Chapitre 4

Fonctions réelles d'une variable réelle

1. Généralités sur les fonctions

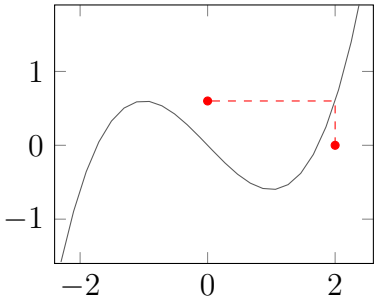
Définition

- Une fonction d'un ensemble D_f dans un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est une relation qui, à tout élément x de D_f, associe **au plus** un élément y de F, noté $f(x)$. C'est à dire que les éléments x de D_f ne peuvent pas avoir plus qu'une image dans F. On note la fonction

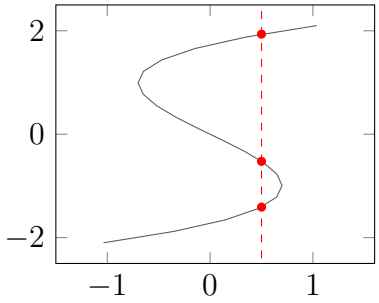
$$f : D_f \longrightarrow F, \quad x \longmapsto y = f(x).$$

- D_f : c'est l'ensemble ou le domaine de définition, c'est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$.
- F : l'ensemble d'arrivée.
- x : c'est l'antécédent.
- $f(x)$: c'est l'image de x.

Exemples.



Une seule image par antécédent c'est une fonction.



Plusieurs images par antécédent, ceci n'est pas une fonction.

Remarque

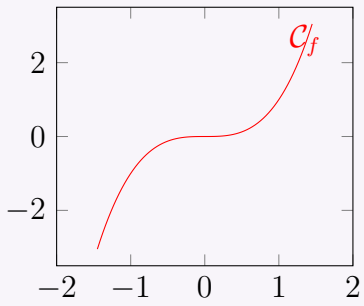
Graphiquement, on utilise le test de la droite verticale : si une droite verticale coupe la courbe en plus d'un point, alors il ne s'agit pas d'une fonction.

Graphe d'une fonction. On appelle graphe ou courbe d'une fonction le lieu géométrique des points $M(x, y)$ où $x \in D_f$ et $y = f(x)$, et on écrit

$$\mathcal{C}_f = \big\{(x, f(x)) : \ x \in D_f, \ y = f(x)\big\}.$$

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x) = x^3 \qquad \mathcal{C}_f = \{(x, x^3), \ x \in \mathbb{R}\}$



Opérations sur les fonctions réelles

Soit f et $g : D \to \mathbb{R}$.

1- $f = g \iff \begin{cases} D_f = D_g = D \\ f(x) = g(x) \ \ \forall x \in D \end{cases}$

2- $f \leq g \iff f(x) \leq g(x) \ \ \forall x \in D.$

3- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \ \forall x \in D = D_f \cap D_g.$

4- $(f \times g)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \ \forall x \in D = D_f \cap D_g.$

5- $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \ \ \forall x \in D = D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0.$

6- **Composition de deux fonctions.** Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subseteq D_g$. On définit la fonction composée $g \circ f$ sur D_f par

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subseteq D_g \xrightarrow{g} J$$

Exemple

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \ln x \qquad g : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x.$
Vérifions si $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$ sont bien définies.

- $g \circ f$? On a
$$]0, +\infty[\xrightarrow{f} \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} [-1, 1]$$
La fonction composée $g \circ f$ est bien définie : $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} = D_g$, et
$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \sin(\ln x).$$
- $f \circ g$? On a
$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} [-1, 1] \not\subseteq]0, +\infty[\xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
La fonction $f \circ g$ n'est pas définie, car $[-1, 1] \not\subseteq]0, +\infty[$, donc $(f \circ g)$ n'est pas définie.

2. Propriétés générales de fonctions

2.1 Fonctions paires et impaires

Définition

Soit f une fonction définie sur D. f est dite :

i) **Paire** si $\begin{cases} \forall x \in D,\ (-x) \in D & \text{« } D \text{ est symétrique »} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

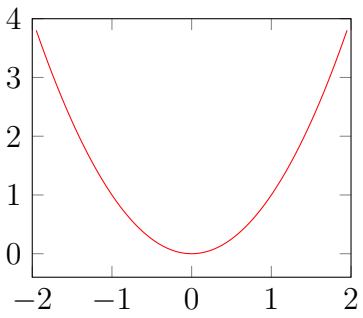
ii) **Impaire** si $\begin{cases} \forall x \in D,\ (-x) \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Exemples

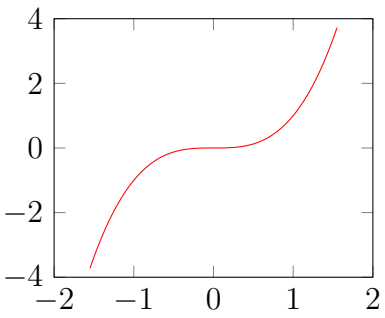
Les fonctions :

- $x \mapsto \sin x$ est une fonction impaire car : $\sin(-x) = -\sin x$.
- $x \mapsto \cos x$ est une fonction paire car $\cos(-x) = \cos x$.
- $x \mapsto x^2$ est paire car $(-x)^2 = x^2$.
- $x \mapsto x^3$ est impaire car $(-x)^3 = -x^3$.

- Si f est paire alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe (yy').
- Si f est impaire alors son graphe est symétrique par rapport à l'origine.



fonction paire
x^2



fonction impaire
x^3

2.2 Fonctions Périodiques

$f : D \to \mathbb{R}$ est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in D,\ (x+T) \in D \\ f(x+T) = f(x). \end{cases}$$

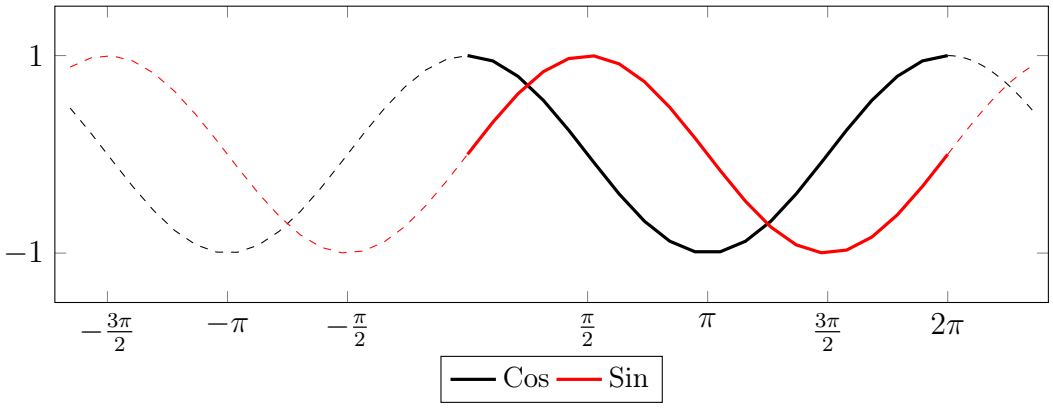
Il est évident que : $f(x) = f(x+T) = f(x+kT) \quad / \ k \in \mathbb{Z}$.

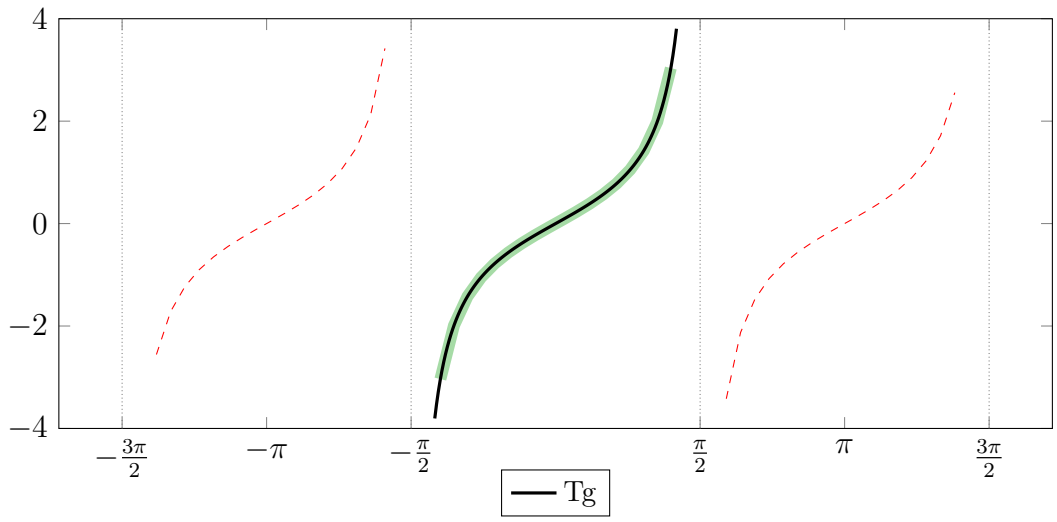
Définition

On appelle période de f le plus petit nombre positif T tel que $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

Exemples

sin	2π	$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z}$
cos	2π	$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+2k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z}$
tg	π	$\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x+k\pi) \ / \ k \in \mathbb{Z}$





Règles de périodicité

Supposons que f est T_1**-périodique et que** g **est** T_2**-périodique**.

Fonction	**Condition**	**Période**	**Remarque**
$f+g$	$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$	$PPCM(T_1, T_2)$	le plus petit multiple commun
$f \times g$	$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$	$PPCM(T_1, T_2)$	le plus petit multiple commun
$\frac{f}{g}$	$\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ et $g \neq 0$ partout	$PPCM(T_1, T_2)$	le plus petit multiple commun

Attention : Si $\frac{T_1}{T_2} \notin \mathbb{Q}$, alors $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ne sont généralement pas périodiques.

Autres règles de périodicité

Fonction	**Période de la fonction initiale**	**Période de la nouvelle fonction**
$af(x)$	f est T_1-périodique	T_1
$f(ax)$	f est T-périodique	$T = \frac{T_1}{\lvert a \rvert}$, avec $a \neq 0$

Exemple

Etudier la périodicité des fonctions g et h.

$$1) \quad g(x) = \cos 4x + \sin 6x$$

$$x \mapsto \cos 4x \quad \text{est périodique de période} \quad T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$
$$x \mapsto \sin 6x \quad \text{est périodique de période} \quad T_2 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{3}{\pi} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Donc g est périodique de période

$$T = \text{PPCM}(T_1, T_2).$$

$$\left.\begin{aligned} n\frac{\pi}{2} &= \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots\right\} \\ n\frac{\pi}{3} &= \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \ldots\right\} \end{aligned}\right. \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Donc Le $PPCM(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}) = \pi$.

Ainsi la fonction g est π-périodique.

$$2) \quad h(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}\, x$$

$$x \mapsto \cos x \quad \text{est } 2\pi\text{-périodique} \qquad T_1 = 2\pi$$

$$x \mapsto \cos \sqrt{2}\, x \quad \text{est périodique} \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\pi} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc h est pas périodique.

2.3 Fonctions Monotones

Définition

Définitions :
Soit f une fonction définie sur D_f.

- f est strictement croissante sur D_f si et seulement si

$$\forall x, y \in D_f, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

- f est strictement décroissante sur D_f si et seulement si

$$\forall x, y \in D_f, \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Si on note :

$$A = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Appelé **taux d'accroissement ou de variation de** f.
Alors :

$$\begin{cases} f \text{ est strictement croissante} & \text{ssi } A > 0, \\ f \text{ est strictement décroissante} & \text{ssi } A < 0, \\ f \text{ est constante ou stationnaire} & \text{ssi } A = 0. \end{cases}$$

Exemple

En utilisant la définition d'une fonction monotone, vérifier si la fonction suivante est strictement monotone sur son domaine de définition.

- $f(x) = \sqrt{x} \qquad D_f = \mathbb{R}^+$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ tels que $x \neq y$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \\ &= \frac{x - y}{(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0. \end{aligned}$$

$A > 0 \quad \Rightarrow \quad$ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2.4 Fonctions bornées

La fonction f est dite :

i) majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$, $\forall x \in D$;

ii) minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq m$, $\forall x \in D$;

iii) bornée sur D, si elle est majorée et minorée simultanément, c.à.d. $\exists m, M \in \mathbb{R} \ / \ m \leq f(x) \leq M$.

Exemples

$|\sin x| \leq 1$ donc la fonction sin est bornée ; $|\cos x| \leq 1$ donc la fonction cos est bornée.

3. Les limites

Rappel

Soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{V} \neq \emptyset$. $\mathcal{V}$ est dit un voisinage de a, noté $\mathcal{V}_a$, ssi $\exists \eta > 0 \ / \ ]a - \eta, a + \eta[\subset \mathcal{V}_a$. C.à.d. un voisinage d'un point a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un ouvert contenant a.

3.1 Limite en un point $a \in \mathbb{R}$

Définition

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, on dit que f tend vers la limite $l \in \mathbb{R}$, quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ ssi

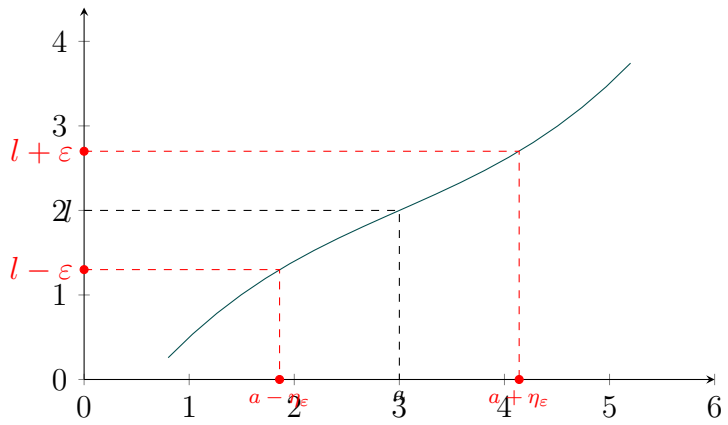
$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in D_f :\ 0 < |x - a| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon\Big)$$

Ceci est équivalent à dire :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0 \ / \ \forall x \in D_f,\ x \neq a,\ a - \eta_\varepsilon < x < a + \eta_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Remarques

- $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ssi on peut rendre $f(x)$ aussi proche qu'on veut de l (à ε près), à condition de prendre x suffisamment proche de a (à η_ε près).
- Une fonction peut avoir une limite quand x tend vers a sans qu'elle ne soit définie en ce point.
- Le η_ε de la définition de la limite dépend de ε et il n'est pas unique. Chaque $\eta'_\varepsilon > \eta_\varepsilon$ vérifie la même définition.
- Le $0 < |x - a|$ garantit qu'on regarde strictement autour de a, sans prendre a lui-même, ce qui permet à la définition d'être applicable même si f n'est pas définie en a.



Astuce pour montrer par définition que $\lim_{x\to a} f(x)$

1- Écrire la définition à démontrer :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad 0 < |x-a| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

2- Soit $\varepsilon > 0$, cherchons $\eta_\varepsilon > 0$, $\forall x \in D_f$ ...

3- Calculer et simplifier $|f(x)-\ell|$.

4- Chercher une majoration en fonction de $|x-a|$:

$$|f(x)-\ell| \leq C\,|x-a| \quad \text{(ou plus généralement } \leq \varphi(|x-a|)).$$

5- Si le terme φ dépend encore de x, imposer au besoin

$$|x-a| < 1$$

afin de le remplacer par une constante.

6- Choisir η_ε de façon que

$$|f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

En général,

$$\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{C} \qquad \text{ou} \qquad \eta_\varepsilon = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{C}\right).$$

7- Vérifier que

$$0 < |x-a| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

8- Conclure que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

Réflexe : si des termes comme $|x+a|$, $|x^2+x+1|$, etc. apparaissent, commencer souvent par imposer

$$|x-a| < 1,$$

puis les majorer par une constante indépendante de x.

Exemple 1

Montrer que $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ 0<|x-a|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.
Soit $\varepsilon>0$, cherchons $\eta_\varepsilon>0$ / $0<|x-2|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon$.

$$|3x+1-7|=|3x-6|=|3(x-2)|=3\,|x-2|$$

Pour que $|f(x)-7|<\varepsilon$, il suffit d'avoir $3|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. On choisit donc $\eta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{3}$.
Vérification : si $0<|x-2|<\eta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{3}$ alors $|f(x)-7|=3|x-2|<3\left(\dfrac{\varepsilon}{3}\right)=\varepsilon$.
Bien vérifié.
Conclusion : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ 0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}=\eta_\varepsilon \Rightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon$, c.à.d. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$.

Exemple 2

Montrons que $\lim\limits_{x\to 2}(4x-3)=5$. $\quad\langle f(x)=4x-3,\ a=2,\ l=5\rangle$.
$l=\lim\limits_{x\to a} f(x) \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ 0<|x-a|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$.
Soit $\varepsilon>0$, cherchons $\eta_\varepsilon>0$, $\forall x\in (D_f=\mathbb{R})$, $0<|x-2|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |4x-3-5|<\varepsilon$.

$$|4x-3-5|=|4x-8|=4|x-2|$$

Pour que $|f(x)-5|<\varepsilon$ il suffit d'avoir $4|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.
Vérification : si $0<|x-2|<\eta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{4}$, on a $|f(x)-5|=4|x-2|<4\cdot\dfrac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$.
Conclusion : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{4}>0,\ \forall x\in(D_f=\mathbb{R}),\ 0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |(4x-3)-5|<\varepsilon$, c.à.d. $\lim\limits_{x\to 2}(4x-3)=5$.

Exemple 3

Montrer que $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9 \qquad \big(f(x)=x^2,\ l=9,\ a=3\big)$.
Soit $\varepsilon>0$, cherchons $\eta_\varepsilon>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-3|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon$.

$$|x^2-9|=|(x-3)(x+3)|=|x+3|\cdot|x-3| \qquad (*)$$

Le problème : $|x+3|$ dépend de x !!!
La solution : on doit majorer $|x+3|$ sachant que x est au voisinage de 3 ; donc supposons "par exemple" que $|x-3|<1$. Si on suppose $|x-3|<1$:

$$-1<x-3<1 \Rightarrow 2<x<4 \Rightarrow 5<x+3<7$$

donc $|x+3|<7$. Ainsi $(*)$ implique

$$|x^2-9|=|x+3|\cdot|x-3|<7\,|x-3|$$

Pour que $|x^2-9|<\varepsilon$, il suffit de prendre $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{7}$.
Pour assurer deux conditions à la fois $\Big(|x-3|<1 \Rightarrow |x+3|<7\Big)$ et $\Big(|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{7} \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon\Big)$, il suffit de prendre

$$\eta_\varepsilon = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$$

On écrit : $\forall \varepsilon>0, \exists\, \eta_\varepsilon = \min\left(1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right), \forall x\in\mathbb{R}, 0<|x-3|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |x^2-9|<\varepsilon$, c.à.d. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

3.1.1 Limite à droite de f en $a \in \mathbb{R}$

On dit que f admet une limite à droite en a si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l^+ \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists\, \eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ x\in\,]a, a+\eta_\varepsilon[\Rightarrow |f(x)-l^+|<\varepsilon$$

ici x tend vers a par valeurs strictement supérieures à a (c.à.d. $x>a$).

3.1.1 Limite à gauche de f en a ($a \in \mathbb{R}$)

On dit que f admet une limite à gauche en a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l^- \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists\, \eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ x\in\,]a-\eta_\varepsilon, a[\Rightarrow |f(x)-l^-|<\varepsilon$$

ici x tend vers a par valeurs strictement inférieures à a.

Remarque

La limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si les limites à gauche et à droite existent et sont égales, c.à.d. si $l = l^+ = l^-$. Autrement dit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$$

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-}(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+}(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^+}(x) = 1.$$

On peut vérifier que $\forall n\in\mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to n^-}(x) = n-1, \qquad \lim_{x\to n^+}(x) = n.$$

3.1.2 Limite infinie en un réel a ($a \in \mathbb{R}$) (Asymptote verticale)

Définition

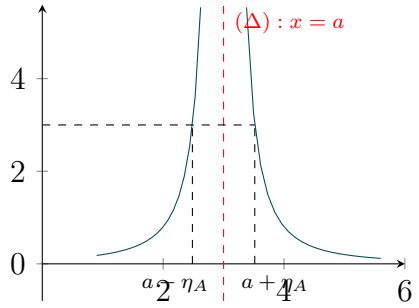
- On dit que f possède une limite $(+\infty)$ en $a \in \mathbb{R}$ si :

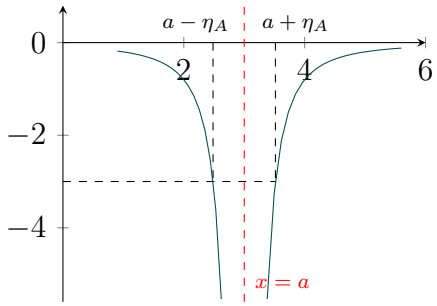
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists \eta_A > 0,\ \forall x \in D_f : \\ 0 < |x - a| < \eta_A \Rightarrow f(x) > A$$

- On dit que f possède une limite $(-\infty)$ en $a \in \mathbb{R}$ si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0,\ \exists \eta_A > 0,\ \forall x \in D_f : \\ 0 < |x - a| < \eta_A \Rightarrow f(x) < -A$$

Quand la fonction f possède une limite infinie en un réel fini a, on dit que f admet **une asymptote verticale**. $(\Delta) : x = a$ est une asymptote verticale de f.





Exemple

En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Par définition : $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0,\ \exists \eta_A > 0,\ \forall x \in D_f, a < x < a + \eta_A \Rightarrow f(x) < -A$.
Soit $A > 0$. Nous cherchons $\eta_A > 0$ tel que

$$0 < x < \eta_A \implies \ln x < -A.$$

Comme la fonction exponexponentielle népérienne est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on a

$$\ln x < -A \iff x < e^{-A}.$$

Choisissons donc

$$\eta_A = e^{-A} > 0.$$

Alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$0 < x < \eta_A = e^{-A}$$

entraîne

$$\ln x < \ln(e^{-A}) = -A.$$

Ainsi,

$$\forall A > 0,\ \exists \eta_A = e^{-A} > 0, \quad 0 < x < \eta_A \implies \ln x < -A.$$

D'après la définition d'une limite infinie,

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.}$$

3.2 Limite à l'infini $(x \to \mp\infty)$

3.2.1 Limite finie à l'infini (asymptote horizontale)

Définition

Soit f une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $(+\infty)$ (resp. $-\infty$) si :
I est de la forme $I =]a, +\infty[$ alors

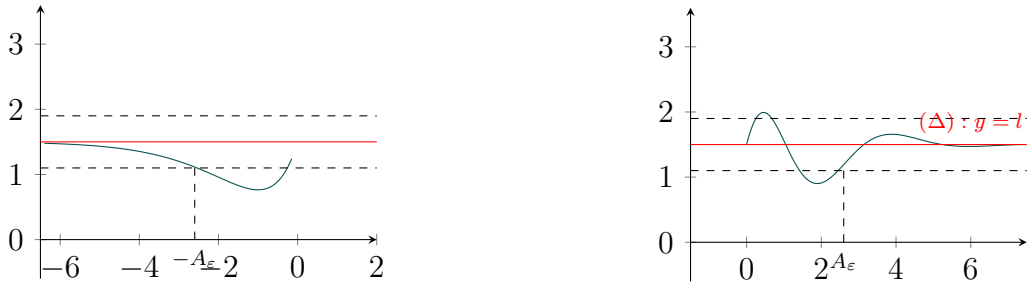
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ x > A_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}$$

si I est de la forme $I =]-\infty, a[$ alors

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists A_\varepsilon > 0,\ \forall x \in I,\ x < -A_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon}$$

Remarque

Quand f possède une limite finie à l'infini, on dit que f admet une **asymptote horizontale**.



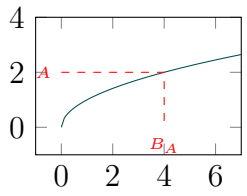
$(\Delta) : y = l$ asymptote horizontale.

3.2.2 Limite infinie à l'infini

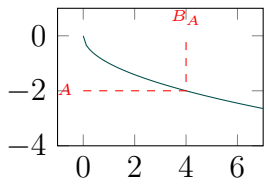
Définition

Soit f une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ∞ quand x tend vers ∞ si :

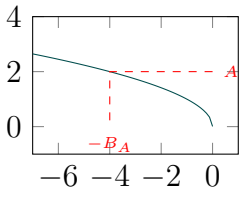
- I est de la forme $I =]a, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists B_A > 0,\ \forall x \in I,\ x > B_A \Rightarrow f(x) > A.$
- I est de la forme $I =]a, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0,\ \exists B_A > 0,\ \forall x \in I,\ x > B_A \Rightarrow f(x) < -A.$
- I est de la forme $I =]-\infty, a[$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists B_A > 0,\ \forall x \in I,\ x < -B_A \Rightarrow f(x) > A.$
- I est de la forme $I =]-\infty, a[$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0,\ \exists B_A > 0,\ \forall x \in I,\ x < -B_A \Rightarrow f(x) < -A.$



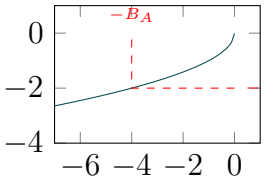
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Nous énonçons maintenant ces théorèmes, sans en donner la preuve.

[Théorème *(preuve admise)*] Si une fonction admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Remarque

1) Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ alors f n'a pas de limite.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Théorème (caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in [a, b]$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall (u_n)_n \subset [a, b],\ \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = l\right).$$

Remarque

Ce théorème permet de montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en x_0. Il suffit de trouver :

- soit deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,b]$ convergeant vers x_0 telles que
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n);$$
- soit une suite (x_n) de $[a,b]$ convergeant vers x_0 telle que $(f(x_n))_n$ n'admette pas de limite.

Dans les deux cas, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exemple

1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right)$, montrons que f n'admet pas de limite en 0.

   Posons
   $$x_n = \frac{1}{\sqrt{2n}} \to 0 \quad \text{et} \quad f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1,$$
   $$y_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \quad \text{et} \quad f(y_n) = \cos\big((2n+1)\pi\big) = -1.$$
   Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

2. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, montrons que f n'admet pas de limite en 0.

   Posons $x_n = \dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{(2n+1)\pi} \to 0$ et $f(x_n) = \sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$ *(à démontrer par récurrence)*, qui admet deux limites 1 et -1, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

Proposition

Si f admet une limite en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0.

Preuve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

D'où

$$\forall x \in]x_0-\eta_\varepsilon, x_0+\eta_\varepsilon[\Rightarrow \underbrace{l-\varepsilon}_{m} < f(x) < \underbrace{l+\varepsilon}_{M} \Rightarrow f \text{ est bornée dans }]x_0-\eta_\varepsilon, x_0+\eta_\varepsilon[,$$

qui est un voisinage de x_0.

Remarque

La réciproque n'est pas vraie. En effet, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ est bornée mais elle n'admet pas de limite en 0 (exemple précédent).

Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$ et admettant des limites finies l et l' au point x_0. Alors :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = l + l'$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'},\ l' \neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.

Limite et relation d'ordre

Théorème

Soient $x_0 \in E$ et f, g, h trois fonctions définies sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$.

1. $f(x) < g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \text{et } f(x) \leq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\ \text{et } g(x) \leq f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$.
4. $\left.\begin{array}{l} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = 0$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ et g est bornée $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \infty$.

3. Quelques techniques supplémentaires et limites classiques utiles pour lever les formes indéterminées

3.1 Règle de L'Hôpital

Elle ne s'applique que dans des conditions précises, et pour lever des F.I. de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

[Énoncé] Le but est de calculer $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad\langle$F.I. $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}\rangle$.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ et telles que g' ne s'annule pas (chapitre suivant).

1- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

2- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$$

ATTENTION : la réciproque est fausse

C.à.d. si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l \not\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

Exemples

1) F.I. $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0 \quad \text{car } \lim_{x\to 0} x=0 \text{ et } \sin\tfrac{1}{x} \text{ est bornée.}$$

Or que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) \quad \text{n'existe pas.}$$

2) F.I. $\frac{\infty}{\infty}$: $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{2}=+\infty.$

3.2 Nombre dérivé (chapitre de la dérivabilité)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

3.3 Limites classiques à connaître

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=(\sin x)'\Big|_{x=0}=\cos 0=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}=(\cos x)'\Big|_{x=0}=-\sin 0=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=(e^x)'\Big|_{x=0}=1$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1}=1$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x=0 \qquad \text{(Croissance comparée)}$$

3.4 Partie entière

On utilise le théorème de l'encadrement et $x-1<(x)\leq x$ $\qquad\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x})}{x}\right)$.

4. Continuité

4.1 Définitions

Définition

1) Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue en $x_0 \in D_f$ ssi
$$\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \end{cases}$$
C.à.d.
$$f \text{ est continue en } x_0\in D_f \iff$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta_\varepsilon>0,\ \forall x\in D_f,\ |x-x_0|<\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

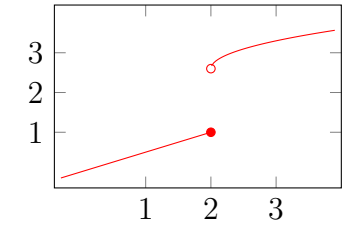
2) f est continue à droite de x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

3) f est continue à gauche de x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

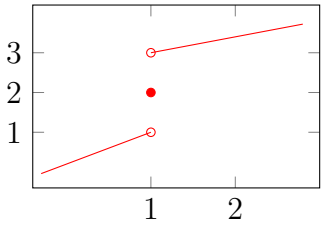
4) f est continue en un point $x_0 \in D_f$ ssi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

5) f est continue sur un intervalle I ssi f est continue en tout point de I.

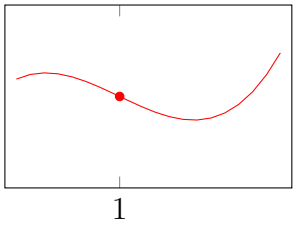
6) Si f n'est pas continue en un point x_0 on dit que f est discontinue en x_0.



f est discontinue en $x = 2$ car $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$



f est discontinue en $x = 1$



f est continue en $x = 1$.

4.2 Les fonctions usuelles et leur continuité

- Polynômes : $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots$ sont continus sur $\mathbb{R}$.
- Fonctions Rationnelles $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$: continues si $Q(x) \neq 0$.
- $\sqrt[n]{x}$: continues sur $[0, +\infty[$ si n est pair.
- $\sqrt[n]{x}$: continues sur $\mathbb{R}$ si n est impair. Exemple : $\sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$; $\sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\sin x$, $\cos x$, ... : continues sur $\mathbb{R}$.
- e^x : continue sur $\mathbb{R}$.
- $\ln x$: continue sur $]0, +\infty[$.
- $\dfrac{1}{x}$: continue sur $\mathbb{R}^*$.
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

Proposition

Toute opération algébrique entre des fonctions usuelles continues est continue. C.à.d. si f et g sont deux fonctions continues en un point $x_0 \in (D_f \cap D_g)$, alors :

1) $(f + g)$, $(f \cdot g)$, $(\lambda f,\ \lambda \in \mathbb{R})$ sont continues en x_0.

2) Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est continue en x_0.

3) Pour $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$, si f est continue en x_0 et g est continue en

$f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est continue en x_0.

Exemples

1) Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$.

ATTENTION : la fonction f n'est pas définie en 0, donc elle n'est pas continue en $x_0 = 0$.

2) Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donc

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est le quotient de deux fonctions usuelles continues (ou c'est une opération algébrique de fonctions usuelles continues).
- Continuité en 0 : f est continue en 0 ssi $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.
  - $f(0) = 1$.
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{\sin x}{x} = -1$.

  Comme $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ alors f est discontinue (n'est pas continue) en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$ seulement.

3) Étudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^3-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Théorème Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in D_f$. Alors

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \forall (u_n)_n \subset D_f, \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0) \right).$$

4.3 Prolongement par continuité

Définition

Soit I un intervalle, x_0 un point de I. Si

$$\begin{cases} \text{i) } f \text{ est une fonction définie partout dans } I \text{ sauf en } x_0 \text{ et} \\ \text{ii) } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ (existe et fini)} \end{cases}$$

Alors f est prolongeable par continuité en x_0, et son prolongement par continuité en x_0 est donné par :

$$\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Ainsi $\tilde{f}$ est continue en x_0.

Exemples

1) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On remarque que f est définie et est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit de deux fonctions continues). Calculons $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0, \quad \text{car la fonction sin est bornée et } x \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Donc f admet un prolongement par continuité en 0, donné par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ATTENTION si on utilise le théorème de l'encadrement pour déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$ on doit distinguer deux cas : $x \geq 0$ et $x < 0$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $-1 \leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$.

- Si $x \geq 0$: $-x \leq x \sin\dfrac{1}{x} \leq x$; $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.
- Si $x < 0$: $-x \geq x \sin\dfrac{1}{x} \geq x$; $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right),\ x_0 = 0$ (g est-elle prolongeable par continuité en 0 ?)

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{(n'est pas fini)}$$

donc g n'admet pas un prolongement par continuité en 0.

5. Théorèmes sur la continuité

5-1 Théorème des valeurs intermédiaires : T.V.I

Théorème T.V.I

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$ deux r´eels. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe au moins $c \in]a, b[$, tel que $f(c) = 0$.
- Si de plus f est strictement monotone alors c est unique. C.à.d.

$$\exists! \, c \in]a, b[\ / \ f(c) = 0$$

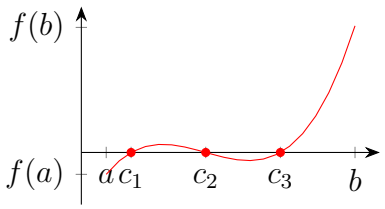
.

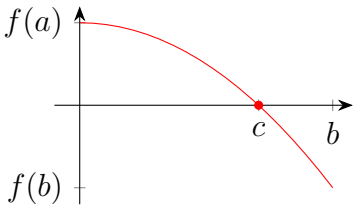
Remarques

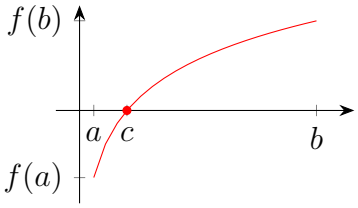
1- Ce théorème permet de résoudre les équations de la forme : $f(x) = 0$.

2- Le T.V.I. reste valable sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, et des limites finies ou infinies.

Si f est continue sur $]a, b[$ et si f admet en a et en b des limites de signes strictement opposés (finies non nulles, ou égales à $\pm\infty$), alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.







5-2 Théorème des valeurs intermédiaires généralisé

Théorème

- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout k réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$.
- Si de plus f est strictement monotone alors $\exists! \, c \in]a, b[\ / \ f(c) = k$.

Remarques

1- Ce théorème permet de résoudre les équations de la forme : $f(x) = k$.

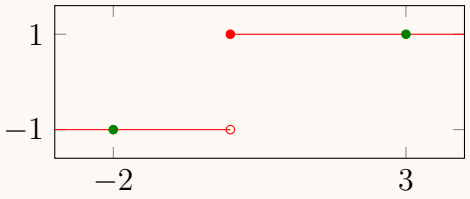
2- Si la fonction f n'est pas continue, les deux théorèmes précédents ne sont pas applicables.

Contre-exemple :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarquons que

$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\}$ $f(-2)\cdot f(3) < 0$ mais il n'existe aucun $c \in]-2, 3[$ tel que $f(c) = 0$.



3- Le Théorème de Valeurs intermédiaires implique que l'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. C.à.d.

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists c \in [a, b] \ / \ f(c) = y.$$

Exemples

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$ admet une solution unique dans $]1, 2[$.
Corrigé.

- La fonction f est continue, car c'est la différence de deux fonctions usuelles continues.
- $f(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0 \quad$ et $\quad f(2) = \ln 2 - \dfrac{1}{2} > 0.$
- $f(1) \cdot f(2) < 0$ donc par le théorème du T.V.I $\exists c \in]1, 2[\ / \ f(c) = 0$, c.à.d. $f(c) = \ln c - \dfrac{1}{c} = 0.$

Unicité : $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0, \ \forall x \in]1, 2[$, donc f est strictement croissante alors c est unique.

2) Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une racine sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Corrigé. Posons $f(x) = (\cos x) - x$.

- f est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $f(0) = \cos 0 = 1$.
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

On a $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc d'après le T.V.I, il existe au moins $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(c) = \cos c - c = 0$.
Ainsi, $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ / \ \cos c = c$.

Définition

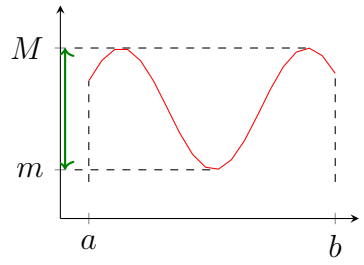
Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. L'image de I par la fonction f est donnée par :

$$f(I) = \{f(x) \ / \ x \in I\}.$$

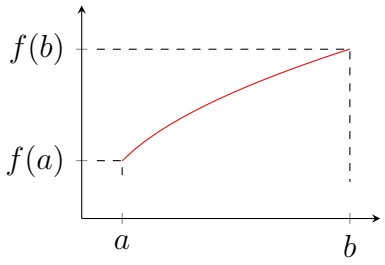
Théorème

- Toute fonction continue sur un intervalle fermé, borné $[a, b]$:
  - i) est bornée sur $[a, b]$;
  - ii) atteint son minimum $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et son maximum $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
- De plus $f([a, b]) = [m, M]$.
- Si de plus : f est strictement croissante alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$; f est strictement décroissante alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

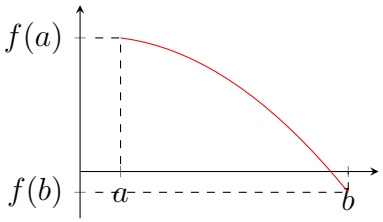
Dans les trois figures, f est continue sur un fermé, borné $[a, b]$.



$f([a, b]) = [m, M]$



$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ car f est strictement croissante



$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ car f est strictement décroissante

ATTENTION

Chaque hypothèse dans le théorème est importante ; c.à.d. f doit être continue sur un fermé, borné $[a, b]$. Voir les contre-exemples suivants :

Exemples

1- Une fonction f **non continue** et intervalle fermé borné :

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$[0,1]$ est un fermé, borné, f n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. On remarque que f n'est pas bornée sur $[0,1]$.

2- Une fonction continue, un intervalle **non borné** mais fermé :

$$f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+$$

$[0,+\infty[$ est fermé mais non borné. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc f n'est pas bornée.

3- Une fonction continue, intervalle borné, **non fermé** :

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \text{ est continue sur }]0,1]$$

$]0,1]$ est borné mais non fermé. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Donc f n'est pas bornée.

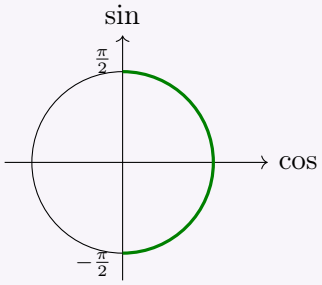
Remarque

L'image d'un fermé, borné par une fonction continue est un fermé borné Mais l'image d'un ouvert n'est pas forcément un ouvert.

Exemple

$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = \cos x.$ $\qquad f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x.$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x) = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Ainsi $f\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0,1]$ ce n'est pas un ouvert.

6. Fonction Réciproque d'une fonction continue strictement monotone

Rappel « Algèbre ». Soit $f : A \to B$.

- f est **injective** $\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ \big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$
$\iff \forall x_1, x_2 \in A,\ \big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$.
- Si f est strictement monotone alors f est injective.
- f est **surjective** $\iff \forall y \in B,\ \exists x \in A,\ y = f(x)$, c.à.d. si chaque élément de l'ensemble d'arrivée B est l'image d'au moins un élément x de A.

Exemples

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x = f(x)$: f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car il n'existe pas $x \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = e^x = -1 \quad (e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R})$.
Par contre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*},\ x \mapsto e^x$ est surjective.

Proposition

- Toute fonction injective et surjective est bijective : c.à.d.

$$\forall y \in B,\ \exists!\, x \in A \ /\ y = f(x)$$

.

- Toute valeur de l'image $y \in B$ correspond à une unique valeur de $x \in A$.

Théorème Important

a) Toute fonction $f : I \to f(I),\ x \mapsto y = f(x)$ continue et strictement monotone est bijective.

b) f admet une fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I,\ y \mapsto f^{-1}(y) = x$.

c) f^{-1} est continue et monotone (avec la même monotonie que f).

d) La courbe de f^{-1} est symétrique à $\mathcal{C}_f$ (la courbe de f) par rapport à la droite $y = x$.

e) On a :

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x,\ \ \forall x \in f(I), \qquad f^{-1}\big(f(x)\big) = x\ \ \forall x \in I$$

Exemple

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \ln x$.

- ln est croissante car $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$.

- ln est continue.
- Donc f est bijective et admet une fonction inverse $f^{-1}(x) = e^x$ où $e^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ continue, et croissante.

Définition

(Continuité uniforme) La fonction $f \in (I, \mathbb{R})$ est dite *uniformément continue* sur l'intervalle I si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in I : \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 2]$. En effet, pour tout réel $\epsilon > 0$ et $x, y \in [0, 2]$, on a

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq (|x| + |y|)\,|x - y| \leq 4|x - y|.$$

On peut prendre $\delta = \epsilon/4$.

Définition

(Fonction lipschitzienne) Soient k un réel positif et $f \in (I, \mathbb{R})$. On dit que f est *k-lipschitzienne* sur I si

$$\forall x, y \in I : \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Proposition

Soit $f \in (I, \mathbb{R})$.
f lipschitzienne sur $I \implies f$ uniformément continue sur $I \implies f$ continue sur I.