Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatique

1ère Année Licence Informatique
2026-2027

Analyse 1
Fiche de TD 3
Les suites réelles

Exercice 1

1. En utilisant la définition de la limite d'une suite, vérifier que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty$$

2. Déterminer les limites, au voisinage de $+\infty$, des suites numériques suivantes :

$$\frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}, \quad 5^n-4^n, \quad \frac{3^n+2}{8^n-1}, \quad \frac{\sin n}{2+n^3}, \quad n^2e^{-n}, \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

$$n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k}, \quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx),\ x\in\mathbb{R}, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

Exercice 2 (Traité en cours.)
On considère la suite (U_n) des nombres réels définie pour $n\geq 1$ par :

$$U_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite (U_n) est monotone et que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}\leq U_n<1.$$

2. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 3
Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0=\frac{1}{2}, \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=\frac{U_n}{U_n+1}$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $U_n\in\,]0;1[$.
2. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4
Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0=1, \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=2U_n+1-n$$

Montrer par récurrence que $U_n\geq n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et en déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 5
Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 \text{ est donné}, \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+1$$

I. a) On suppose que $U_0=1$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<U_n\leq 2$, et que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

II. Soit $U_0\neq 2$. On pose $V_n=U_n-2$.

1. Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. Exprimer U_n en fonction de n et de U_0.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

Exercice 6

Vérifier si les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

1. $U_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, \qquad V_n = U_n + \dfrac{1}{n}$
2. $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}, \qquad V_n = 1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 7 (Facultatif)

Déterminer les limites des suites numériques suivantes :

$$\frac{n+\cos n}{5n+\sin n}, \quad \frac{2^n}{n!}, \quad n\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}, \quad \frac{\mathrm{E}(\sqrt{n})}{n}, \quad n\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1}{3n^2+k}$$

Exercice 8 (Facultatif)

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2^n}$$

1. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a
$$\left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2^n}\right| < \frac{3}{4}$$
2. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 9 (Facultatif)

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 \in]1;2], \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{3+(U_n)^2}{4}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \in]1;2]$.
2. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone.
3. En déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10 (Facultatif)

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = -1, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n \geq 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sqrt{3} - U_{n+1} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+U_n}\left(\sqrt{3}-U_n\right)$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \sqrt{3}$.
4. Étudier la monotonie de la suite (U_n).
5. Que peut-on conclure ?