II- Construction de l'intégrale stochastique d'Itô

Objectifs et prérequis

Objectif. Donner un sens rigoureux à

$$\int_0^t H_s \, dB_s$$

Pour une large classe de processus H.

Cadre. On fixe un horizon $T > 0$, une filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles et un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B. Pour une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, on note $\Delta_i B = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$.

1. Pourquoi une nouvelle intégrale ?

1.1 L'intégrale de Stieltjes ne marche pas

Si g est une fonction à **variation finie** (par exemple de classe C^1), l'intégrale $\int_0^t h\,(s)\, dg(s)$ se définit comme limite des sommes $\sum_i h\,(\theta_i)\,\big(g(t_{i+1}) - g(t_i)\big)$, avec θ_i **quelconque** dans $[t_i, t_{i+1}]$: la limite ne dépend pas du choix de θ_i.

Pour le brownien, deux obstacles apparaissent :

1. Les trajectoires de B sont à **variation infinie** sur tout intervalle : la théorie de Stieltjes ne s'applique pas trajectoire par trajectoire ;
2. La limite des sommes **dépend du point choisi**.

Point θ_i	Limite de $\sum_i B_{\theta_i}\ \Delta_i B$ sur $[0,t]$
gauche t_i	$\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$
droite t_{i+1}	$\frac{1}{2}(B_t^2 + t)$
moyenne $\frac{1}{2}\big(B_{t_i} + B_{t_{i+1}}\big)$	$\frac{1}{2}B_t^2$

1.2 Le choix d'Itô : le point gauche

On choisit **systématiquement le point gauche** : dans $h_i\,\big(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\big)$, le facteur h_i ne dépend que de l'information disponible à l'instant t_i.

2. La classe des intégrands

Définition. On note $\mathcal{H}_T^2$ l'ensemble des processus $H = (H_t)_{0\le t\le T}$ tels que :

1. H est **adapté** à $(\mathcal{F}_t)$ (et mesurable en (t,ω) : on dit progressivement mesurable ; c'est automatique si H est adapté et à trajectoires continues) ;
2. H est de carré intégrable au sens suivant :

$$\| H \|_{\mathcal{H}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \, ds\right] < \infty.$$

Exemples. $H_s = f(s)$ avec f déterministe et $\int_0^T f^2 < \infty$; $H_s = B_s$, car $\mathbb{E}\int_0^T B_s^2 \, ds = \int_0^T s \, ds = T^2/2$; $H_s = B_s^2$, car $\mathbb{E}\int_0^T B_s^4 \, ds = \int_0^T 3\,s^2 \, ds = T^3$; $H_s = e^{B_s}$, car $\mathbb{E}\int_0^T e^{2B_s} \, ds = \int_0^T e^{2s} \, ds < \infty$.

3. les processus simples

3.1 Définition

Définition. Un processus H est **simple** (ou élémentaire, ou en escalier) s'il s'écrit

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \, \mathbf{1}_{I_i}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ est une subdivision déterministe et chaque h_i est une variable $\mathcal{F}_{t_i}$**-mesurable** de carré intégrable. On note I_i l'intervalle $]t_i, t_{i+1}]$ et $\mathbf{1}_{I_i}$ sa fonction indicatrice.

Sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}]$, H vaut la constante aléatoire h_i, choisie à l'instant t_i .

3.2 Intégrale d'un processus simple

Définition. Pour H simple et $0 \le t \le T$, on pose

$$I_t(H) = \int_0^t H_s \, dB_s := \sum_{i=0}^{n-1} h_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

Pour $t = T$: $\int_0^T H_s \, dB_s = \sum_i h_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$. Le « $\wedge\, t$ » coupe simplement la somme à l'instant t : les intervalles situés après t ne contribuent pas, et l'intervalle qui contient t ne contribue que jusqu'à t.

Exemple. $H_s = 1$ pour s dans $]0, 1]$ et $H_s = B_1$ pour s dans $]1, 2]$ (on détient 1 action sur $]0, 1]$, puis B_1 actions sur $]1, 2]$). Alors

$$\int_0^2 H_s \, dB_s = 1 \cdot (B_1 - B_0) + B_1 \, (B_2 - B_1) = B_1 + B_1(B_2 - B_1).$$

3.3 Propriétés pour les processus simples

Proposition. Pour H, K simples et a, b réels :

1. **linéarité** : $I_t(aH + bK) = a\, I_t(H) + b\, I_t(K)$;
2. **espérance nulle** : $\mathbb{E}[I_t(H)] = 0$;
3. **isométrie d'Itô** : $\mathbb{E}[I_t(H)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, ds\right]$;
4. **martingale** : $\big(I_t(H)\big)_{0 \le t \le T}$ est une martingale continue.

Preuve de la linéarité. On se ramène à une subdivision commune (on réunit les points des deux subdivisions) ; la formule est alors linéaire en les h_i.

Preuve de l'isométrie (cas $t = T$). Notons $\Delta_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$. On développe le carré :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i h_i \, \Delta_i\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[h_i^2 \Delta_i^2\right] + 2 \sum_{i<j} \mathbb{E}\left[h_i h_j \Delta_i \Delta_j\right].$$

Termes croisés ($i < j$). La variable $h_i h_j \Delta_i$ est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable (car $t_{i+1} \le t_j$), et Δ_j est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j}$, centré :

$$\mathbb{E}\big[h_i h_j \Delta_i \Delta_j\big] = \mathbb{E}\Big[h_i h_j \Delta_i \, \mathbb{E}\big[\Delta_j \mid \mathcal{F}_{t_j}\big]\Big] = \mathbb{E}\big[h_i h_j \Delta_i \cdot 0\big] = 0.$$

Termes diagonaux. h_i^2 est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et $\mathbb{E}\big[\Delta_i^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\big] = t_{i+1} - t_i$:

$$\mathbb{E}[h_i^2 \Delta_i^2] = \mathbb{E}\Big[h_i^2 \, \mathbb{E}\big[\Delta_i^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}\big]\Big] = \mathbb{E}[h_i^2] \, (t_{i+1} - t_i).$$

En sommant : $\mathbb{E}[I_T(H)^2] = \sum_i \mathbb{E}\left[h_i^2\right](t_{i+1} - t_i) = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \, ds\right]$, puisque $H_s^2 = h_i^2$ sur $]t_i, t_{i+1}]$. ▫

Preuve de l'espérance nulle. $\mathbb{E}[h_i \Delta_i] = \mathbb{E}\Big[h_i \, \mathbb{E}\big[\Delta_i \mid \mathcal{F}_{t_i}\big]\Big] = 0$ pour chaque i.

Preuve de la propriété de martingale. Par linéarité, il suffit de traiter un seul terme $X_t = h_i \left(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right)$. Soit $s \le t$.

- *Si $s \le t_i$.* Alors $X_s = h_i(B_s - B_s) = 0$, et il faut montrer $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = 0$. Si $t \le t_i$, $X_t = 0$: c'est immédiat. Sinon, par emboîtement via $\mathcal{F}_{t_i}$: $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\big[h_i \, \mathbb{E}\big[B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}\big] \mid \mathcal{F}_s\big] = 0$, car B est une martingale et $t_i \le t_{i+1} \wedge t$.
- *Si $s > t_i$.* Alors h_i est $\mathcal{F}_s$-mesurable et sort ; comme B est une martingale et $u \mapsto t_{i+1} \wedge u$ est déterministe, $\mathbb{E}\big[B_{t_{i+1} \wedge t} \mid \mathcal{F}_s\big] = B_{t_{i+1} \wedge s}$. Donc $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = h_i\big(B_{t_{i+1} \wedge s} - B_{t_i}\big) = X_s$.

La continuité en t découle de celle de B.

4. Passage à la limite dans L^2

4.1 Le principe

L'isométrie dit que l'application $H \mapsto I_T(H)$ **conserve les distances** entre l'espace des processus simples (muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$) et $L^2(\Omega)$:

$$\| I_T(H) - I_T(K) \|_{L^2(\Omega)} = \| H - K \|_{\mathcal{H}^2}.$$

Une application qui conserve les distances se prolonge de manière unique à l'adhérence de son domaine. Il reste donc à savoir que les processus simples sont **denses** dans $\mathcal{H}^2_T$.

Lemme de densité (admis). Pour tout $H \in \mathcal{H}^2_T$, il existe une suite (H^n) de processus simples telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s - H^n_s)^2 \, ds\right] \to 0.$$

Idée dans le cas où H est continu et borné. On prend $H^n_s = \sum_i H_{t_i} \mathbf{1}_{I_i}(s)$ sur la subdivision de pas T/n : on « gèle » H à la valeur qu'il a en début d'intervalle (c'est bien $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable). Par continuité, $H^n_s \to H_s$ pour tout s, et la convergence dominée donne la convergence dans $\mathcal{H}^2$.

4.2 Définition de l'intégrale d'Itô

Théorème-définition. Soit $H \in \mathcal{H}^2_T$ et (H^n) simples avec $H^n \to H$ dans $\mathcal{H}^2$. Alors la suite $I_T(H^n)$ converge dans $L^2(\Omega)$. Sa limite ne dépend pas de la suite choisie ; on la note

$$\int_0^T H_s \, dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^T H^n_s \, dB_s \quad \text{dans } L^2.$$

Preuve. Par l'isométrie, $\mathbb{E}\left[\left(I_T(H^n) - I_T(H^m)\right)^2\right] = \| H^n - H^m \|^2_{\mathcal{H}^2}$. Comme (H^n) converge, elle est de Cauchy dans $\mathcal{H}^2$; donc $\left(I_T(H^n)\right)$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, qui est complet : elle converge. Si (K^n) est une autre suite approximante, $\| I_T(H^n) - I_T(K^n) \|_{L^2} = \| H^n - K^n \|_{\mathcal{H}^2} \le \| H^n - H \| + \| H - K^n \| \to 0$: même limite. ▫

4.3 L'intégrale comme processus continu

On définit de même $\int_0^t H_s \, dB_s$ pour chaque $t \le T$. Pour obtenir un **processus continu** en t, on utilise l'inégalité L^2 de Doob appliquée aux martingales $I(H^n) - I(H^m)$:

$$\mathbb{E}\big[\sup_{t\le T}|I_t(H^n)-I_t(H^m)|^2\big] \le 4\,\mathbb{E}\left[\big(I_T(H^n)-I_T(H^m)\big)^2\right] = 4\;\|H^n-H^m\|_{\mathcal{H}^2}^2 \to 0.$$

La convergence a donc lieu **uniformément en** t (dans L^2), et une sous-suite converge uniformément p.s. La limite est alors un processus continu, on choisit toujours cette version.

5. Propriétés de l'intégrale d'Itô

Théorème. Pour $H, K \in \mathcal{H}_T^2$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $0 \le s \le t \le T$:

Propriété	Énoncé
Linéarité	$\int_0^t (aH_u + bK_u)\,dB_u = a\int_0^t H_u\,dB_u + b\int_0^t K_u\,dB_u$
Relation de Chasles	$\int_0^t H_u\,dB_u = \int_0^s H_u\,dB_u + \int_s^t H_u\,dB_u$
Espérance nulle	$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u\,dB_u\right] = 0$
Isométrie d'Itô	$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_u\,dB_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u^2\,du\right]$
Covariance	$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_u\,dB_u \int_0^t K_u\,dB_u\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_u K_u\,du\right]$
Martingale	$M_t = \int_0^t H_u\,dB_u$ est une martingale continue de carré intégrable
Variation quadratique	$\langle M\rangle_t = \int_0^t H_u^2\,du$, c'est-à-dire que $M_t^2 - \int_0^t H_u^2\,du$ est une martingale

Preuve. Chaque propriété est vraie pour les processus simples (§ 3.3) et passe à la limite dans L^2 : l'espérance et l'espérance conditionnelle sont continues dans L^2, ainsi que $X \mapsto \mathbb{E}[X^2]$. La formule de covariance découle de l'isométrie par **polarisation** : $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ appliqué à $x = \int H\,dB$ et $y = \int K\,dB$.

Pour la variation quadratique, on vérifie pour H simple que $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t H_u^2\,du \mid \mathcal{F}_s\right]$ (même calcul que l'isométrie, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$), puis on combine avec l'orthogonalité des accroissements (semaine 3, § 5.2). On admet le passage à la limite. ▫

Remarque. La variation quadratique $\int_0^t H_u^2\,du$ est **aléatoire** en général (elle dépend de la trajectoire de H). Quand H est déterministe, elle est déterministe : c'est le cas de l'intégrale de Wiener (§ 7).

6. Le calcul fondamental : $\int_0^t B_s\ dB_s$

Proposition.

$$\int_0^t B_s\ dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Preuve, en trois étapes.

Étape 1 : approximation de l'intégrand. On prend la subdivision uniforme $t_i = it/n$, $h = t/n$, et $H_s^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\ \mathbf{1}_{I_i}(s)$ (processus simple, B_{t_i} est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable). Alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s - H_s^n)^2\ ds\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}\left[\left(B_s - B_{t_i}\right)^2\right] ds = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i)\ ds = n \cdot \frac{h^2}{2}$$
$$= \frac{t^2}{2n} \to 0.$$

Donc $H^n \to B$ dans $\mathcal{H}^2$, et $\int_0^t B\ dB = \lim \int_0^t H^n\ dB$ dans L^2.

Étape 2 : calcul de l'intégrale du processus simple. Avec $\Delta_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ et l'identité $x(y-x) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2 - (y-x)^2)$:

$$\int_0^t H_s^n\ dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}\,\Delta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta_i^2 = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}Q_n,$$

où $Q_n = \sum_i \Delta_i^2$ (le premier terme est télescopique et $B_0 = 0$).

Étape 3 : passage à la limite. On sait que $Q_n \to t$ dans L^2 (semaine 2 : $\mathbb{E}[(Q_n - t)^2] = 2t^2/n$). Donc $\int_0^t H^n\ dB \to \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ dans L^2. ▫

Trois vérifications.

1. *Espérance nulle* : $\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(B_t^2 - t)\right] = \frac{1}{2}(t - t) = 0$. ✓
2. *Isométrie* : à gauche, $\mathbb{E}\left[\frac{1}{4}(B_t^2 - t)^2\right] = \frac{1}{4}(\mathbb{E}[B_t^4] - 2t\,\mathbb{E}[B_t^2] + t^2) = \frac{1}{4}(3t^2 - 2t^2 + t^2) = \frac{t^2}{2}$. À droite, $\mathbb{E}\int_0^t B_s^2\ ds = \int_0^t s\ ds = \frac{t^2}{2}$. ✓
3. *Martingale* : $\frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ est bien une martingale. ✓

7. Différence fondamentale avec le calcul classique

Calcul classique. Si g est C^1 avec $g(0) = 0$: $\int_0^t g\,(s)\,dg(s) = \int_0^t g\,(s)g'(s)\,ds = \frac{1}{2}g(t)^2$.

Calcul d'Itô. $\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$: il apparaît un **terme correctif** $-\frac{t}{2}$.

D'où vient ce terme ? Dans l'étape 2 ci-dessus, la somme $\frac{1}{2}\sum_i \Delta_i^2$:

- pour une fonction C^1, $\sum_i \big(g(t_{i+1}) - g(t_i)\big)^2 \le \max_i |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \cdot \int_0^t |g'| \to 0$: le terme disparaît ;
- pour le brownien, $\sum_i \Delta_i^2 \to t \neq 0$: le terme survit.

La variation quadratique non nulle du brownien est exactement ce qui sépare le calcul d'Itô du calcul classique. C'est aussi l'origine du terme $\frac{1}{2}f''$ de la formule d'Itô.

	Calcul classique (Stieltjes)	Calcul d'Itô
Intégrateur	fonction à variation finie	brownien, variation infinie
Construction	trajectoire par trajectoire	limite dans $L^2(\Omega)$
Point d'évaluation	indifférent	point gauche obligatoire
Intégrand autorisé	toute fonction continue	processus adapté de $\mathcal{H}^2$
$\int_0^t x \, dx$	$\frac{1}{2}x_t^2$	$\int_0^t B \, dB = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$
« Règle de calcul »	$(dx)^2 = 0$	$(dB_t)^2 = dt$

8. L'intégrale de Wiener (intégrand déterministe)

Proposition. Soit $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ déterministe avec $\int_0^T f(s)^2 \, ds < \infty$. Alors

$$\int_0^T f(s) \, dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T f(s)^2 \, ds\right),$$

et pour deux telles fonctions f, g, le couple $\left(\int f \, dB, \int g \, dB\right)$ est gaussien de covariance $\int_0^T f(s)g(s) \, ds$.

Preuve. Si $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{I_i}$ est en escalier, $\int f \, dB = \sum_i a_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ est une combinaison linéaire de gaussiennes indépendantes : elle est gaussienne centrée, de variance $\sum_i a_i^2 \, (t_{i+1} - t_i) = \int f^2$. Le cas général s'obtient par passage à la limite, car une limite dans L^2 de variables gaussiennes centrées est gaussienne centrée (la fonction caractéristique $e^{-\sigma_n^2 u^2/2}$ converge vers $e^{-\sigma^2 u^2/2}$). ▫

Conséquence : orthogonal = indépendant. Si $\int_0^T f \, g = 0$, alors $\int f \, dB$ et $\int g \, dB$ sont indépendantes (couple gaussien non corrélé).

Exemple. $\int_0^t s \, dB_s \sim \mathcal{N}(0, t^3/3)$, car $\int_0^t s^2 \, ds = t^3/3$.

9. Extension et processus d'Itô

9.1 Extension (à titre culturel)

La construction s'étend aux processus adaptés vérifiant seulement $\int_0^T H_s^2 \, ds < \infty$ p.s. (sans espérance), par une technique de **localisation** par temps d'arrêt. On obtient alors une **martingale locale**, qui n'est plus forcément une vraie martingale, et l'isométrie peut tomber en défaut. Dans ce cours, on travaillera le plus souvent dans $\mathcal{H}^2$, où tout se passe bien.

9.2 Processus d'Itô

Définition. Un **processus d'Itô** est un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \, ds + \int_0^t H_s \, dB_s,$$

avec K et H adaptés, $\int_0^t |K_s| \, ds < \infty$ et $H \in \mathcal{H}^2$. On écrit en abrégé

$$dX_t = K_t \, dt + H_t \, dB_t.$$

Cette **notation différentielle** n'est qu'un raccourci pour l'égalité intégrale ci-dessus : dB_t n'a pas de sens isolément.

- $\int_0^t K_s \, ds$ est la partie **à variation finie** (la « dérive ») ;
- $\int_0^t H_s \, dB_s$ est la partie **martingale** ;
- La décomposition est unique (admis) et $\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$: la dérive ne contribue pas.

Exemple. Le calcul du § 6 s'écrit $B_t^2 = t + 2\int_0^t B_s \, dB_s$, c'est-à-dire

$$d(B_t^2) = dt + 2B_t \, dB_t.$$

B^2 est donc un processus d'Itô de dérive $K = 1$ et de partie martingale $H = 2B$. La formule d'Itô (semaine 5) généralisera ce calcul à $f(B_t)$ pour toute fonction f de classe C^2.

10. À retenir

1. On intègre des processus **adaptés**, évalués au **point gauche** : $\int_0^t H \, dB = \lim \sum_i H_{t_i} \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$.
2. Construction : processus simples, isométrie, densité, limite dans L^2.
3. $\mathbb{E}\left[\int H \, dB\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\left(\int H \, dB\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int H^2 \, ds\right]$ (isométrie d'Itô).
4. $\int_0^t H \, dB$ est une martingale continue de variation quadratique $\int_0^t H^2 \, ds$.

5. $\int_0^t B\ dB = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$: le terme $-\frac{t}{2}$ vient de la variation quadratique.
6. Si f est déterministe : $\int f\ dB \sim \mathcal{N}\left(0, \int f^2\right)$.

11. TD — Exercices corrigés

Exercice 1 — Intégrale d'un processus simple

Soit $H_s = 1$ pour s dans]0, 1] et $H_s = B_1$ pour s dans]1, 2] sur [0,2] et $I = \int_0^2 H_s\ dB_s$.

1. Vérifier que H est un processus simple et écrire I.
2. Calculer $\mathbb{E}[I]$ et $\mathbb{E}[I^2]$ directement.
3. Vérifier l'isométrie d'Itô.

Exercice 2 — Intégrand déterministe et intégration par parties

1. Donner la loi de $X_t = \int_0^t s\ dB_s$ et calculer $\mathrm{Cov}(X_t, B_t)$.
2. Pour la subdivision $t_i = it/n$, montrer l'identité (sommation par parties)

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_i\ \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = tB_t - \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}}\ (t_{i+1} - t_i).$$

3. En déduire que $\int_0^t s\ dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\ ds$, puis retrouver $\mathrm{Var}\left(\int_0^t B_s\ ds\right) = t^3/3$.

Exercice 3 — Couple gaussien d'intégrales de Wiener

Soient $U = B_1 = \int_0^1 d\,B_s$ et $V = \int_0^1 s\ dB_s$.

1. Donner la matrice de covariance du vecteur (U, V).
2. Trouver c tel que $V - cU$ soit indépendant de U, et calculer $\mathrm{Var}(V - cU)$.

Exercice 4 — Isométrie pour des intégrands aléatoires

1. Calculer $\mathrm{Var}\left(\int_0^t B_s^2\ dB_s\right)$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[\int_0^t B_s\ dB_s \cdot B_t\right]$ de deux façons.
3. Calculer $\mathbb{E}\left[\int_0^1 B_s\ dB_s \mid \mathcal{F}_{1/2}\right]$ de deux façons.

Exercice 5 — Convergence de l'approximation

Soit $H_s^n = \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}^2 \, \mathbf{1}_{I_i}(s)$ sur la subdivision uniforme de $[0, t]$, avec $h = t/n$.

1. Pour $t_i < s \leq t_{i+1}$, montrer que $\mathbb{E}\left[\left(B_s^2 - B_{t_i}^2\right)^2\right] = 4t_i(s - t_i) + 3(s - t_i)^2$. (Indication : écrire $B_s = B_{t_i} + Y$.)
2. En déduire que $H^n \to B^2$ dans $\mathcal{H}^2$.

Exercice 6 — Pourquoi l'adaptation est indispensable

On considère l'intégrand non adapté $H_s = B_1$ pour s dans $]0, 1]$ et l'on « définit » naïvement $\int_0^1 H_s \, dB_s = B_1(B_1 - B_0) = B_1^2$.

1. Calculer l'espérance de cette « intégrale ».
2. Comparer $\mathbb{E}[(B_1^2)^2]$ et $\mathbb{E}\int_0^1 H_s^2 \, ds$.
3. Conclure.

Exercice 7 — Variation quadratique d'une intégrale

Soit $M_t = \int_0^t B_s \, dB_s$.

1. Donner $\langle M \rangle_t$ et $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t]$.
2. Vérifier que $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_t]$.
3. $\langle M \rangle_t$ est-il déterministe ? Comparer avec $N_t = \int_0^t s \, dB_s$.

Références

Références du plan de cours ; données bibliographiques de mémoire, à contrôler en bibliothèque.

- B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 6e éd., 2003 — chapitre 3 (intégrale d'Itô), référence prioritaire.
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses — chapitre 3 (intégrale stochastique), en français.
- S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004 — chapitre 4 (l'intégrale d'Itô y est construite pas à pas, avec l'interprétation en portefeuille).
- I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, GTM 113, 2e éd., 1991 — chapitre 3, version complète et rigoureuse.
- J.-F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, coll. Mathématiques et Applications 71, 2013 — chapitre 5, en français.