UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAÏD- Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Résistance des Matériaux

Niveau L2 GC

CHAPITRE III

Caractéristiques géométriques des sections planes

Intervenants dans la Matière
Dr. Latefa SAIL
Dr. Souad BENHACHILIF
Dr. Naouel DJAFOUR
Mme. Sabah GHEZALI

Année Universitaire: 2019/2020

Introduction

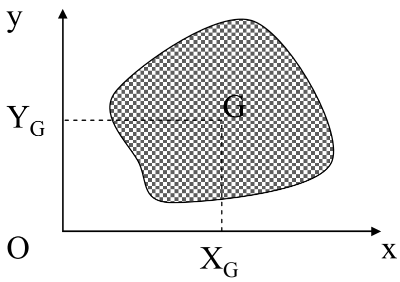
Ultérieurement, pour calculer les contraintes et les déformations des solides étudiés, nous aurons besoin de savoir déterminer un certain nombre de caractéristiques géométriques des sections planes :

- Centre de gravité,
- Moment statique,
- Moments quadratiques

2

I. Centre de gravité

Soit une section plane d'aire S définie dans un repère orthonormé Oxy.



Les coordonnées du centre de gravité G sont définies par :

$$X_G = \frac{\iint_S x.dS}{S} \qquad Y_G = \frac{\iint_S y.dS}{S}$$

Si la section S peut être décomposée en sous-sections simples, d'aires connues S_i et de centres de gravités connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :

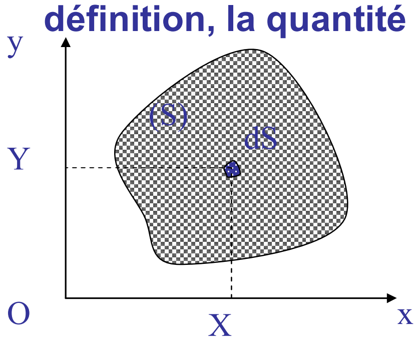
$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i.x_{Gi})}{S} \qquad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n}(S_i.y_{Gi})}{S}$$

3

II. Moment statique

Pour un élément dS, de coordonnées X et Y, le moment statique élémentaire par rapport à l'axe Ox est, par définition, la quantité :

$$d\mu_x = Y.dS$$



Ce qui donne pour l'ensemble de la section :

$$\mu_x = \iint_S y.dS \qquad \text{soit} \quad \mu_x = S.Y_G$$

De même :

$$\mu_y = \iint_S x.dS \qquad \text{soit} \quad \mu_y = S.X_G$$

4

II. Moment statique

Remarques :

- pour tout axe passant par le centre de gravité, le moment statique par rapport à cet axe est nul.

- si la section S peut être décomposée en sous-sections simples, d'aires connues S_i et de c.d.g connus (x_{Gi} et y_{Gi}) alors :

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{n} (S_i . y_{Gi})$$

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{n} (S_i . x_{Gi})$$

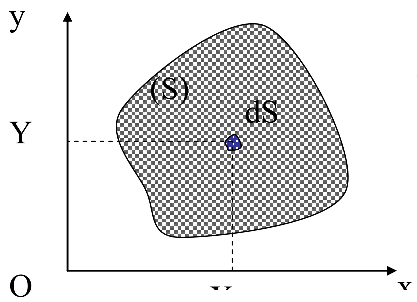
5

III. Moments quadratiques

III.1 Moment quadratique par rapport à un axe

Pour un élément dS, de coordonnées X et Y, le moment quadratique élémentaire par rapport à l'axe Ox est, par définition, la quantité :

$$dI_{Ox} = Y^2.dS$$



Ce qui donne pour l'ensemble de la section :

$$I_{Ox} = \iint_S y^2.dS \quad \text{et:} \quad I_{Oy} = \iint_S x^2.dS$$

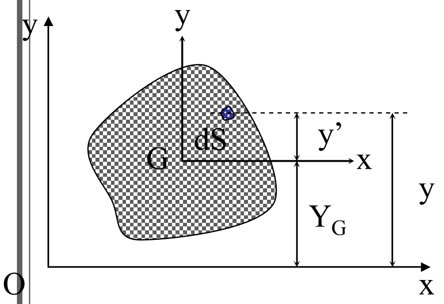
- **Le moment quadratique est aussi appelé moment d'inertie de la section.**
- **Il est toujours positif**

6

III. Moments quadratiques

III.2 Translation d'axes : Théorème de Huygens

Soit un élément dS de S dans le repère Oxy, et soit le repère Gxy qui passe par le centre de gravité G de S et dont les axes sont parallèles à Ox et Oy.



$$I_{Ox} = \iint_S y^2.dS \quad \text{avec } y = Y_G + y'$$

Soit : $$I_{Ox} = \iint_S (Y_G{}^2 + 2.Y_G.y' + y'^2).dS$$

Ce qui donne :

$$I_{Ox} = Y_G{}^2.\underbrace{\iint_S dS}_{=S} + 2.Y_G.\underbrace{\iint_S y'dS}_{=\text{ moment statique/Gx } = 0} + \iint_S y'^2 dS$$

Finalement, on obtient : $$I_{Ox} = I_{Gx} + S.Y_G{}^2$$

$$I_{Oy} = I_{Gy} + S.X_G{}^2$$

III. Moments quadratiques

Théorème :

Le moment quadratique par rapport à un axe est égal au moment quadratique par rapport à un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la surface par le carré de la distance entre les deux axes.

Calcul pratique :

Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments quadratiques connus I_{Ox_i} et I_{Oy_i}, alors:

$$\boxed{I_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} I_{Ox_i}} \qquad \boxed{I_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} I_{Oy_i}}$$

Remarque **:**

Généralement, pour le calcul des contraintes et des déformations, nous avons besoin de connaître le moment quadratique de la section par rapport à son centre de gravité.

Donc si la section peut être décomposée en n sous-sections S_i de centre de gravité G_i et de moment quadratique I_{G_ix} ou I_{G_iy} connus:

$$\boxed{I_{Gx} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{G_ix} + S_i.(Y_{Gi} - Y_G)^2\right)} \qquad \boxed{I_{Gy} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{G_iy} + S_i.(X_{Gi} - X_G)^2\right)}$$

III.3 Moment quadratique par rapport à un couple d'axe

Ce moment quadratique est aussi appelé moment produit.

Pour un élément dS, le moment produit élémentaire par rapport aux axes Ox et Oy est par définition la quantité:

$$dI_{Oxy} = X.Y.dS$$

Ce qui donne pour l'ensemble de la section: $I_{Oxy} = \iint_S x.y.dS$

Théorème de Huygens: $I_{Oxy} = I_{Gxy} + S.X_G.Y_G$

Remarques:

- **Le moment produit est une grandeur algébrique**
- **Si un des deux axes est un axe de symétrie pour la section alors I_{Oxy}=0**

III. Moments quadratiques

Calculs pratiques :

➢ **Si la surface peut être décomposée en n sous-sections de moments produits connus I_{Oxyi}, alors:**

$$\boxed{I_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} I_{Oxy_i}}$$

➢ **Si on cherche le moment produit d'une section par rapport à son centre de gravité et que celle-ci peut être décomposée en n sous-sections de c.d.g. G_i connus et de moments produits par rapport à leur c.d.g. connus I_{G_ixy}, alors:**

$$\boxed{I_{Gxy} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{G_ixy} + S_i.(X_{Gi} - X_G).(Y_{Gi} - Y_G) \right)}$$

11

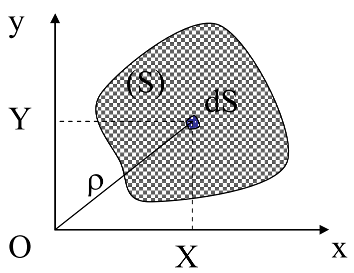
III. Moments quadratiques

III.3 Moment quadratique par rapport à un point

Ce moment quadratique est aussi appelé moment quadratique (ou d'inertie) polaire.

Pour un élément dS, à une distance r de O, le moment quadratique polaire élémentaire par rapport à ce point est par définition la quantité:

$$dI_o = r^2.dS$$



Ce qui donne pour l'ensemble de la section:

$$I_o = \iint_S r^2.dS$$

Remarque: on peut écrire $r^2 = x^2 + y^2$ soit: $I_o = \iint_S x^2.dS + \iint_S y^2.dS$

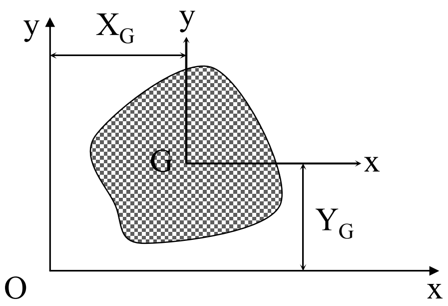
Finalement, on obtient: $I_o = I_{Ox} + I_{Oy}$

12

III. Moments quadratiques

III.3 Moment quadratique par rapport à un point

Changement d'origine (Théorème de Huygens)



$$\boxed{I_o = I_{Ox} + I_{Oy}}$$

Soit:

$$\boxed{I_o = \left(I_{Gx} + S.Y_G{}^2\right) + \left(I_{Gy} + S.X_G{}^2\right)}$$

ou:

$$\boxed{I_o = I_{Gx} + I_{Gy} + S.\left(X_G{}^2 + Y_G{}^2\right)}$$

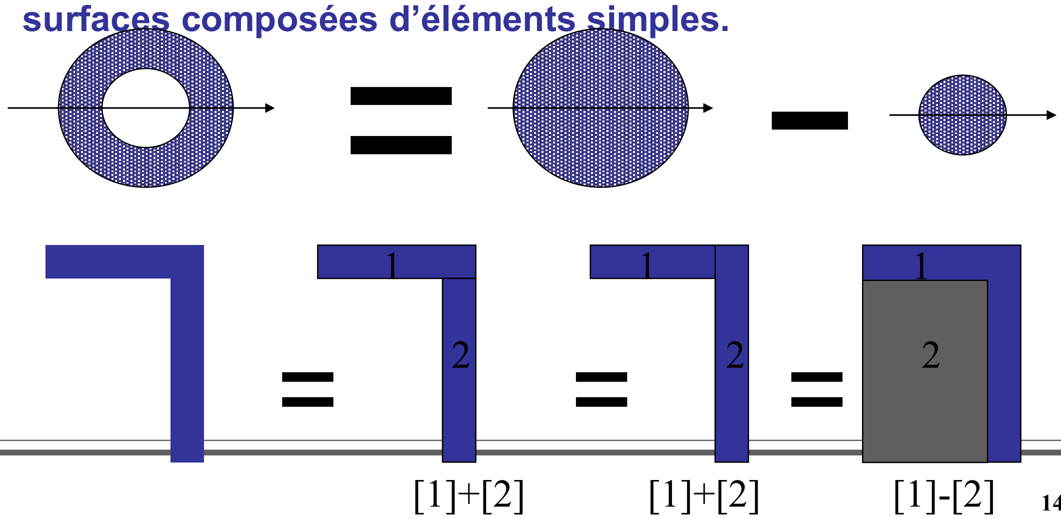
Finalement, on obtient:

$$\boxed{I_o = I_G + S.(OG)^2}$$

III. Moments quadratiques

Remarques pratiques concernant le calcul des moments quadratiques

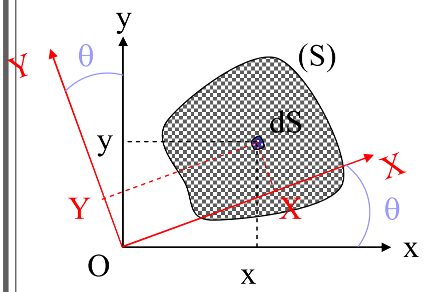
Les moments quadratiques s'ajoutent et se retranchent. Cette propriété permet une détermination aisée dans le cas de surfaces composées d'éléments simples.



III.4 Moments quadratiques d'axes concourants

III.4.1 Rotations d'axes

Soit la section plane S, et deux systèmes d'axes Oxy et OXY obtenu par une rotation d'angle θ.



Les relations liant les coordonnées dans les deux repères sont:

$$X = x.\cos\theta + y.\sin\theta$$
$$Y = -x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

Calculons le moment quadratique / OX :

$$I_{OX} = \iint_S Y^2.dS = \iint_S \left(-x.\sin\theta + y.\cos\theta\right)^2.dS$$

$$I_{OX} = \iint_S \left(x^2.\sin^2\theta - 2.xy.\sin\theta.\cos\theta + y^2.\cos^2\theta\right).dS$$

III. Moments quadratiques

III.4.1 Rotations d'axes

$$I_{OX} = \sin^2\theta \iint_S x^2.dS + \cos^2\theta \iint_S y^2.dS - 2\sin\theta\cos\theta \iint_S xy.dS$$

Ce qui nous donne :

$$I_{OX} = \sin^2\theta.I_{Oy} + \cos^2\theta.I_{Ox} - 2.\sin\theta.\cos\theta.I_{Oxy}$$

En passant à l'angle double :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad ; \quad \sin\theta.\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

On obtient :

$$I_{OX} = \frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2} + \frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\cos 2\theta - I_{Oxy}.\sin 2\theta$$

III.4.1 Rotations d'axes

De même, pour le moment quadratique / OY, on obtient :

$$\boxed{I_{OY}=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}-\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\cos 2\theta+I_{Oxy}.\sin 2\theta}$$

Calcul du moment produit :

$$\boxed{I_{OXY}=\iint_S XY.dS=\iint_S(x.\cos\theta+y.\sin\theta).(-x.\sin\theta+y.\cos\theta).dS}$$

$$\boxed{I_{OXY}=\sin\theta.\cos\theta.\left(\iint_S y^2.dS-\iint_S x^2.dS\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\iint_S x.y.dS}$$

Soit :

$$\boxed{I_{OXY}=\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\sin 2\theta+I_{Oxy}.\cos 2\theta}$$

III.4.3 Expression des moments quadratiques principaux

Pour connaître les expressions des moments quadratiques principaux (I_{maxi} et I_{mini}), il suffit de remplacer, dans les formules donnant I_{OX}, I_{OY} et I_{OXY}, la valeur de q par les solutions de l'équation:

$$\tan(2\theta)=\frac{-2I_{Oxy}}{I_{Ox}-I_{Oy}}$$

On obtient ainsi:

$$I_{maxi}=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I^2_{Oxy}}$$

$$I_{mini}=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I^2_{Oxy}}$$

III. Moments quadratiques

III.4.4 Représentation graphique – Cercle de Mohr

Reprenons les expressions donnant I_{OX} et I_{OXY}

$$I_{OX}-\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}=\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\cos 2\theta - I_{Oxy}.\sin 2\theta$$

$$I_{OXY}=\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}.\sin 2\theta + I_{Oxy}.\cos 2\theta$$

Effectuons la somme des carrés, on obtient:

$$\left(I_{OX}-\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{OXY}{}^2=\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{Oxy}{}^2$$

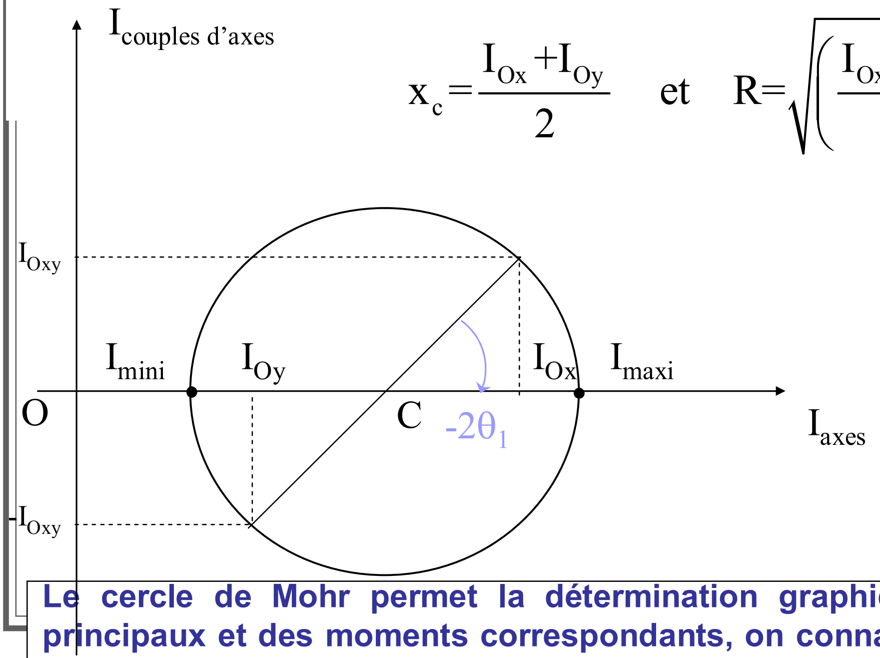
Ce qui correspond à l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R

$$x_c=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2} \quad \text{et} \quad R=\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{Oxy}{}^2}$$

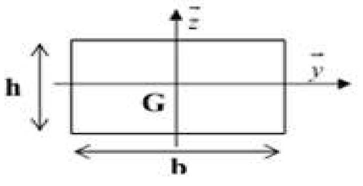
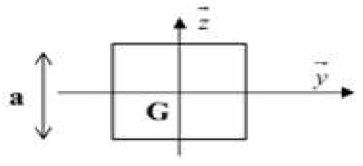
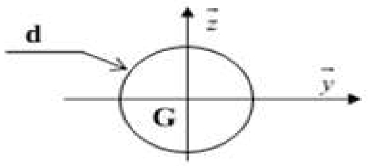
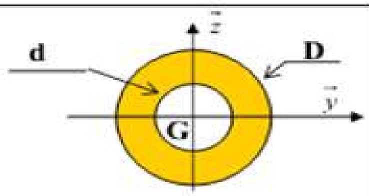
III. Moments quadratiques

III.4.4 Représentation graphique – Cercle de Mohr

$$x_c=\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2} \quad \text{et} \quad R=\sqrt{\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)^2+I_{Oxy}{}^2}$$



Le cercle de Mohr permet la détermination graphique des axes principaux et des moments correspondants, on connait, Ix, Iy et Ixy pour un système d'axes.

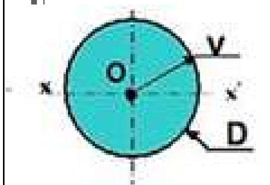
	I_{Gyy}	I_{Gzz}	$I_G = I_{Gyy} + I_{Gzz}$
	$\frac{b.h^3}{12}$	$\frac{h.b^3}{12}$	$\frac{h.b}{12}(b^2+h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi.d^4}{64}$	$\frac{\pi.d^4}{64}$	$\frac{\pi.d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$

Module d'Inertie

Définition

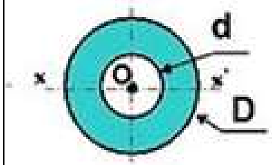
Le module d'inertie est un élément indispensable pour le calcul de la résistance à la rupture de différents matériaux. Il dépend de la forme, de la section de ces matériaux et est complémentaire au *moment d'inertie* .

Le *moment d'inertie* est le quotient du *moment d'inertie* par la distance de celui-ci au centre de gravité du matériau ou à un axe.



Cylindre plein

Moment d'inertie sur axe xx':
$$Ixx' = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$
et le Module d'inertie :
$$\frac{Ixx'}{v} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}$$



Cylindre creux

Moment d'inertie sur axe xx':
$$Ixx' = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$$
et le Module d'inertie :
$$\frac{Ixx'}{v} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D}$$

Matériaux parallélépipédiques

Parallélépipède (fig.1) par rapport sa base

Moment d'inertie : et module d'inertie :

$$Ixx' = \frac{b \cdot h^3}{3} \qquad \frac{Ixx'}{v} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h^2$$

Parallélépipède (fig. 2) par rapport à l'axe passant par son centre :

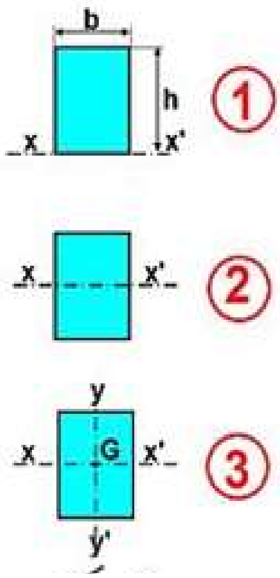
Moment d'inertie : et module d'inertie :

$$Ixx' = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad \frac{Ixx'}{v} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Parallélépipède (fig. 3) en son centre :

Moment d'inertie (torsion) :

$$I_G = \frac{b \cdot h}{12} \cdot (b^2 + h^2)$$



Rayon de Giration

Le rayon de giration « r » est une caractéristique géométrique d'une section qui est utilisé dans la détermination de l'élancement d'un élément de structure soumis à un effort de compression « poteau ».

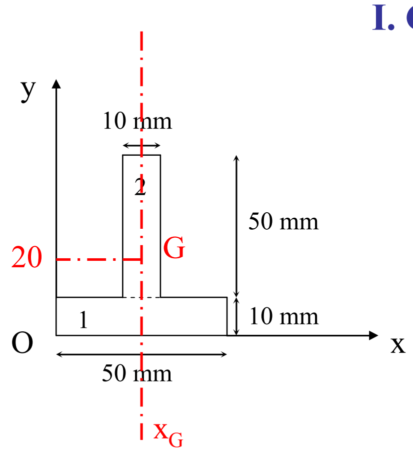
$$r^2 = I / S, \quad \text{Ou} \quad r = \sqrt{\frac{I_\Delta}{S}}$$

Si l'on considère les axes xx et yy, on aura:

$$I_x = \iint_S y^2\, dS, \quad I_y = \iint_S x^2\, dS, \quad r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}} \quad \text{et} \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}.$$

I. Centre de gravité

Exercice 1.



Xg= S1. x1+S2. x2 / (S1+S2)

Yg= S1. y1+S2. y2 / (S1+S2)

$Xg = 25$ mm

$Yg= 20$ mm

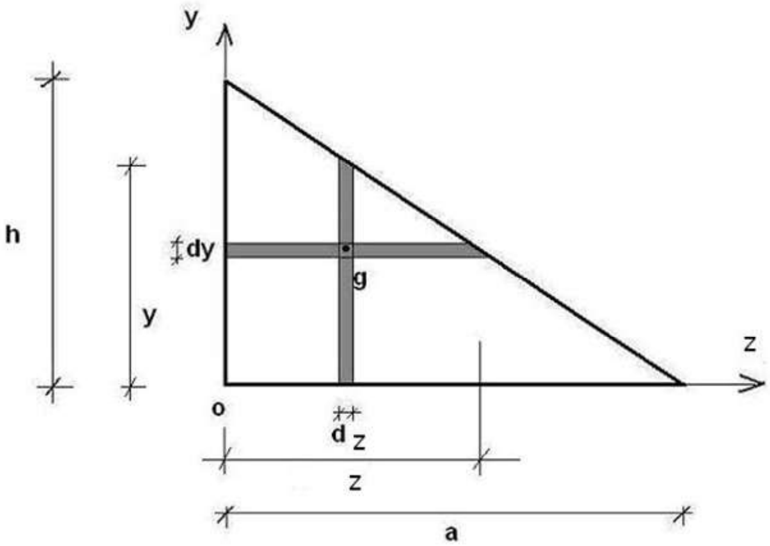
	Xg	Yg	S
1	*25*	*5*	*500*
2	*25*	*35*	*500*

26

- **Exercice 2.**

Soit le triangle rectangle de hauteur h et longueur a,

- Déterminer la position du centre de gravité « G » (Z_G , Y_G).



27

$$y = -\frac{h}{a}z + h \qquad z = -\frac{a}{h}y + a \qquad ds = zdy$$

$$Y_G = \frac{M(S^t)/z}{S} = \frac{\iint_S yds}{S}$$

$$M(S^t)/z = \iint_S yds = \int_0^h y(-\frac{a}{h}y + a)dy = \left[-\frac{ay^3}{3h} + \frac{ay^2}{2} \right]_0^h = \frac{ah^2}{6}$$

$$Surface_{triangle} = S = \frac{ah}{2}$$

$$Y_G = \frac{M(S^t)/z}{S} = \frac{\iint_S yds}{S}$$

$$\boxed{Y_G = \frac{M(S^t)/z}{S} = \frac{ah^2}{6} \times \frac{2}{ah} = \frac{h}{3}}$$

28

$$Y_G = \frac{M(S^t)/z}{S} = \frac{\iint_S yds}{S}$$

$$\boxed{Y_G = \frac{M(S^t)/z}{S} = \frac{ah^2}{6} \times \frac{2}{ah} = \frac{h}{3}}$$

$$ds = ydz$$

$$M(S^t)/y = \iint_S zdz$$

$$M(S^t)/y = \int_0^a z(\frac{-h}{a}z + h)dz = \frac{ha^2}{6}$$

$$\boxed{Z_G = \frac{M(S^t)/y}{S} = \frac{a^2h}{6} \times \frac{2}{ah} = \frac{a}{3}}$$

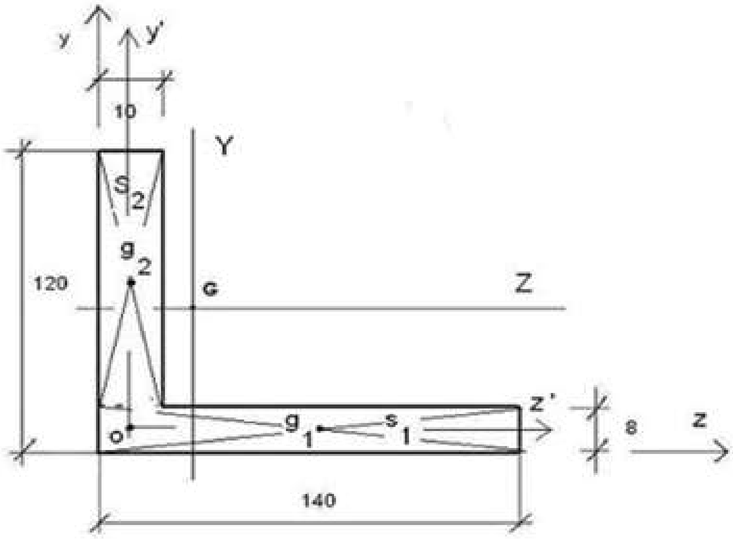
29

Exercice 3.

Soit la section ci-dessous, les cotes sont en cm.

Déterminer le produit d'inertie par rapport au système yGz

Déterminer les moments quadratiques par rapport aux axes Gy et GZ.



30

Préalablement il faut définir la position de G :

$$\boxed{Y_G = \frac{(140x8x4)+(112x10x64)}{(140x8)+(112x10)} = 34cm}$$

$$\boxed{Z_G = \frac{(112x10x5)+(140x8x70)}{(130x8)+(120x10)} = 37.50cm}$$

Puis calculer :

$$I(S)/Gyz = I(S_1)/Gyz + I(S_2)/Gyz$$

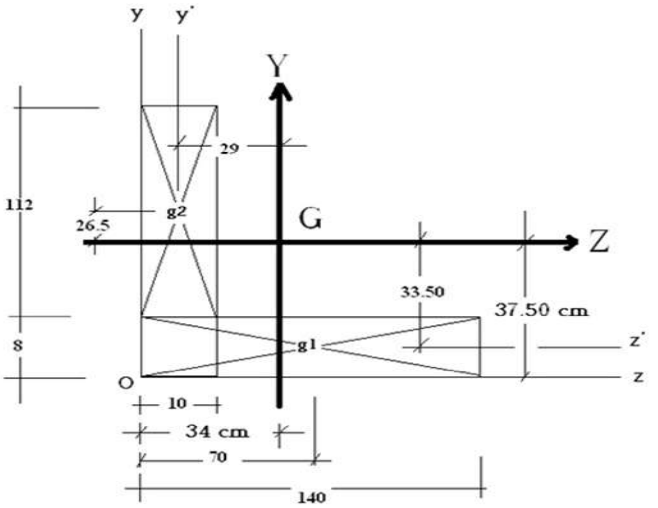
$$I(S_1)/Gyz = I(S_1)/o'z'y' + S_1 z_{G_1} y_{G_1}$$

$$I(S_2)/Gzy = I(S_2)/o'z'y' + S_2 z_{G_2} y_{G_2}$$

$$I(S_1)/o'z'y' = 0....car...y'_{G_1} = 0$$

$$I(S_2)/o'z'y' = 0....car...z'_{G_2} = 0$$

31



$$I(S_1)/0z\ y = 140x8x4x70 = 313600\,cm^4$$

$$I(S2)/0zy = 112x10x5x64 = 358400\,cm^4$$

$$I(S)/GYZ = I(S_1)/0zy + I(S_2)/0zy - 2240x34x37.5 == -2184000cm^4$$

32

Moments quadratiques par rapport aux axes GZ et GY :

$$I(S)/GZ = \frac{140x8^3}{12} - 140x8x(33.5)^2 + \frac{112^3x10}{12} - 112x10x26.5^2 = 866693cm^4$$

$$I(S)/GY = \frac{140^3x8}{12} - 140x8x(36.)^2 + \frac{10^3x112}{12} - 112x10x29^2 = 554773cm^4$$

$$\tan 2\theta = \frac{2(-2184000)}{-866693 - 554773} = 0.307$$

$$2\theta = Arc\tan g...0.307$$

33

Exercice 4.

Rechercher le centre de masse du profil type 414A ci-contre, utilisé en carrosserie.

Déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes (Ox,Oy) (horizontal et vertical) passant par ce centre de gravité.

Réponses :

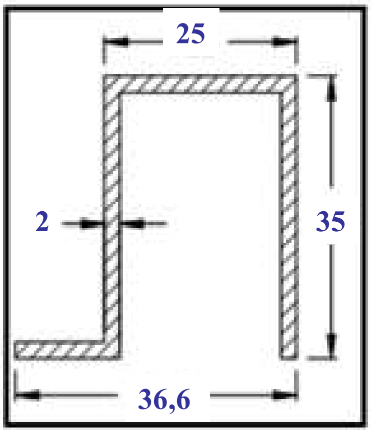
Les coordonnées sont données par rapport au coin inférieur gauche.

x_G = 22,03 mm.

y_G = 19,01mm .

Ix_G = 31595 mm4

Iy_G = 27256 mm4



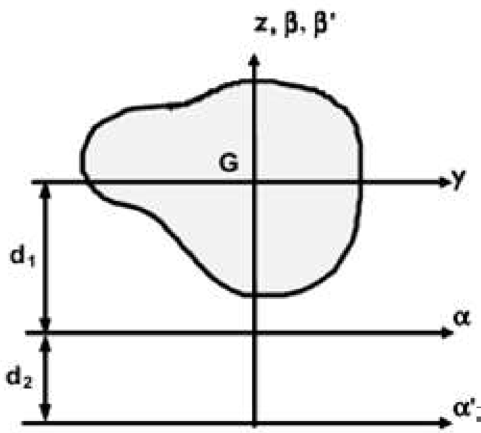
34

EXERCICE 5.

- L'aire de la surface ci-contre vaut 129 cm². Ses moments d'inertie par rapport aux axes α et α' valent respectivement 37 460 cm4 et 74 920 cm4. La distance d2 vaut 7.6 cm. Calculez la distance d1, le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe central y, et le moment statique de la surface par rapport à l'axe α'.

- L'aire de la surface ombrée Vaut maintenant 96.78 cm². Son moment d'inertie par rapport à l'axe α' vaut 16 650 cm4. Les distances d1 et d2 valent respectivement 7.6 cm et 5.1 cm

Calculez le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe α .



35

1) Théorème d'Huyghens :

$$\begin{cases} I_{\alpha\alpha} = I_{yy} + d_1^2 A & (1) \\ I_{\alpha'\alpha'} = I_{yy} + \left(d_1^2 + d_2^2\right)A & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 37460 = I_{yy} + d_1^2 129 & (1) \\ 74920 = I_{yy} + \left(d_1^2 + 7{,}6\right)129 & (2) \end{cases}$$

$$(2)-(1) \Rightarrow 37460 = \left(2d_1 \times 7{,}6 + 7{,}6^2\right)129 \qquad d_1 = 15{,}3 \text{ cm}$$

En reportant la valeur de d_1 dans l'équation (1) : $I_{yy} = 7246{,}6 \text{ cm}^4$

$$Q_{\alpha'} = x_{\beta_G} A = (15{,}3 + 7{,}6)129 \qquad Q_{\alpha'} = 2954{,}1 \text{ cm}^3$$

2) $I_{yy} = I_{\alpha'\alpha'} - \left(d_1^2 + d_2^2\right)A$ $\qquad I_{yy}=16650-12{,}7^2*96{,}78$ $\qquad I_{yy}=1040{,}35 \text{ cm}^4$

$I_{\alpha\alpha} = I_{yy} + d_1^2 A$ $\qquad I_{\alpha\alpha}=1040{,}35+7{,}6^2*96{,}78$ $\qquad I_{\alpha\alpha}=6630{,}37 \text{ cm}^4$

36

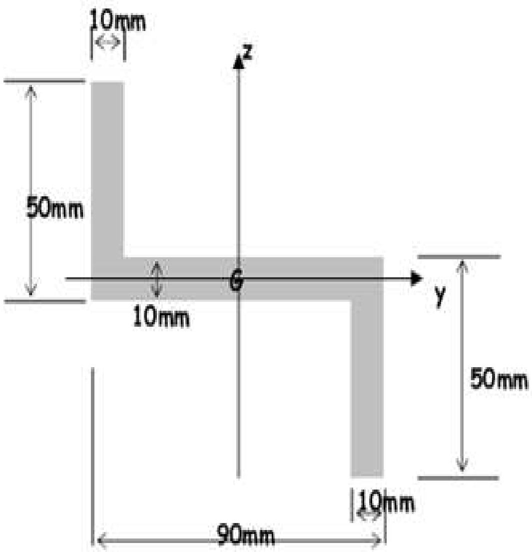
Exercice 6.

Calculez pour la surface ci-contre:

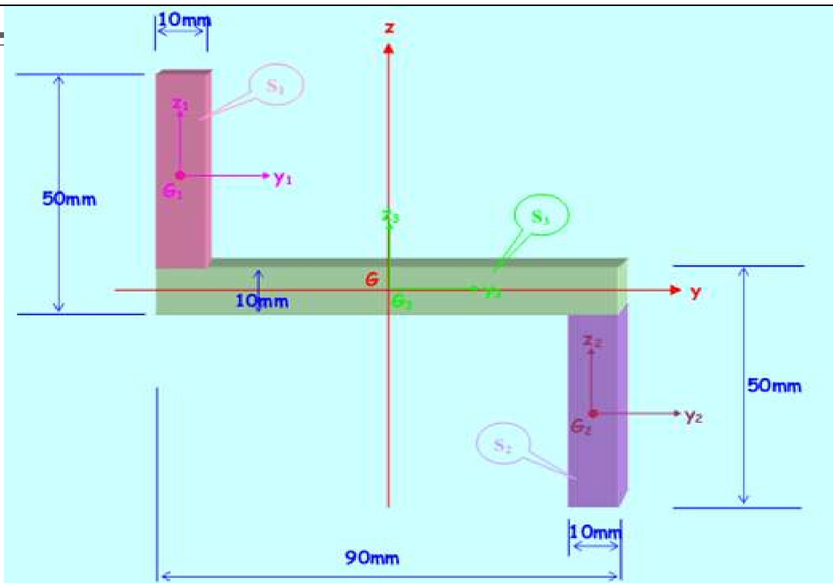
1°) Les moments et le produit d'inertie par rapport aux axes centraux y et z.

2°) La position des axes centraux principaux et les moments d'inertie principaux.

3°) Les moments et le produit d'inertie par rapport à deux nouveaux axes centraux obtenus par une rotation positive de 30° des axes y et z.



37



Décomposons la surface initiale S en trois surfaces S1, S2 et S3:

$$I_{yy}^{S} = I_{yy}^{S_1} + I_{yy}^{S_2} + I_{yy}^{S_3} \quad \text{avec} \quad I_{yy}^{S_1} = I_{yy}^{S_2}$$

Appliquons le théorème d'Huygens :

$$I_{yy}^{S_1} = I_{y_1y_1}^{S_1} + z_{G1}^2 A_1 \qquad \text{et} \qquad I_{yy}^{S_3} = I_{y_3y_3}^{S_3} \qquad G_{/yz}\left|\begin{matrix} -4cm \\ 2,5cm \end{matrix}\right.$$

$$I_{yy}^{S} = 2\left(\frac{1\times4^3}{12} + 2,5^2\times4\right) + \frac{9\times1^3}{12}$$ **I_{yy}^{S}=61,42 cm4**

De même : $I_{zz}^{S} = 2\left(\frac{4\times1^3}{12} + (-4)^2\times4\right) + \frac{1\times9^3}{12}$ **I_{zz}^{S}=189,42 cm^4**

$I_{yz}^{S} = I_{yz}^{S_1} + I_{yz}^{S_2} + I_{yz}^{S_3}$ avec $I_{yz}^{S_3} = 0$ (y et z sont axes de symétrie pour S_3) $I_{yz}^{S_1} = I_{yz}^{S_2} = I_{y_1z_1}^{S_1} + y_{G1}z_{G1}A_1$

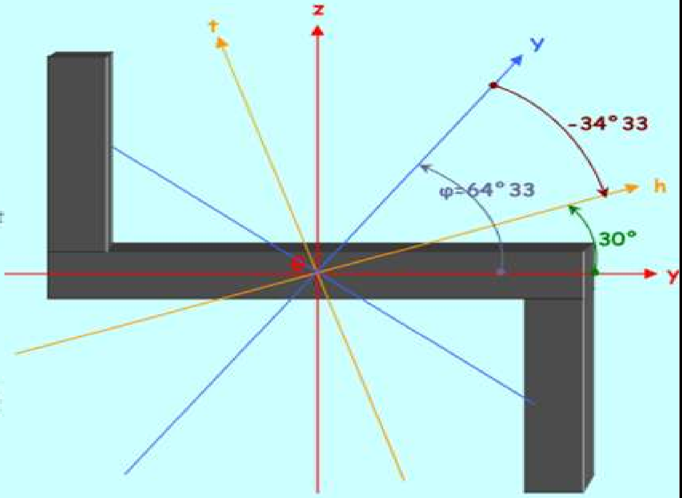
$I_{yz}^{S} = 2(0 + (-4)(2,5)\times4\times1)$ car $I_{y_1z_1}^{S_1} = 0$ (y_1 et z_1 sont axes de symétrie pour S_1) **I_{yz}^{S}=-80 cm^4**

<u>**Position des axes principaux :**</u>

$$\tan 2\varphi = \frac{-2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

$\cos 2\varphi$ même signe que $I_{yy} - I_{zz}$

$$\hat{\varphi} = \left(\vec{y}, \vec{Y}\right)$$

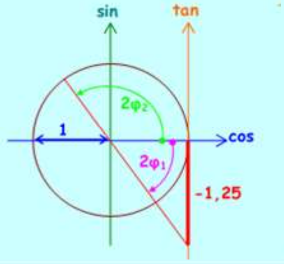


$$\tan 2\varphi = \frac{-2\times80}{61,42 - 189,42} \approx -1,25$$

$\cos 2\varphi \langle 0$

Inversion trigonométrique de la tangente : $\tan 2\varphi \approx -1{,}25$ $\begin{cases} 2\varphi_1 = -51^\circ 34 \\ 2\varphi_2 = 128^\circ 66 \end{cases}$

Or $\cos 2\varphi \langle 0$ la solution φ_1 est donc à rejeter. **φ=64°33** avec



Moments d'inertie principaux

$$I_Y^Z = \frac{I_{yy}+I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{yy}-I_{zz}\right)^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{61{,}42+189{,}42}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(61{,}42-189{,}42)^2 + 4(-80)^2}$$

Inversion trigonométrique de la tangente : $\tan 2\varphi \approx -1{,}25$ $\begin{cases} 2\varphi_1 = -51^\circ 34 \\ 2\varphi_2 = 128^\circ 66 \end{cases}$

Or $\cos 2\varphi \langle 0$ la solution φ_1 est donc à rejeter. **φ=64°33** avec $\hat{\varphi} = \left(\vec{y}, \vec{Y}\right)$

Moments d'inertie principaux

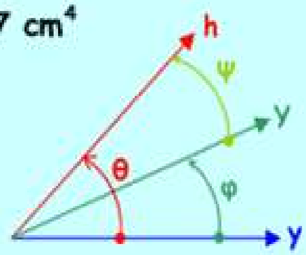
$$I_Y^Z = \frac{I_{yy}+I_{zz}}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{yy}-I_{zz}\right)^2 + 4I_{yz}^2} = \frac{61{,}42+189{,}42}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(61{,}42-189{,}42)^2 + 4(-80)^2}$$

Utilisons les formules de rotation exprimées dans les axes principaux :

I_Y=227,87 cm^4
I_Z=22,97 cm^4

$$\begin{cases} I_{hh} = \dfrac{I_Y+I_Z}{2} + \dfrac{I_Y-I_Z}{2}\cos 2\psi \\ I_{tt} = \dfrac{I_Y+I_Z}{2} + \dfrac{I_Y-I_Z}{2}\cos 2\left(\psi+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ I_{ht} = \dfrac{I_Y-I_Z}{2}\sin 2\psi \end{cases}$$

avec $\hat{\psi} = \left(\vec{Y}, \vec{h}\right)$



$$I_{hh} = \frac{227{,}87+22{,}97}{2} + \frac{227{,}87-22{,}97}{2}\cos 2\left(-34^\circ 33\right)$$

I_{hh}=162,7 cm^4
I_{tt}=88,14 cm^4
I_{ht}=-95,43 cm^4

Nous pouvons vérifier que : **$I_{hh}+I_{tt}$ = I_Y+I_Z = I_G = 250,84 cm^4** 41