Chapitre 3 : Les suites numériques réelles

Chapitre 3

Les suites numériques réelles

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions

Définition

Soit E un ensemble non vide. On appelle **suite d'éléments de** E toute application u telle que

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n. \end{array}$$

- On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
- On peut remplacer $\mathbb{N}$ par un ensemble $A = \{n_1,\, n_1+1,\, n_1+2, \dots\}$.
- Si $E = \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_n$ est dite **suite numérique réelle** de terme général u_n.

3.1.2 Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes.

a) Suite définie par une expression explicite. Le terme u_n est défini en fonction de n.

Exemple

1) $(u_n)_{n\geq 1}$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n}$.

2) $(v_n)_{n\geq 0}$, $\quad v_n = (-1)^n$.

3) $(w_n)_{n\geq 2}$, $\quad w_n = \sqrt{n^2-2}$.

b) Suite définie par récurrence. Ces suites s'appellent des **suites récurrentes** : elles sont définies par le (ou les) premier(s) terme(s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

Exemple

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 5u_n + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3.1.3 Opérations sur les suites

- **Égalité :** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$.
- **Somme :** $(u_n) + (v_n) = (w_n)$ avec $w_n = u_n + v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **Produit :** $(u_n) \times (v_n) = (w_n)$ avec $w_n = u_n \times v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **Produit par un scalaire :** $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (w_n)$ avec $w_n = \lambda u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.4 Propriétés : monotonie ou sens de variation d'une suite

Définition (monotonie)

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est :

- **croissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ (on écrit $(u_n) \nearrow$) ; **strictement croissante** ssi $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **décroissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$ (on écrit $(u_n) \searrow$) ; **strictement décroissante** ssi $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- **constante** (ou **stationnaire**) ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante ;
- **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a

1) (u_n) est croissante $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
(strictement croissante $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$) ;

2) (u_n) est décroissante $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
(strictement décroissante $\iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).

Exemple

Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$.

Méthode 1. Pour tout $n \geq 1$: $n < n+1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_n > u_{n+1}$, donc (u_n) est décroissante.

Méthode 2. On calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \underbrace{\frac{-1}{n(n+1)}}_{>0} < 0.$$

Donc (u_n) est décroissante.

Méthode 3. Comme $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$ pour tout n, on peut utiliser le théorème précédent :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

donc (u_n) est décroissante.

3.1.5 Suites majorées, minorées, bornées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Définition (suites majorées

1) (u_n) est **majorée** $\iff \exists M \in \mathbb{R} \ / \ u_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

2) (u_n) est **minorée** $\iff \exists m \in \mathbb{R} \ / \ u_n \geq m, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

3) (u_n) est **bornée** $\iff \exists M, m \in \mathbb{R} \ / \ m \leq u_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

4) (u_n) est **bornée** $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \ / \ |u_n| \leq \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Remarque (rappel : preuve par récurrence)

La preuve par récurrence peut être utilisée pour prouver qu'une suite est majorée, minorée ou bornée. C'est une méthode utilisée pour démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$. Elle se déroule en trois étapes :

1- **Initialisation :** on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.

2- **Hérédité :** on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier n (c'est l'*hypothèse de récurrence*), puis on démontre que $P(n+1)$ est vraie.

3- **Conclusion :** si les deux étapes précédentes sont prouvées, on conclut que $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1, \\ u_0 = 1. \end{cases}$$

Montrer que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 2} \qquad P(n).$$

Solution.

- **Initialisation.** Pour $n = 0$: $1 \leq u_0 = 1 \leq 2$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain rang n, et montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a (hypothèse de récurrence) $1 \leq u_n \leq 2$, donc Nature díune suite (convergence, divergence)

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}u_n \leq 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} + 1 \leq \frac{1}{2}u_n + 1 \leq 1 + 1 \ \Rightarrow \ \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2.$$

Donc, en particulier, on a encore $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

- **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.

Exercice (à la maison). Prouver que $\forall n \geq 1,\ 2^n \geq n+1$.

3.1.6 Sous-suite (ou suite extraite)

Définition

Soit (U_n) une suite réelle, on appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de (U_n) toute suite de la forme

$$(U_{\varphi(n)})$$

telle que φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.
Autrement dit, une sous-suite s'obtient en prélevant certains termes de la suite initiale, en respectant leur ordre.

Exemple

Si $u_n = n^2$, alors (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont deux sous-suites de (u_n).

- Les termes de (u_{2k}) : $0^2, 2^2, 4^2, 6^2, \ldots$
- Les termes de (u_{2k+1}) : $1^2, 3^2, 5^2, \ldots$

3.2 Nature d'une suite (convergence, divergence)

Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** si elle admet une limite finie. Elle est dite **divergente** sinon, c'est-à-dire si la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou si elle n'admet pas de limite.

3.2.1 Limite finie d'une suite

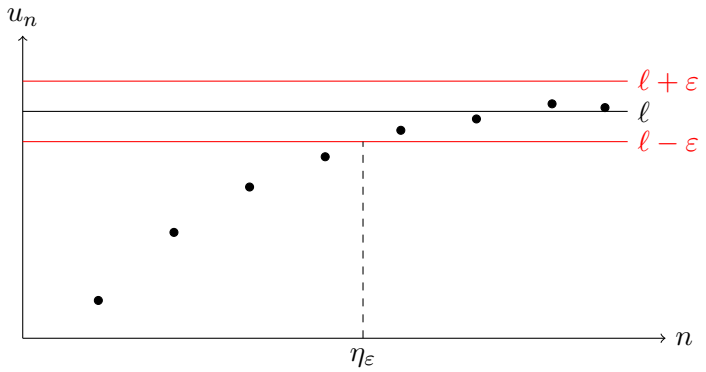
Définition

Soit (u_n) une suite numérique et $\ell \in \mathbb{R}$ (un réel fini).

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \ \big(n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big)}$$

c.-à-d. : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \ \big(n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon\big)$.

Autrement dit : une suite a pour limite ℓ (ou converge vers ℓ) si tous les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang η_ε.



Remarque

1- Le η_ε de la définition précédente est appelé **rang** ; il dépend de ε.

Pour démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il suffit de :

2- 1) fixer un $\varepsilon > 0$ (très petit) à l'avance ;

2) déterminer $\eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

3- Le rang η_ε n'est pas unique : en effet, tout entier naturel $\eta'_\varepsilon \geq \eta_\varepsilon$ convient comme autre rang.

Exemple

En utilisant la définition de la limite, montrer que

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0 \quad (n \geq 1)$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{n+1} = 3$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad$ (avec $a > 1$).

Solution.

On rappelle que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon \in \mathbb{N} \ /\ \forall n,\ n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\right).$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $\eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,\ n \geq \eta_\varepsilon$ on ait $|u_n - 0| \leq \varepsilon$.

$$|u_n - \ell| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

$\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$ $(n \in \mathbb{N})$. Il suffit de prendre $\eta_\varepsilon = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

On écrit donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1\ /\ \forall n,\ n \geq \eta_\varepsilon, \quad \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| \leq \varepsilon.$$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{n+1} = 3.$

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $\eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,\ n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{3n-1}{n+1} - 3\right| \leq \varepsilon$.

$$\left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| = \left|\frac{3n-1-3n-3}{n+1}\right| = \left|\frac{-4}{n+1}\right| = \frac{4}{n+1} < \frac{4}{n} \leq \varepsilon$$

(on majore autant que possible). On a $\dfrac{4}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow n \geq \dfrac{4}{\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$.

Il suffit de prendre $\eta_\varepsilon = E\left(\dfrac{4}{\varepsilon}\right) + 1$. On écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon = E\left(\frac{4}{\varepsilon}\right) + 1 \ /\ \forall n,\ n \geq E\left(\frac{4}{\varepsilon}\right) + 1 \Rightarrow \left|\frac{3n-1}{n+1} - 3\right| \leq \varepsilon.$$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $\eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n,\ n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| \leq \varepsilon$.

On a $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} - 1 > 0 \Rightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1$.

Ainsi $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 \leq \varepsilon$. On a

$$\sqrt[n]{a} \leq \varepsilon + 1 \Rightarrow a^{1/n} \leq \varepsilon + 1 \Rightarrow \frac{1}{n}\ln a \leq \ln(\varepsilon + 1) \quad \text{(la fonction ln est croissante)}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln a}{\ln(\varepsilon + 1)} \qquad \big(a > 1 \Rightarrow \ln a > 0\ ;\ \varepsilon + 1 > 1 \Rightarrow \ln(\varepsilon + 1) > 0\big).$$

Il suffit de prendre $\eta_\varepsilon = E\left(\dfrac{\ln a}{\ln(\varepsilon + 1)}\right) + 1$. On écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta_\varepsilon = E\left(\frac{\ln a}{\ln(\varepsilon + 1)}\right) + 1 \ /\ \forall n,\ n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow \left|\sqrt[n]{a} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

3.2.2 Limite infinie d'une suite

Définition (limites infinies)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \big(\forall A > 0,\ \exists\, \eta_A \in \mathbb{N},\ \forall n\ (n \geq \eta_A \Rightarrow u_n > A)\big)$$

c.-à-d. la suite devient tout entière plus grande que n'importe quel $A > 0$ (suffisamment grand, fixé à l'avance) à partir d'un certain rang η_A (à déterminer).

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \big(\forall A > 0,\ \exists\, \eta_A \in \mathbb{N},\ \forall n\ (n \geq \eta_A \Rightarrow u_n < -A)\big)$$

c.-à-d. la suite devient tout entière plus petite que n'importe quel $-A < 0$ (suffisamment petit) à partir d'un certain rang η_A (à déterminer).

Exemple

En utilisant la définition de la limite, montrer que

1- $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 - 2n) = -\infty$;

2- $\lim\limits_{n\to+\infty} E(\sqrt{n}) = +\infty$.

Solution.

1- Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-2n)=-\infty$.

Soit $A>0$, cherchons $\eta_A\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n$, $(n\geq\eta_A\Rightarrow u_n<-A)$.

On a $3-2n<-A\Rightarrow 3+A<2n\Rightarrow n>\dfrac{3+A}{2}$. Il suffit de prendre $\eta_A=E\left(\dfrac{3+A}{2}\right)+1$.

On écrit : $\forall A>0,\ \exists\,\eta_A=E\left(\dfrac{3+A}{2}\right)+1\ /\ \forall n\ (n\geq\eta_A\Rightarrow 3-2n<-A)$, c.-à-d. $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-2n)=-\infty$.

2- Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}E(\sqrt{n})=+\infty$.

Soit $A>0$, cherchons $\eta_A\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n$, $n\geq\eta_A\Rightarrow u_n>A$.

Attention

Attention au signe : $u_n>A$.

On a $E(\sqrt{n})\leq\sqrt{n}<E(\sqrt{n})+1$, donc $E(\sqrt{n})-1\leq\sqrt{n}-1<E(\sqrt{n})$. On a donc

$$E(\sqrt{n})>\sqrt{n}-1>A.$$

$$\sqrt{n}-1>A\ \Rightarrow\ \sqrt{n}>\underbrace{A+1}_{\text{positif}}\ \Rightarrow\ n>(A+1)^2.$$

Il suffit donc de prendre $\eta_A=E\big((A+1)^2\big)+1$. On écrit :

$$\forall A>0,\ \exists\,\eta_A\in\mathbb{N}\ /\ \forall n\ \big(n\geq\eta_A\Rightarrow E(\sqrt{n})>A\big),$$

c.-à-d. $\lim\limits_{n\to+\infty}E(\sqrt{n})=+\infty$.

Théorème (unicité de la limite)

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Proposition

Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente vers la même limite.

Proposition Critère de divergence d'une suite

Soit (u_n) une suite. Si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple

Les suites suivantes sont divergentes car elles admettent des sous-suites qui n'ont pas la même limite.

1) $U_n=\cos n\pi$
on a

$$\begin{cases}U_{2k}=\cos 2k\pi=1 & \text{convergente}\\ U_{2k+1}=\cos(2k+1)\pi=-1 & \text{convergente}\end{cases}$$

mais

$$\lim_{k\to+\infty} U_{2k} = 1 \neq \lim_{k\to+\infty} U_{2k+1} = -1$$

.

2) $U_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$
on a

$$\begin{cases} U_{4k} = \sin 2k\pi = 0 & \text{convergente} \\ U_{4k+1} = \sin\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 & \text{convergente} \end{cases}$$

mais

$$\lim_{k\to+\infty} U_{4k} = 0 \neq \lim_{k\to+\infty} U_{4k+1} = 1$$

.

3) $U_n = (-1)^n$
on a

$$\begin{cases} U_{2k} = (-1)^{2k} = 1 & \text{convergente} \\ U_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 & \text{convergente} \end{cases}$$

mais

$$\lim_{k\to+\infty} U_{2k} = 1 \neq \lim_{k\to+\infty} U_{2k+1} = -1$$

.

Proposition (importante)

1- Toute suite convergente est bornée : (u_n) converge $\Rightarrow$ (u_n) est bornée.

2- La contraposée est vraie : (u_n) n'est pas bornée $\Rightarrow$ (u_n) n'est pas convergente.

3- La réciproque est fausse : (u_n) est bornée $\not\Rightarrow$ (u_n) converge, c.-à-d. une suite qui est bornée n'est pas forcément convergente.

Preuve (de 1)

Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\,\eta_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n,\ \big(n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon\big).$$

Or on a

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

Donc, à partir du rang η_ε, tous les termes de (u_n) sont dans $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$. Il ne reste qu'un nombre fini de termes $(u_0, \ldots, u_{\eta_\varepsilon - 1})$, qui sont bornés. Donc (u_n) est bornée. □

Exemple

1- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$: la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est convergente, donc elle est bornée ($0 < \dfrac{1}{n+1} \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$).

2- **Attention :** les suites $(-1)^n$, $\cos n$, $\sin n$ sont bornées mais elles sont divergentes.

En effet $-1 \leq \cos n \leq 1$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ et

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k, \\ -1 & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Attention (important)

Étudier la **nature** d'une suite consiste à étudier sa convergence ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n$).

3.2.3 Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **convergentes** de limites respectives ℓ et ℓ'.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \ell \pm \ell'$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell \cdot \ell'$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda u_n) = \lambda \ell, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;
- si $\ell' \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Pour les limites infinies :

- $\ell + \infty = +\infty \qquad \ell - \infty = -\infty$;
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$; $\sup A$
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$;
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty \qquad \dfrac{1}{\pm\infty} = 0.$

Remarque (les formes indéterminées classiques)

Lorsqu'on calcule une limite, il arrive que le résultat ne soit pas directement déterminable : on dit qu'on a une **forme indéterminée** (F.I.). Elles sont au nombre de sept :

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad 1^\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0.$$

3.2.4 Quelques théorèmes de convergence

Théorème 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On a

1- si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)_n$ converge vers $|\ell|$;

2- si $(|u_n|)$ converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0 ;

3- si (u_n) converge vers 0 et (v_n) est bornée alors $(u_n \cdot v_n)_n$ converge vers 0 ;

4- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ et $U_n \geq m > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = +\infty$.

5- si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{\infty} u_n \leq \lim\limits_{\infty} v_n$.

Théorème 2 (convergence des suites monotones)

Soient (U_n) une suite réelle et

$$A = \{U_n,\ n \in \mathbb{N}\},$$

alors

1- Si (U_n) est **croissante** et **majorée par un réel** M, alors (U_n) est **convergente** vers $l = \sup A$ et $\inf A = \min A = U_0$ (premier terme). De plus $l \leq M$

2- Si (U_n) est **décroissante** et **minorée par un réel** m, alors (U_n) est **convergente** vers $l = \inf A$ et $\sup A = \max A = U_0$ (premier terme). De plus $m \leq l$

Théorème 3 (théorème de l'encadrement ou des gendarmes)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n, \\ \lim\limits_{\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} w_n = \ell. \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{\infty} v_n = \ell$.

Exemple

Étudier la nature de (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\sin n, \quad n \geq 1$.

Méthode 1. Comme sin est une fonction bornée, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$, et $\lim\limits_{\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{\infty} \dfrac{1}{n}\sin n = 0$. Donc (u_n) converge vers 0.

Méthode 2. En utilisant le théorème des gendarmes : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\big[-1 \leq \sin n \leq 1\big] \times \big(\frac{1}{n} > 0\big) \ \Rightarrow\ -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sin n \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim\limits_{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{\infty} \dfrac{1}{n}\sin n = 0$.

Théorème (critère de d'Alembert pour les suites)

Soit (u_n) une suite telle que la limite suivante existe :

$$L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

Alors

- si $0 \leq L < 1$ alors (u_n) converge et $\lim\limits_{\infty} u_n = 0$;
- si $L > 1$ alors (u_n) diverge, et de plus, si $u_n \geq 0$ pour tout n suffisamment grand, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exemple

$u_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $n \geq 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Proposition 1

Soit (u_n) une suite. Si (u_n) converge vers ℓ alors toute sous-suite de $(u_n)_n$ converge vers ℓ.

Proposition 2

Considérons deux suites (u_n) et (v_n). S'il existe n_1 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_1$, alors

- si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$;
- si $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

3.2.5 Les suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si

1- l'une est croissante et l'autre est décroissante ;

2- $\lim\limits_{\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la **même limite**.

Exemple

Considérons, pour $n \geq 1$:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1) • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow (u_n)$ est croissante.

• Pour (v_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0 \qquad \text{car } n \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est décroissante.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{\infty} \frac{1}{n!} = 0.$
Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc convergentes (vers la même limite).

3.2.6 Les suites récurrentes

Définition

Soient $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $f(D) \subset D$. On dit D est stable par f.
On appelle **suite récurrente** une suite (u_n) définie par la donnée du premier terme $u_0 \in D$ et la relation

$$\boxed{u_{n+1} = f(u_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Exemple

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 2}$. La suite associée à cette suite est : $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

Monotonie

On a, pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}).$$

Ainsi, l'étude de la monotonie de (u_n) revient à étudier la fonction f. Mais

Attention

f est croissante $\not\Rightarrow$ (u_n) est croissante.

Proposition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente et f la fonction qui lui est associée.

1) si f est **croissante** alors (u_n) est monotone :
   - elle est croissante si $u_0 \leq u_1$;
   - elle est décroissante si $u_0 \geq u_1$.
2) si f est **décroissante**, alors (u_n) n'est pas monotone. En fait (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont monotones, de monotonie contraire.

En d'autres termes :

- Si $u_0 \leq u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

- Si $u_0 \geq u_2$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Convergence

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente telle qu'elle est donnée par la définition précédente.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in D$ et si f est continue sur D, alors ℓ vérifie l'équation

$$\boxed{f(l) = l.}$$

Remarque

Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont appelées les **points fixes** de f.

Exemple

On considère la suite (U_n) définie par

$$\boxed{\begin{cases} U_0 = 0, \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n < 3$.
2. Étudier la monotonie de (U_n).
3. Déduire la convergence de (U_n) et déterminer sa limite.
4. Donner $\sup E$ et $\inf E$, où
$$E = \{U_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Corrigé

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n < 3$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $U_0 = 0$, donc

$$0 \leq U_0 < 3.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que $0 \leq U_n < 3$ pour un certain rang n, et montrons que $0 \leq U_{n+1} < 3$.
On a

$$0 \leq U_n < 3$$

donc

$$6 \leq U_n + 6 < 9.$$

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$,

$$0 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{U_n + 6} < 3.$$

d'où

$$0 \leq U_{n+1} < 3.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n < 3.}$$

2. Étudions la monotonie de (U_n).

Méthode 1 : En utilisant la fonction associée à la suite (U_n).

Posons

$$f(x) = \sqrt{x+6}, \qquad x \in [0,3[.$$

Pour tout $x \in [0,3[$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} > 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0,3[$.

Puisque $U_{n+1} = f(U_n)$, donc (U_n) est monotone. Pour déterminer sa monotonie, calculons son premier accroissement :

$$U_1 - U_0 = \sqrt{U_0+6} - 0 = \sqrt{6} > 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{(U_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Remarque

Dans cet exemple l'ensemble $D = [0;3[$ et $f(D) = [\sqrt{6};3[\subset D$. C'est à dire D est stable par la fonction f.

Méthode 2 : En calculant la différence $U_{n+1} - U_n$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sqrt{U_n+6} - U_n \\ &= \frac{(\sqrt{U_n+6} - U_n)(\sqrt{U_n+6} + U_n)}{\sqrt{U_n+6} + U_n} \\ &= \frac{U_n + 6 - U_n^2}{\sqrt{U_n+6} + U_n} \\ &= \frac{(3-U_n)(U_n+2)}{\sqrt{U_n+6} + U_n}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, on sait que :

$$0 \leq U_n < 3.$$

Donc :

$$3 - U_n > 0, \qquad U_n + 2 > 0$$

et

$$\sqrt{U_n+6} + U_n > 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{U_{n+1} - U_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Conclusion : La suite (U_n) est $\boxed{\text{strictement croissante.}}$

3. Déduisons la convergence de (U_n) et déterminons sa limite.

D'après les questions précédentes, la suite est croissante et majorée par 3. donc elle est convergente vers une limite ℓ qui vérifie

$$0 \leq \ell \leq 3.$$

La relation de récurrence donne

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}.$$

En passant à la limite, et puisque la fonction racine carrée est continue, on obtient

$$\ell = \sqrt{\ell + 6}.$$

En élevant les deux membres au carré :

$$\ell^2 - \ell - 6 = 0 \Longleftrightarrow (\ell - 3)(\ell + 2) = 0.$$

Ainsi, $\ell = 3$ ou $\ell = -2$. Mais $\ell \geq 0$, donc la valeur $\ell = -2$ est refusée.

Finalement,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 3.}$$

4. Déterminons $\sup E$ **et** $\inf E$**.**

Comme la suite (U_n) est **croissante** et son premier terme est $U_0 = 0 \in E$, donc $\inf E = \min E = U_0 = 0.D'autrepart,(\mathrm{U}_n)$ est **convergente** vers $l = 3 = \sup E$.

Conclusion

$$\boxed{\sup E = 3 \qquad \text{et} \qquad \inf E = 0.}$$

3.2.7 Exemples classiques de suites récurrentes

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Définition	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r \in \mathbb{R}$ r : la raison de (u_n)	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \cdot q,\ q \in \mathbb{R}^*$ q : la raison de (u_n)
Terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \cdot q^{\,n-p}$
La somme des termes	$u_p + \cdots + u_n = \dfrac{u_p + u_n}{2}(n-p+1)$ **En particulier** $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$u_p + \cdots + u_n = u_p \dfrac{1 - q^{(n-p+1)}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

Lemme

Soit $u_n = q^n$. Alors

1- si $|q| < 1$ $(-1 < q < 1)$ alors (u_n) converge vers 0 ;

2- si $q = 1$ alors (u_n) est constante, convergente vers 1 ;

3- si $q > 1$ alors (u_n) diverge $(\lim_{\infty} q^n = +\infty)$;

4- si $q < -1$ alors (u_n) diverge (suite alternée).

Exemple

- $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ car $q = \frac{3}{2} > 1$.
- $u_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$.
- $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$.
- $(-3)^n$: suite alternée divergente.

Remarque (suite arithmético-géométrique)

Il existe un type particulier de suite appelé **suite arithmético-géométrique**, défini par une relation de la forme

$$u_{n+1} = a\,u_n + b \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

- Si $b = 0$, on retrouve la suite géométrique $u_{n+1} = a\,u_n$.
- Si $a = 1$, on retrouve la suite arithmétique $u_{n+1} = u_n + b$.
- Le cas général $a \neq 1$ et $b \neq 0$ est celui d'une suite arithmético-géométrique .

Exemple

On considère la suite (U_n) des nombres réels définie pour $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite (U_n) est monotone et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} \leq U_n < 1.$$

2. En déduire que la suite (U_n) est convergente, et que sa limite ℓ vérifie $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Corrigé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

1. **Montrer que (U_n) est monotone et que $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$.**

Étape 1 : Étude de la monotonie de (U_n).

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

Étape 2 : Encadrement de U_n.

Pour tout entier k tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, on a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme la somme U_n contient exactement n termes, on obtient

$$n \cdot \frac{1}{2n} \leq u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

Or

$$\frac{n}{n+1} < 1.$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq U_n < 1.}$$

2. **Montrons que (u_n) est convergente et que sa limite ℓ vérifie $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.**
La suite (U_n) est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente vers une limite $\ell \leq 1$.

D'autre part

$$\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n}{n+1} < 1.$$

En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient :

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.}$$