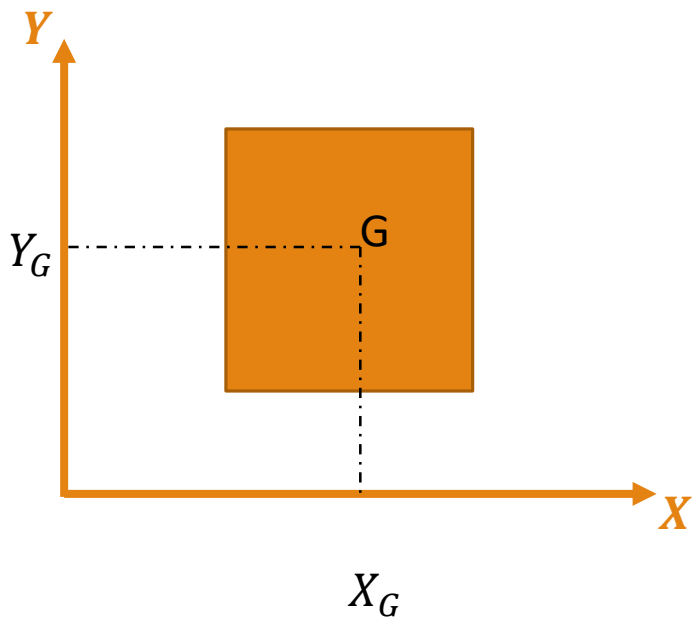


Moments statiques



Le moment statique d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est donné par le produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré

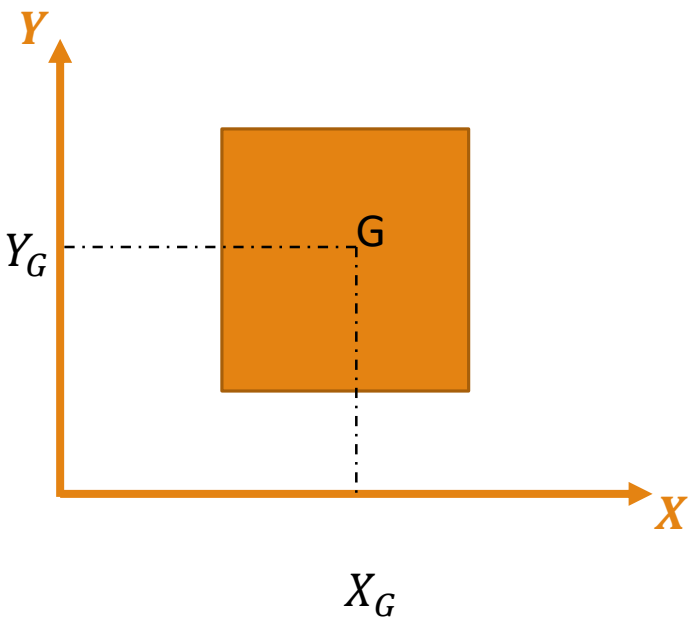
Moments statiques



Le moment statique d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est donné par le produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré

$$S_X = S.Y_G$$

Moments statiques

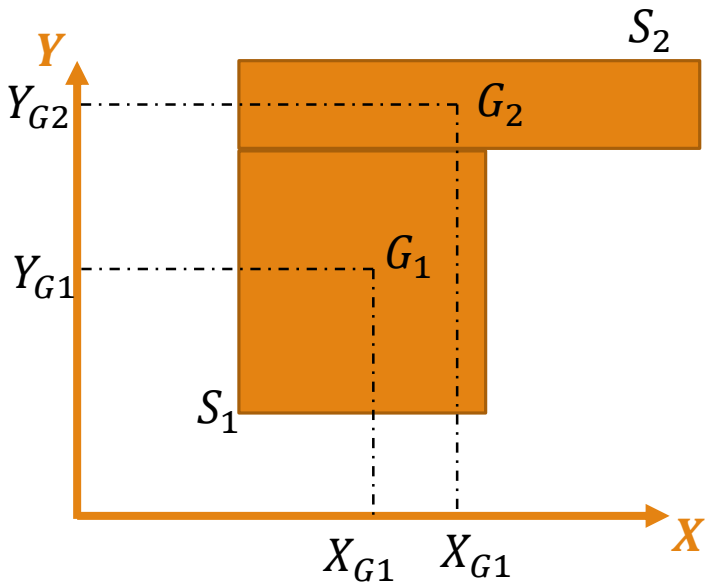


Le moment statique d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est donné par le produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré

$$S_X = S.Y_G$$

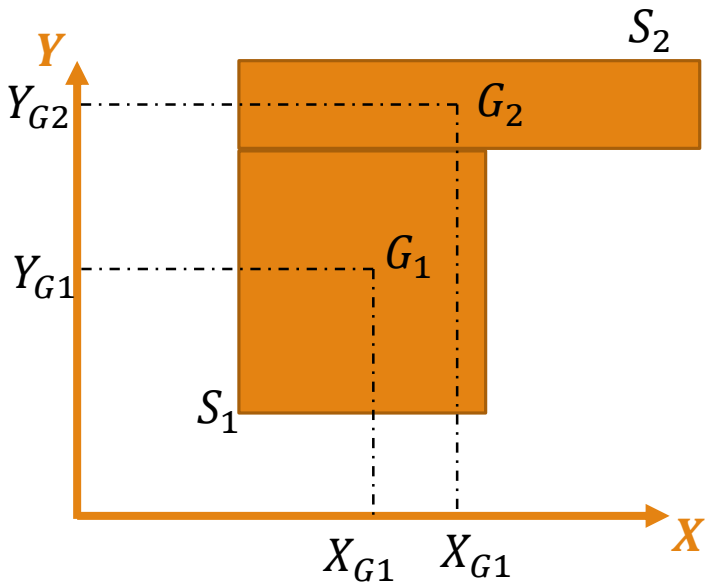
$$S_Y = S.X_G$$

Moments statiques



Pour des surfaces complexes constituées de n aires simples,

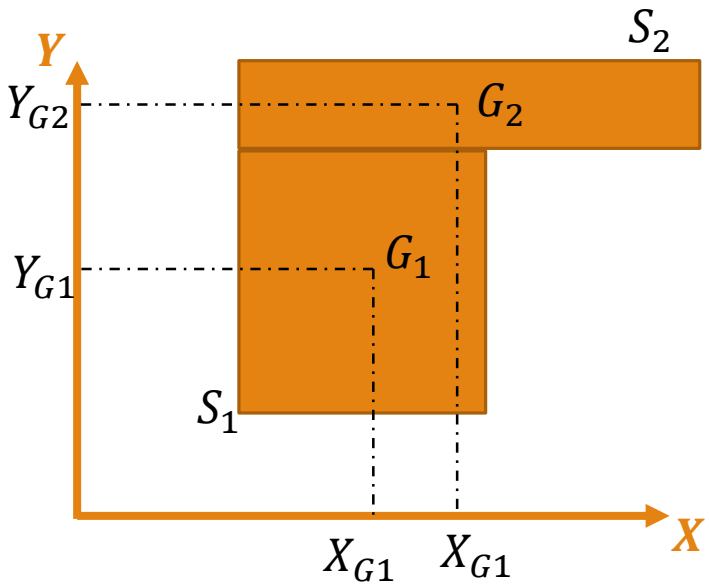
Moments statiques



Pour des surfaces complexes constituées de n aires simples,

$$S_X = \sum_{i=1}^{n} S_i Y_{Gi}$$

Moments statiques

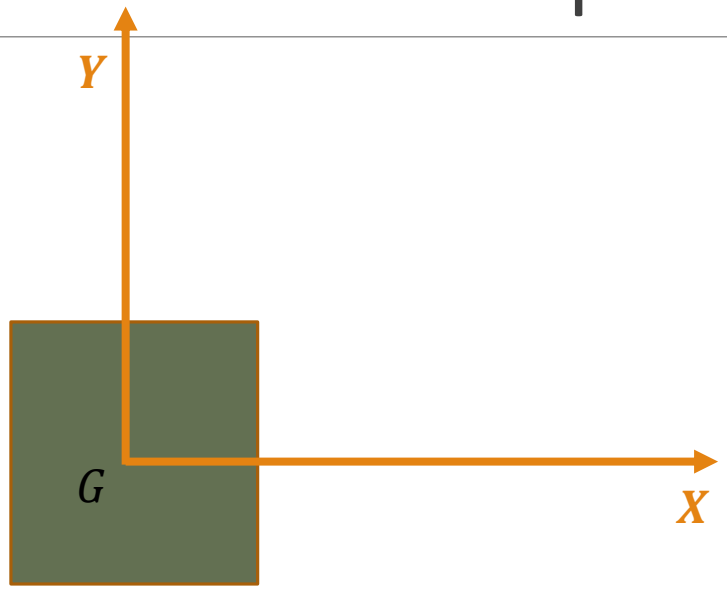


Pour des surfaces complexes constituées de n aires simples,

$$S_X = \sum_{i=1}^{n} S_i Y_{Gi}$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^{n} S_i X_{Gi}$$

Moment statique

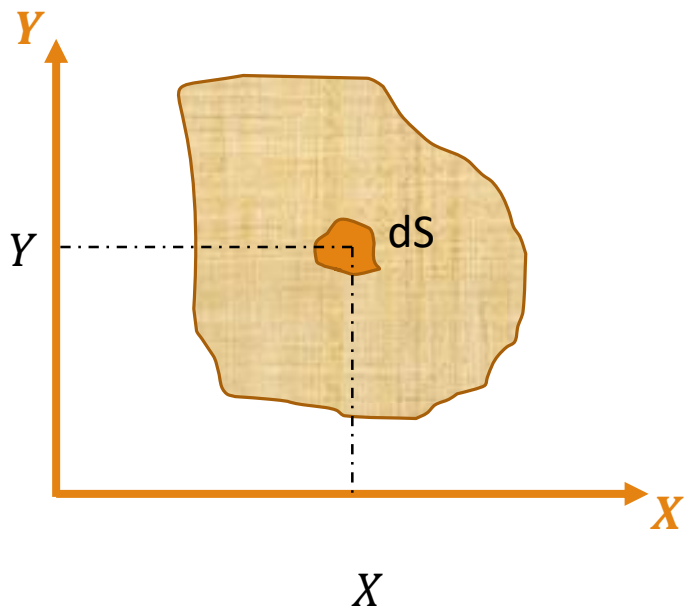


$$S_X = 0$$

$$S_Y = 0$$

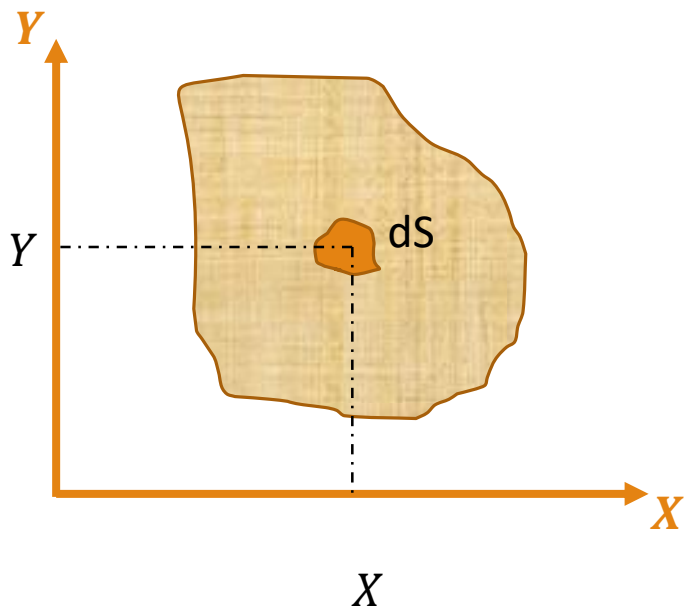
La moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul

Moments d'inertie (Moments quadratiques)



Pour un élément de surface dS les moments quadratiques par rapport aux axes OX et OY

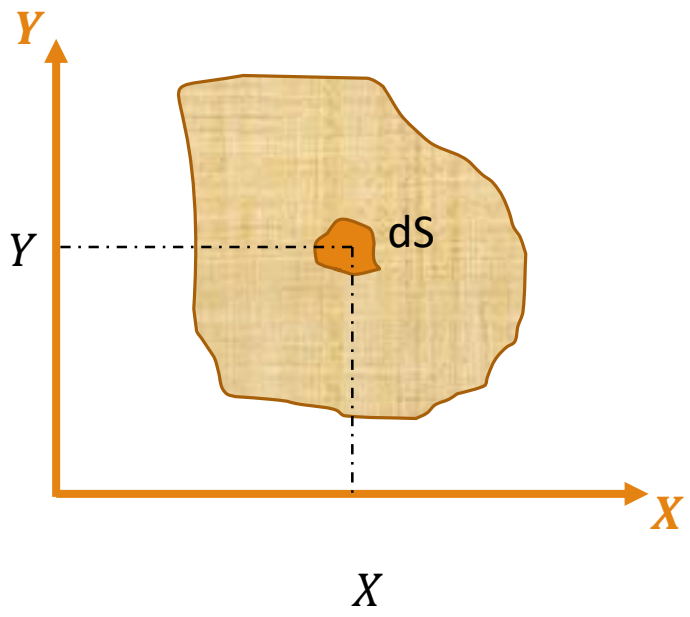
Moments d'inertie (Moments quadratiques)



Pour un élément de surface dS les moments quadratiques par rapport aux axes OX et OY

$$I_X = \iint_S Y^2 \, dS$$

Moments d'inertie (Moments quadratiques)

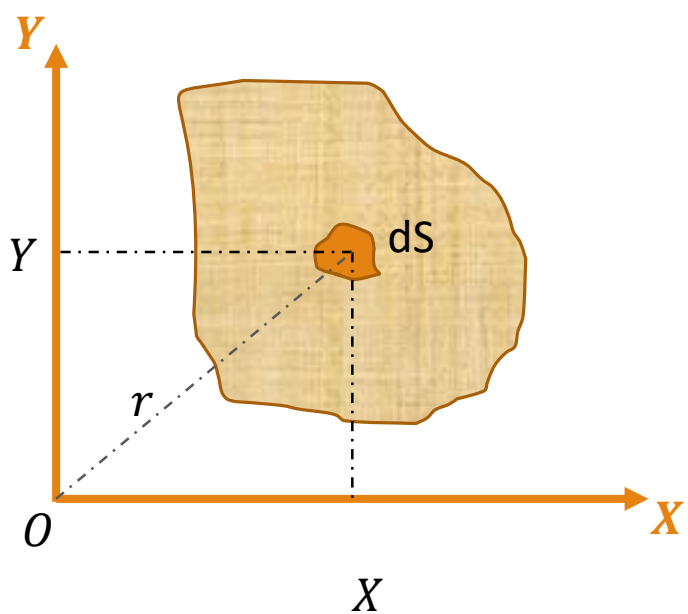


Pour un élément de surface dS les moments quadratiques par rapport aux axes OX et OY

$$I_X = \iint_S Y^2 \, dS$$

$$I_Y = \iint_S X^2 \, dS$$

Moment d'inertie polaire



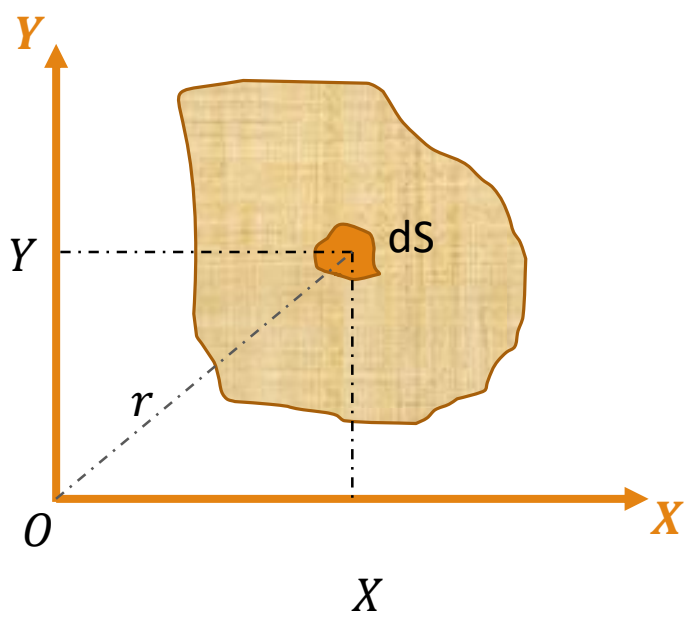
Pour un élément de surface dS le moment quadratique polaire par rapport à un point donné est égale

$$I_p = \iint_S r^2 \, dS$$

$$I_p = \iint_S (X^2 + Y^2) dS$$

$$I_p = I_X + I_Y$$

Moment d'inertie polaire



Pour un élément de surface dS le moment quadratique polaire par rapport à un point donné est égale

$$I_p = \iint_S r^2 \, dS$$

$$I_p = \iint_S (X^2 + Y^2) dS$$

$$I_p = I_X + I_Y$$

Flexion

COURS IV

Flexion pure
Définition

La flexion pure est un état de charge tel que, dans toute section droite d'une poutre, il n'existe **qu'un moment fléchissant $\boldsymbol{M_f}$**.

Le torseur de cohésion s'écrit alors sous la forme suivante

$$\tau_{coh} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix} \text{ si flexion du plan } (xy)$$

Flexion plane simple
Définition

On dit qu'une poutre est sollicitée à **la flexion plane simple** lorsque le système des forces extérieurs se réduit à un système plan et les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne.

Le torseur de cohésion s'écrit alors sous la forme suivante

$$\tau_{coh} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_z \end{Bmatrix} \text{ si flexion du plan } (xy)$$

La flexion simple est un état de charge tel que dans toute section droite d'une poutre, il n'existe qu'un **moment fléchissant** $\boldsymbol{M_f}$ et un **effort tranchant** $\boldsymbol{T}$ **.**

Flexion plane simple
Hypothèses supplémentaires spécifiques à la flexion

La ligne moyenne de la poutre est rectiligne

La poutre admet un plan de symétrie

Toutes les forces appliquées à la poutre sont :

- Perpendiculaires à la ligne moyenne
- Situées dans le plan de symétrie longitudinal ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci
- Soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.

Flexion plane simple
Détermination des efforts internes

L'objectif étant de **dimensionner** une poutre, il faut donc déterminer les **sollicitations maximales**

Détermination des sollicitations maximales

Pour cela il faut tracer les **diagrammes** des **efforts internes** appelés également **diagrammes** des **efforts de cohésion**

Comment déterminer les efforts de cohésion ?

Méthode des sections

Une ou plusieurs sections sont effectuées

Leur nombre et leur position dépendent du système de chargement

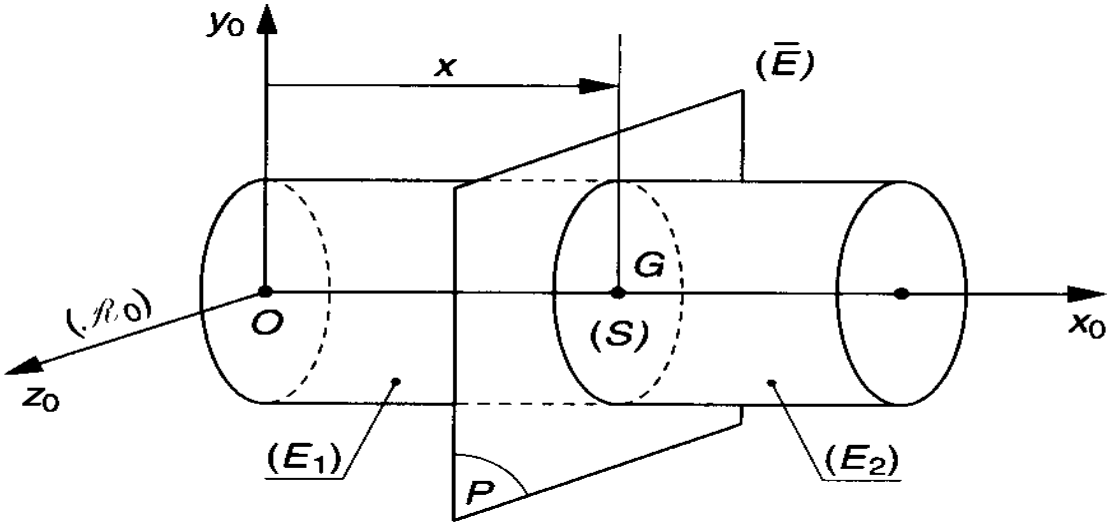
Donc il faut …….

Flexion plane simple
Détermination des efforts internes

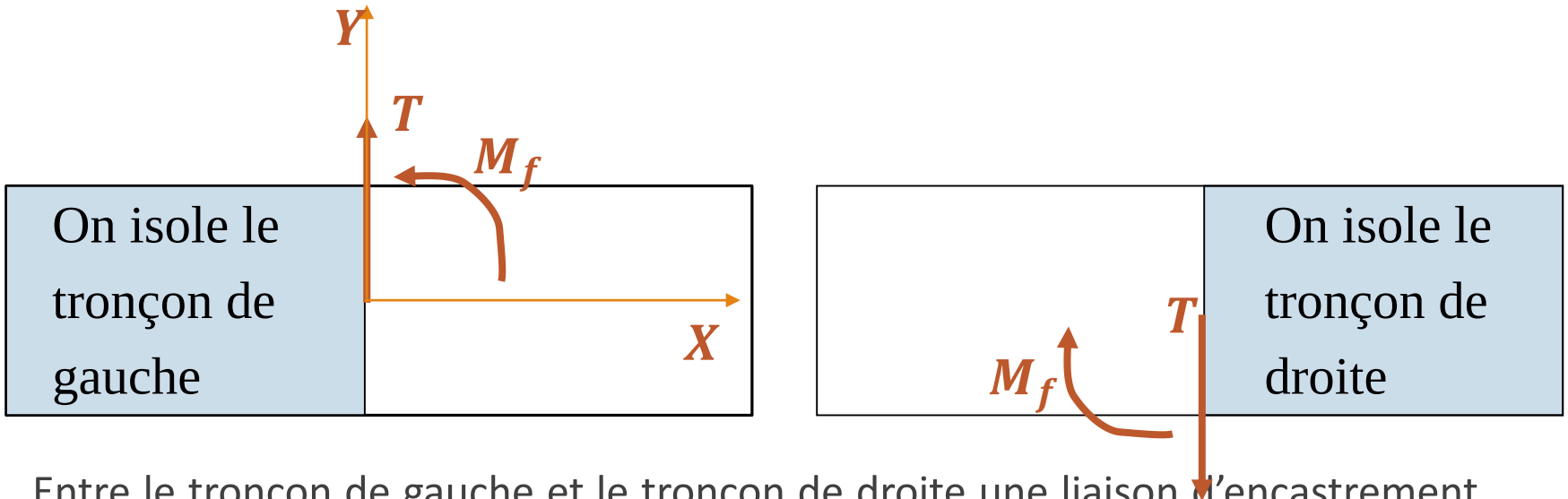
Isoler la totalité de la structure pour déterminer les inconnues de liaisons

Connaitre toutes les actions extérieures

Réaliser une coupure au niveau d'une section



Flexion plane simple
Détermination des efforts internes



Entre le tronçon de gauche et le tronçon de droite une liaison d'encastrement transmet trois composantes d'action:

- $T(x)$ **: Effort Tranchant**
- $M_f(x)$**: Moment Fléchissant**

Dans le cas de la flexion simple $N(x) = 0$.

Flexion plane simple
Détermination des efforts internes

Appliquer le principe fondamental de la statique (PFS) sur le tronçon isolé

$$\mathrm{T}(x) = -\sum F_{exty}\ du\ tronçon\ de\ gauche = \sum F_{exty}\ du\ tronçon\ de\ droite$$

$$M_f(x) = -\sum M_{F/p}\ du\ tronçon\ de\ gauche = \sum M_{F/p}\ du\ tronçon\ de\ droite$$

Répéter les coupures autant que nécessaire pour parcourir toute la poutre et finir par tracer les diagrammes des efforts internes en fonction de x (abscisse du centre de gravité de la section où on effectue la coupure)

Flexion plane simple

Contrôle des diagrammes M et T

- Là où T est nul, M a une valeur maximale.
- Là où T passe par la valeur zéro de façon discontinue, le diagramme de M perd son allure monotone .
- Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées T subit un saut, le diagramme de M présente un point anguleux (M change de pente).
- Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués M subit un saut proportionnel à ces moments tandis que sur T il n'aura aucune modification.
- Le diagramme de M d'un système symétrique (géométrie et chargement) est symétrique tandis que celui de T est antisymétrique.

Flexion plane simple
Relation effort tranchant-Moment fléchissant

Considérons un petit élément dx

L'équilibre des forces verticales de l'élément dx permet d'écrire

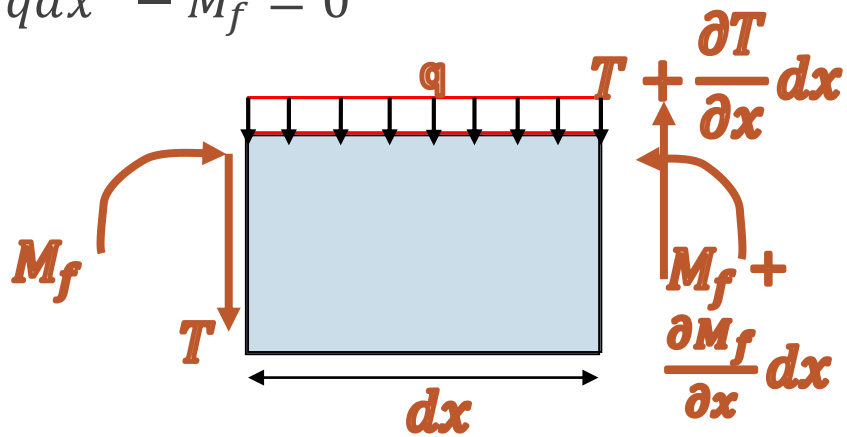
$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - q dx = 0 \Rightarrow \boldsymbol{q = \frac{\partial T}{\partial x}}$$

L'équilibre des moments de l'élément dx permet d'écrire

$$M_f + \frac{\partial M_f}{\partial x} dx + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) dx - q dx^2 - M_f = 0$$

On néglige les termes d'ordre 2

$$\boldsymbol{T = -\frac{\partial M_f}{\partial x}}$$



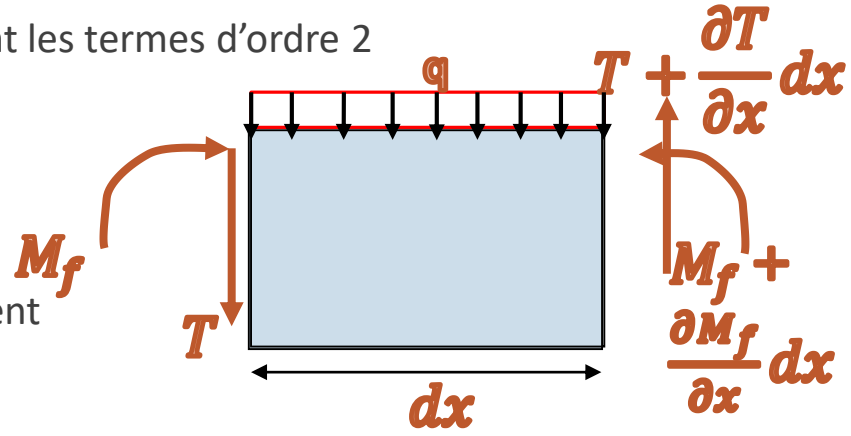
Flexion plane simple
Relation effort tranchant-Moment fléchissant

L'équilibre des forces verticales de l'élément dx permet d'écrire

$$q = \frac{\partial T}{\partial x}$$

L'équilibre des moments de l'élément dx, en négligeant les termes d'ordre 2

$$T = -\frac{\partial M_f}{\partial x}$$



En substituant la 2éme équation dans la 1ere, on obtient

$$q = \frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2}$$

Flexion plane simple
Dimensionnement et vérification
Notion de contraintes

La contrainte est le rapport de la force à l'aire (Unité N/m^2).

Dans une poutre sollicitée en flexion apparaissent les contraintes σ normales à la surface S engendrées par le moment fléchissant et des contraintes τ tangentielles à la surface S engendrées par l'effort tranchant.

Les contraintes normales sont prépondérantes pour le dimensionnement d'une poutre soumise à la flexion.

Flexion plane simple

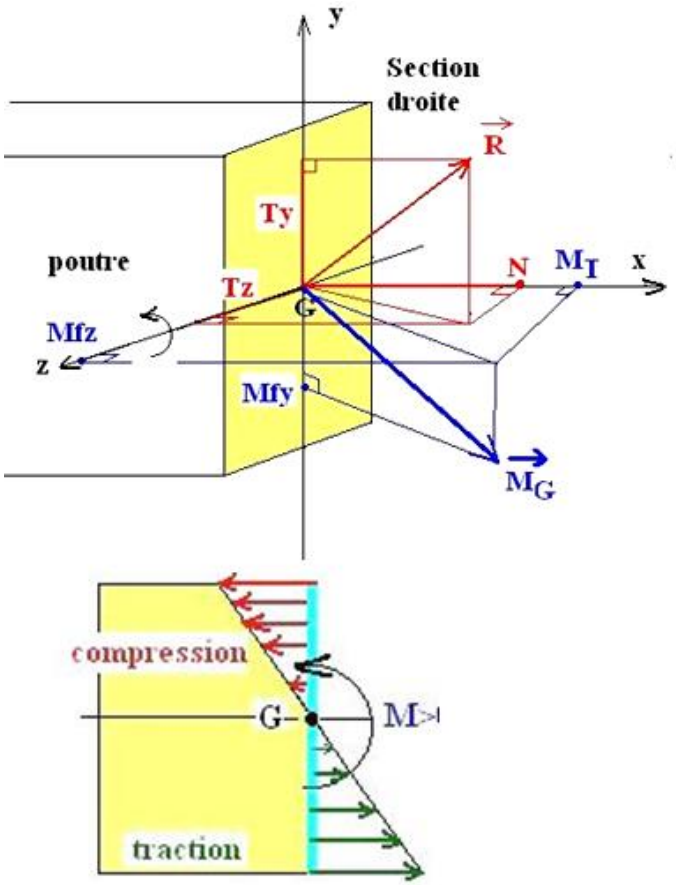
Dimensionnement et vérification. Contraintes normales

Le moment fléchissant M_{fz} tend à faire tourner la section droite autour de Gz dans le plan (xy). Il engendre une compression et une traction de part et d'autre de la fibre moyenne.

Les fibres positives (supérieures) sont comprimées (contraintes normales négatives $\boldsymbol{\sigma_x < 0}$)

Les fibres négatives (inférieures) sont tendues (contraintes normales positives $\boldsymbol{\sigma_x > 0}$)

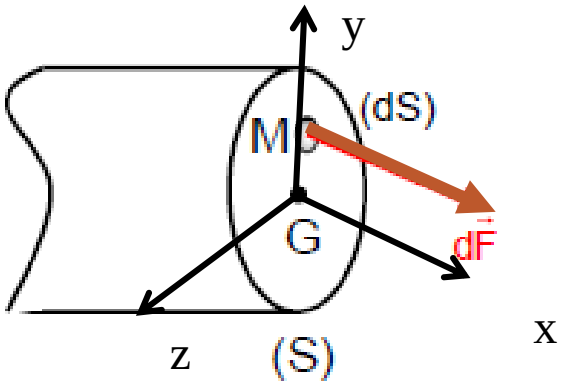
La fibre de la ligne moyenne garde sa longueur (contrainte normale nulle $\boldsymbol{\sigma_x = 0}$). Elle est appelée **fibre neutre**



Flexion plane simple
Dimensionnement et vérification
Relation Contrainte-Moment fléchissant

La fibre de section dS à distance y subit une force élémentaire:

$$dF = \sigma_x . dS$$



La force s'exerçant à une distance y de la fibre neutre engendre un moment élémentaire par rapport à l'axe Gz:

$$dM_z = -\sigma_x y dS$$

Le moment résultant de toutes les forces agissant sur la section

$$M_z = \iint_S -\sigma_x y \, dS$$

Dimensionnement et vérification
Relation Contrainte-Moment fléchissant

Conformément à la convention du trièdre directe – traction positive, le moment fléchissant positif est défini à partir de la contrainte normale par :

$$\boldsymbol{M_z = -\int y\ \sigma_x\ dS}$$

Ainsi, le moment fléchissant est positif ($M > 0$), lorsque

- Les fibres à $y > 0$ sont comprimées ($\sigma_x < 0$)
- Et les fibres à $y < 0$ sont tractées ($\sigma_x < 0$)

D'un autre côté, l'hypothèse de la conservation de la planéité des sections droites implique que les déformations sont linéaires. Et d'après la Loi de Hooke, il s'ensuit que les Contraintes linéaires !

Ainsi la contrainte normale est de la forme $\boldsymbol{\sigma_x = f(y) = ay + b}$

Dimensionnement et vérification
Relation Contrainte-Moment fléchissant

Et l'expression du moment fléchissant prend alors la forme:

$$\boldsymbol{M_z = -\int y\ (ay + b)\ ds}$$

Ainsi, le moment fléchissant est positif ($M > 0$), lorsque

- Les fibres à $y > 0$ sont comprimées ($\sigma_x < 0$)
- Et les fibres à $y < 0$ sont tractées ($\sigma_x < 0$)

D'un autre côté, l'hypothèse de la conservation de la planéité des sections droites implique que les déformations sont linéaires. Et d'après la Loi de Hooke, il s'ensuit que les Contraintes linéaires !

Ainsi la contrainte normale est de la forme $\boldsymbol{\sigma_x = f(y) = ay + b}$

Dimensionnement et vérification
Relation Contrainte-Moment fléchissant

La relation

$$M_z = -\int y\sigma_x ds = -\int y^2 a ds = -a\int y^2 ds$$

$$a = -\frac{M_z}{\int y^2 ds} \quad \text{or} \quad I_z = \int y^2 ds \qquad \boldsymbol{\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y}$$

C'est la relation contrainte normale-moment fléchissant

M_z : Moment fléchissant

I_z : Moment d'inertie de la section par rapport à l'axe z

y : Distance de la fibre sur laquelle agit la contrainte à l'axe neutre.

Condition de résistance-Dimensionnement

la contrainte normale maximale agit sur la fibre la plus éloignée de l'axe neutre y_{max}

$$\sigma_{xmax} = -\frac{M_z}{I_z} y_{max}$$

Condition de résistance en flexion est

$$|\sigma_{xmax}| = \frac{|M_{zmax}|}{I_z} y_{max} < \sigma_{adm}$$

On peut déterminer les dimensions de la section droite de la poutre à partir du moment d'inertie selon la condition de résistance

Module de résistance à la flexion

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

DÉFORMATIONS DES POUTRES FLÉCHIES

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements.

Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes.

Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

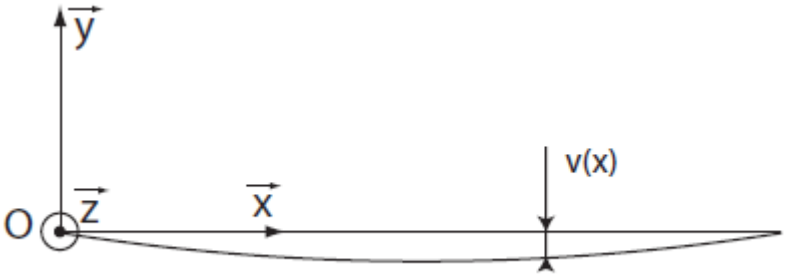
Dans une section d'une poutre soumise à la flexion simple on a :

Un déplacement parallèle à l'axe y noté $v(x)$.

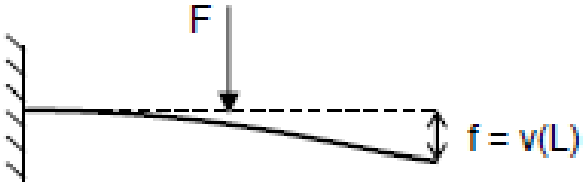
Une rotation autour de l'axe z notée $\theta(x)$.

Flexion plane simple
DÉFORMATIONS DES POUTRES FLÉCHIES

On appelle déformée(ou ligne élastique), l'équation $v(x)$ de la courbe.



La valeur de la déformée en un point est appelée **flèche.**



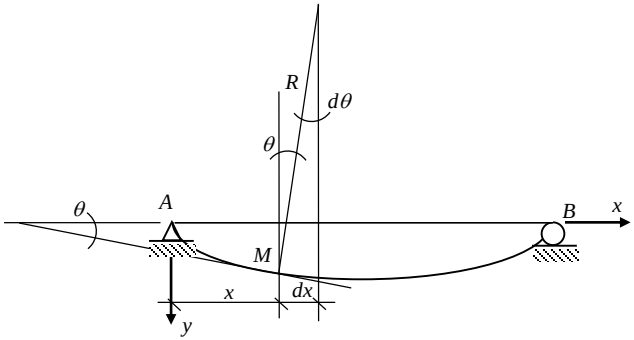
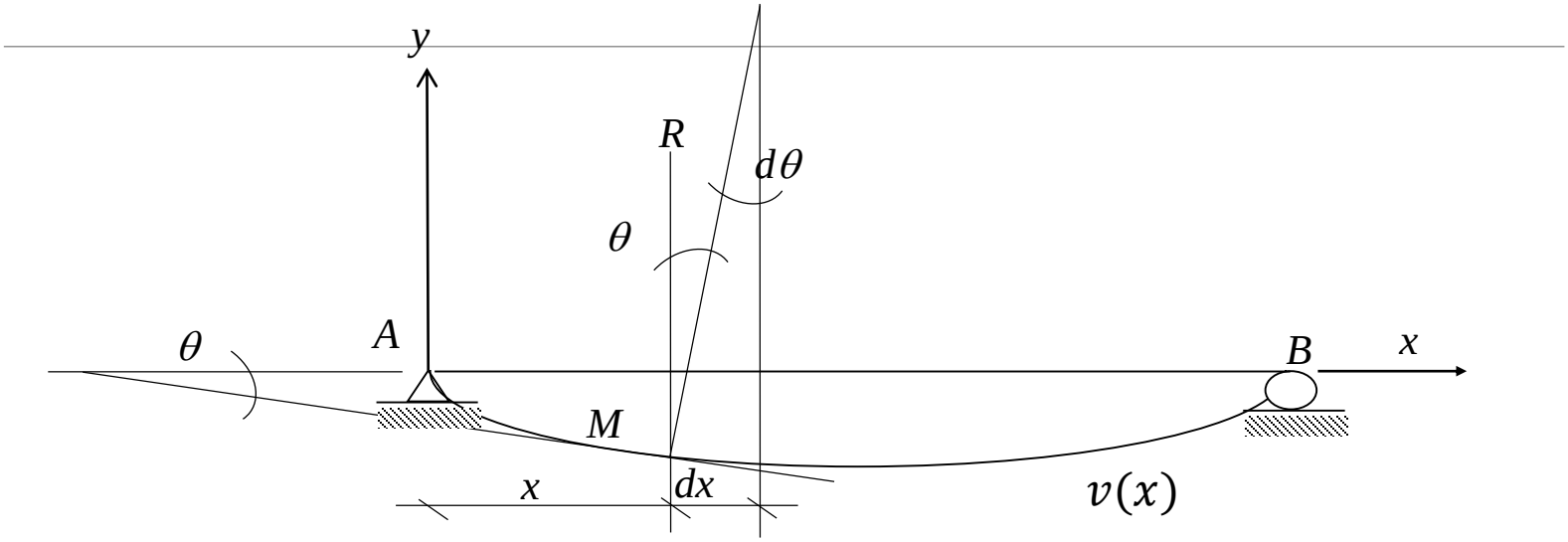


Figure 2.1

Flexion plane simple
DÉFORMATIONS DES POUTRES FLÉCHIES



La dérivée première $v' = \partial v/\partial x$ représente la pente de la tangente à la déformée v au point courant M.

Dans le cadre de l'hypothèse admise des petits déplacements, les angles sont très petits et, non seulement on peut confondre la tangente et l'angle

$$\boldsymbol{\partial v/\partial x} = \boldsymbol{tg}\theta \approx \theta$$

Relation Courbure-moment fléchissant

Sous l'effet des forces la poutre va se déformer verticalement

La déformation de la poutre reste faible devant sa portée, les sections droites restent perpendiculaires à l'axe x après déformation

L'axe neutre ne s'allonge pas → Conservation de sa longueur dx; $cc' = dx$ (figure de la diapo suivante)

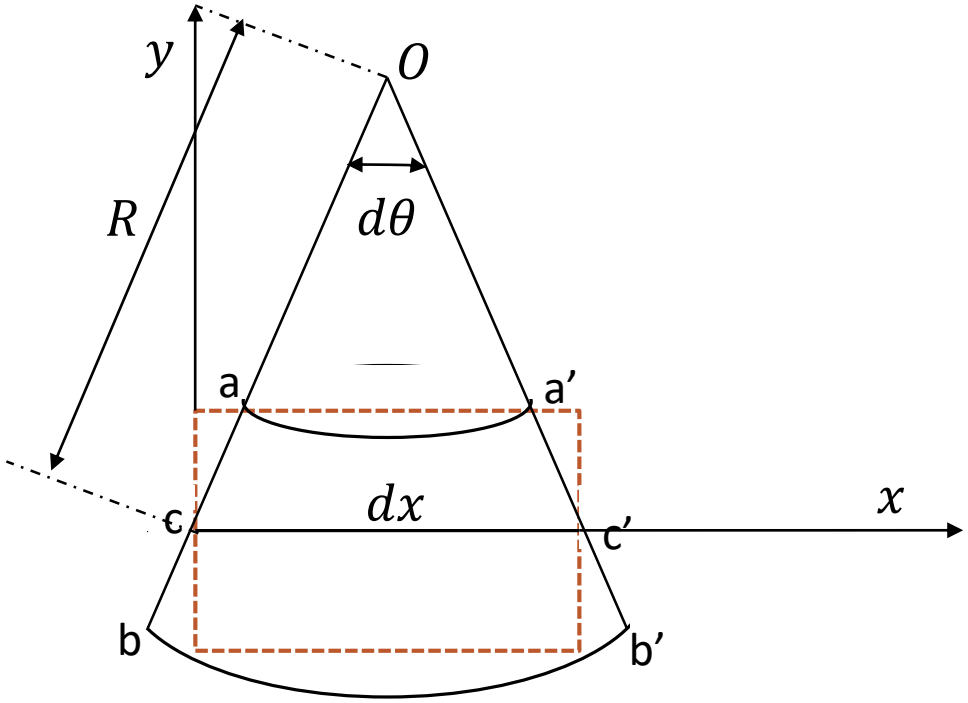
Les deux sections planes et normales font un angle $d\theta$

En prolongeant les segments ab et $a'b'$, elles se coupent en un point O

Comme ce sont des infiniment petits, on peut approcher le tronçon de courbe cc' par un arc de cercle de rayon R et de centre O.

R est appelé rayon de courbure et son inverse est appelée la courbure $\chi = \frac{1}{R}$

Flexion plane simple
Relation courbure-moment fléchissant



La fibre moyenne ne s'allonge pas.

Fibre neutre

Les fibres au dessus de la fibre neutre sont Comprimées

Les fibres au dessous de la fibre neutre sont Tendues

La fibre neutre de longueur dx prend alors une forme circulaire de centre o et de rayon R appelé rayon de courbure

$$cc' = dx \simeq Rd\theta$$

Si on veut la déformation d'une fibre située à une position y (dd')

$$\varepsilon_x(y) = \frac{dd' - cc'}{cc'}$$

$$= \frac{(R-y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon(x,y) = -y\frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{R(x)}}$$

Flexion plane simple
Relation courbure-moment fléchissant

$$\boldsymbol{\varepsilon(x,y) = -y\chi}$$

$$\frac{1}{R} = \chi \simeq \frac{d^2v}{dx^2}$$

La loi de Hooke $\sigma_x(x,y) = E\varepsilon(x,y) = -Ey\chi$

Or $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}y$ $donc$ $-\frac{M_z}{I_z}y = -Ey\chi$

$$\boldsymbol{\chi = \frac{M_z}{EI_z} \simeq \frac{d^2v}{dx^2}}$$

Ou $v(x)$ $représente\ le\ déplacement\ selon\ l'axe\ y$
d'un point de coordonnées (x,y)

Flexion plane simple
Equation de la déformée et calcul de la flèche

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z(x)}{EI_z}$$

C'est l'équation de la dérivée seconde de la déformée

Il faut deux (02) intégrations pour déterminer l'équation $v(x)$ de la déformée.

Après une intégration on obtient la rotation $\theta(x)$

Les constantes d'intégrations sont déterminées en utilisant les **conditions aux limites** et les **conditions de continuité**

Flexion plane simple
Etapes d'analyse d'un problème de résistance

Théorie **3 piliers**

1-Equilibre

(Principe d'équivalence, liant les efforts intérieurs et les contraintes)

2-Cinématique

(Déformations : Bernouilli)

3-Loi constitutive

(Elastique :loi de Hooke)

Flexion plane simple
Etapes d'analyse d'un problème de résistance

Etapes de résolution

1- (Statique) Réduire les charges extérieures appliquées en efforts intérieurs dans les sections (N, T, M_f, M_t)**.**

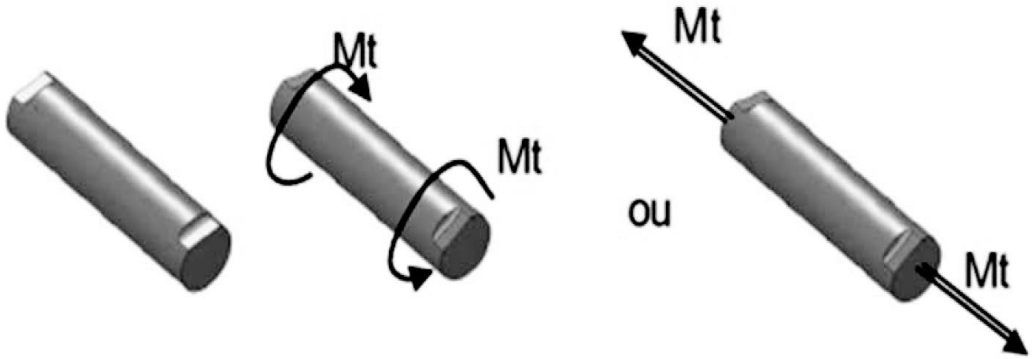
2-(3 piliers) Résoudre les inconnues en terme de contraintes et de déformations.

3-(Modèle de matériau) Calculer $\boldsymbol{\sigma_{max}}$ au point le plus sollicité de la section la plus sollicitée.

4-Vérifier la résistance et les déplacements.

Torsion
Définition

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si elle est soumise à un couple de moments opposés portés par la ligne moyenne .



Torsion
Torseur de cohésion

Le torseur des efforts de cohésion à la section droite (S) de centre de surface G est défini par :

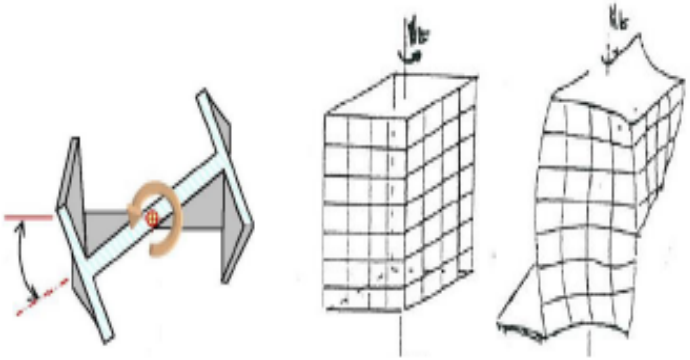
$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Torsion
Hypothèse

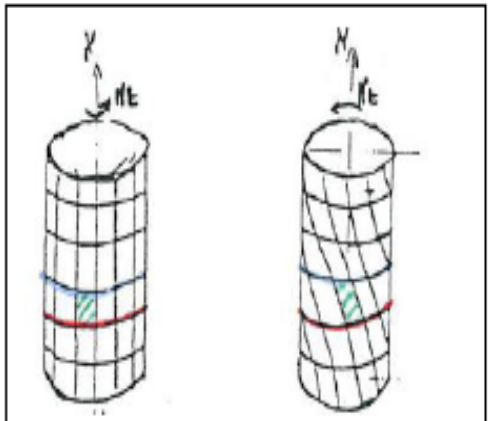
Restriction importante

Dans cette partie de cours, on se restreindra à l'étude des poutres à **section droite circulaire**

Sinon, les sections droites ne restent pas planes, elle se gauchissent.

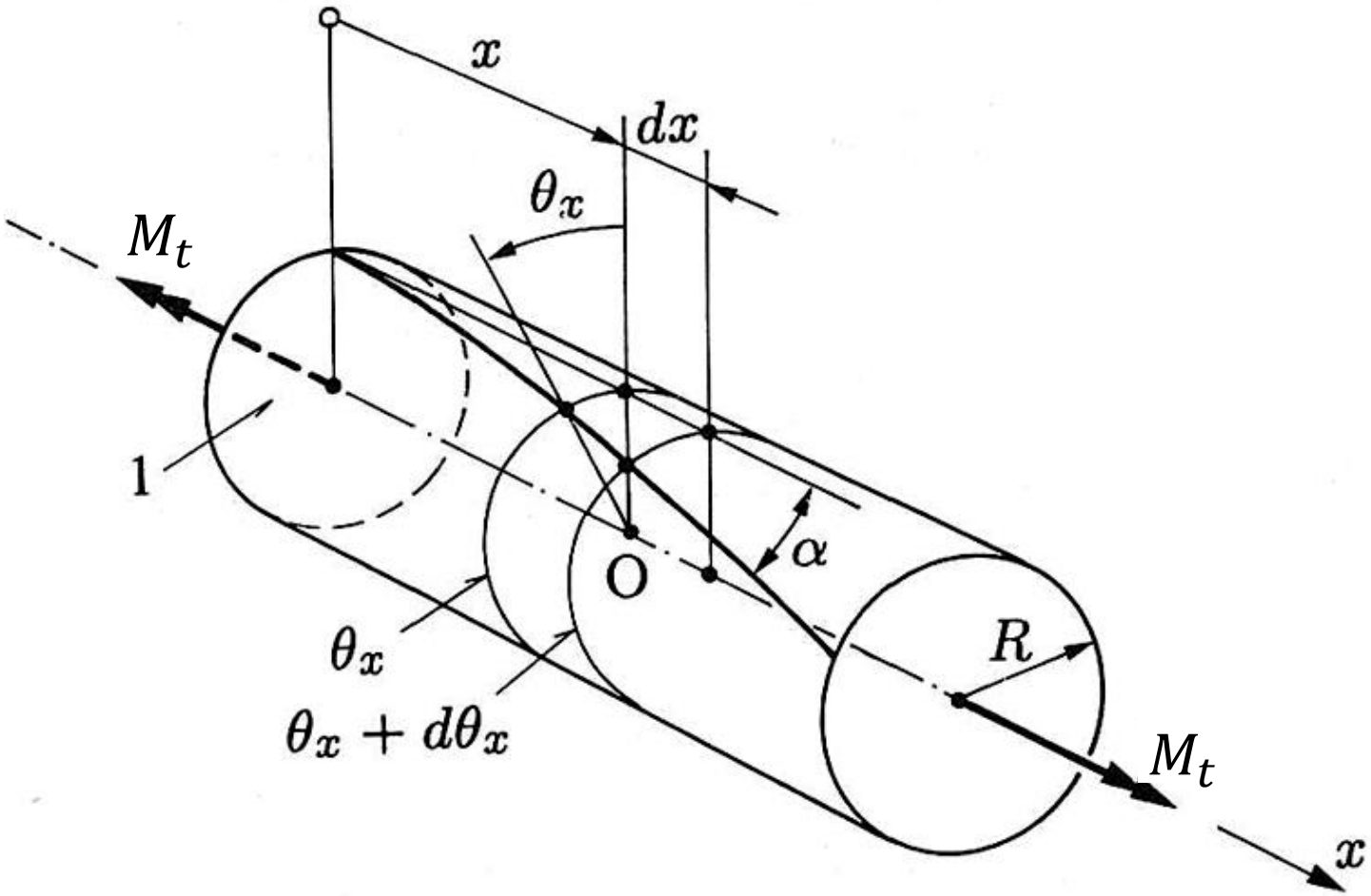


Déformation avec gauchissement



Déformation sans gauchissement

Torsion
Essai de torsion



Torsion
Résultats

Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe

Chaque section subit une rotation $\boldsymbol{\theta_x}$autour de l'axe $\boldsymbol{x}$, et cette rotation est proportionnelle à sa distance $\boldsymbol{x}$

Les fibres se déforment donc suivant une hélice

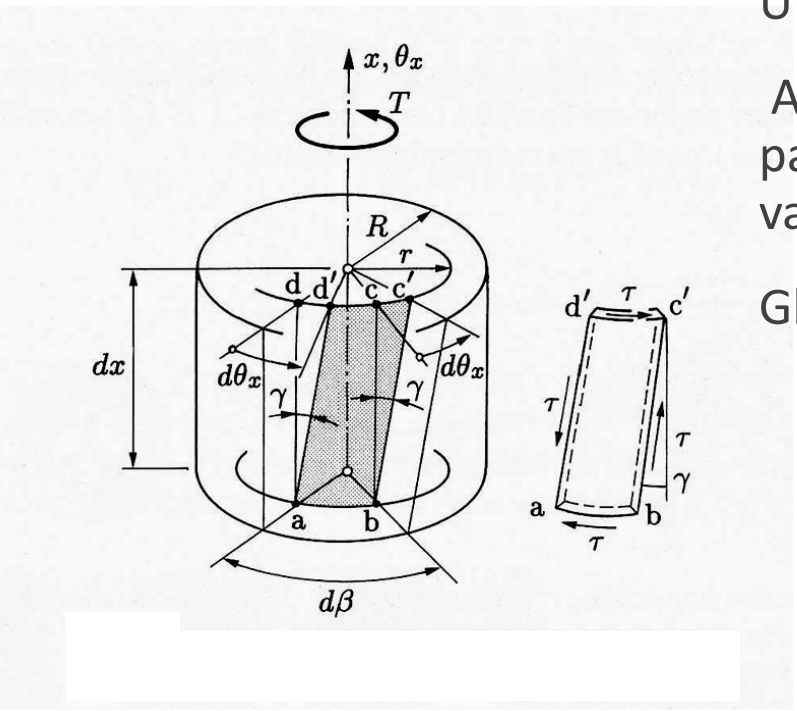
La ligne moyenne reste droite.

L'expérience montre que

Le rapport $\chi = \frac{\boldsymbol{\theta_x}}{\boldsymbol{x}}$ reste toujours constant. Il est appelé angle unitaire de torsion [rad /mm].

- $\boldsymbol{\theta_x}$= Angle de rotation de la section [rad].
- x = Distance séparant de la section [mm]

Torsion
Résultats-Déformations



Un petit élément de longueur $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$

Après déformation, le rectangle $\boldsymbol{abcd}$ devient un parallélogramme $\boldsymbol{abc'd'}$. Seuls les angles droits varient

Glissement seul⇒ Cisaillement pur

$$r d\theta_x = \gamma dx \Rightarrow \gamma = r\frac{d\theta_x}{dx} = r\chi$$

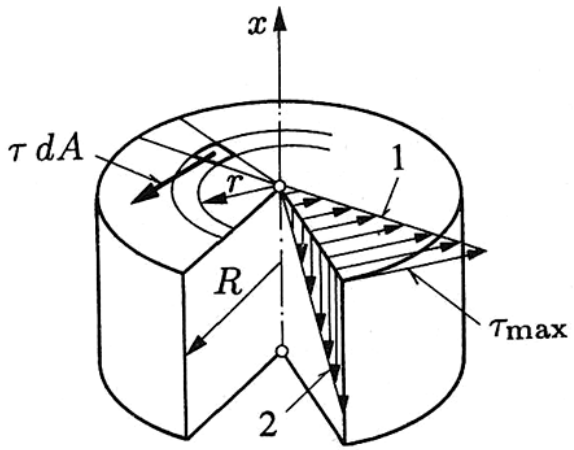
Torsion
Contrainte-normale

la génératrice se déforme et elle subit alors une déviation $\boldsymbol{\gamma}$.

On suppose qu'au cours de la déformation, l'allongement $\boldsymbol{\Delta x} = \mathbf{0}$, donc $\varepsilon_x = 0$

La contrainte normale est donc nulle $\boldsymbol{\sigma_x = 0}$

Torsion
Contrainte-tangentielle



Matériau obéi à la loi de Hooke

$$\tau = G.\gamma$$

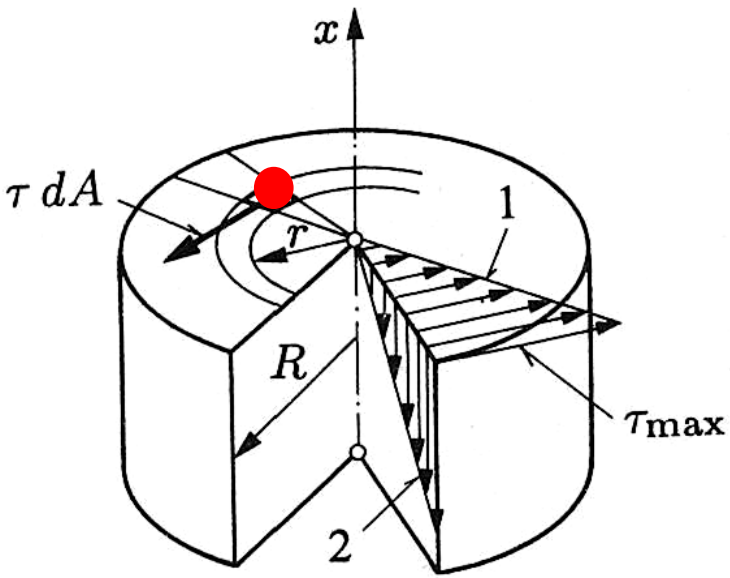
- G: module d'élasticité transversale ou module de Coulomb.

La contrainte tangentielle

$$\tau = Gr\chi$$

τ : Contrainte tangentielle de torsion **[Mpa]**, elle est en distribution linéaire selon le rayon

Torsion
Relation Contrainte-Moment de torsion



Le moment

$$M_t = \int \tau dA * r$$

$$M_t = \int G\chi\tau dA * r$$

$$M_t = G\chi \int r^2 dA$$

$\int r^2 dA$ est par définition le moment quadratique polaire de la surface par rapport à son centre de gravité. Il est noté I_p

$$\boldsymbol{M_t = G\chi I_p}$$

Torsion

Relation Contrainte-Moment de torsion

$$M_t = G\chi I_p \Rightarrow \chi = \frac{M_t}{GI_p}$$

donc la contrainte en fonction du moment est

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r$$

La contrainte est maximale pour $r = R$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} R$$

Torsion
Condition de résistance

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} R$$

Condition de résistance en torsion est

$$|\tau_{max}| = \frac{|M_t|}{I_p} R < \tau_{adm}$$

Module de torsion

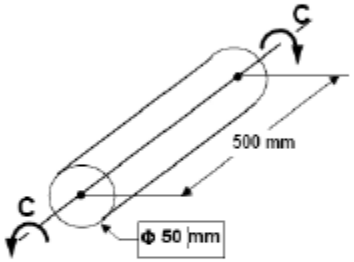
$$W_t = \frac{I_p}{R}$$

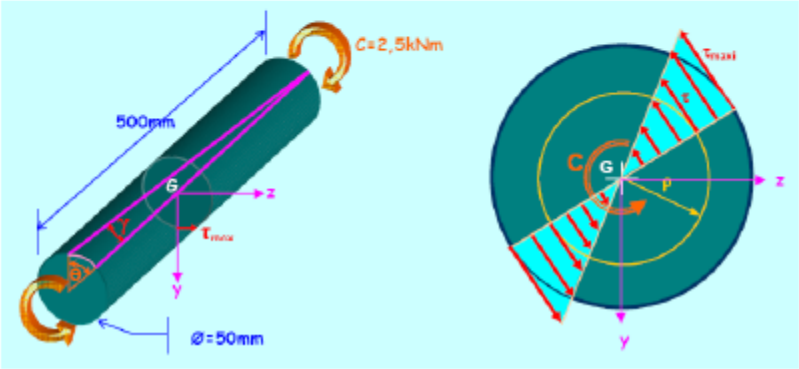
Application

Un cylindre est soumis à un couple de torsion C = 2.5 kNm. Le module de Coulomb du matériau vaut 78 GPa.

Calculez:

a) *la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.*
b) *la distorsion des génératrices en rd et en °.*
c) *l'angle de rotation des sections extrêmes en °.*





Application-Solution

Le moment de torsion M_x est constant tout le long de la barre, M_x=C

Considérons une section quelconque G : $\tau_{max} = \frac{C}{I_G} R$ avec $I_G = \frac{\pi D^4}{32}$

$\tau_{max} = \frac{2{,}5.10^6 * 25 * 32}{\pi * D^4}$=101,86 Mpa

Appliquons la loi de Hooke en torsion : $\tau = \gamma\ G$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{101{,}86}{78.10^3}=1{,}305.10^{-3}\ \text{rd} = 0{,}0748°$$

L'angle de rotation des sections extrêmes nous est donné par la relation :

$\theta_x^{maxi} = \frac{M_x L}{G I_G} = \frac{2{,}5.10^6 * 500 * 32}{78.10^3 * \pi * 50^4}$=0,0261 rd=1°50