III- La formule d'Itô.

Objectifs et prérequis

Objectif. La formule d'Itô est la « règle de dérivation des fonctions composées » du calcul stochastique. C'est l'outil de calcul central, utilisé dans tout le reste du cours : résolution d'EDS, générateur, Feynman-Kac, Black-Scholes.

Prérequis. Intégrale d'Itô, isométrie, processus d'Itô $dX_t = K_t\,dt + H_t\,dB_t$; variation quadratique.

Rappel du point de départ.

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad d(B_t^2) = 2B_t\,dB_t + dt.$$

Le calcul classique donnerait $d(x^2) = 2x\,dx$. Le terme supplémentaire dt est la trace de la variation quadratique. La formule d'Itô explique ce terme pour toute fonction f.

1. La formule d'Itô pour $f(B_t)$

1.1 Énoncé

Théorème (formule d'Itô). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors, pour tout $t \geq 0$, p.s. :

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds.$$

En notation différentielle :

$$df(B_t) = f'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)\,dt.$$

Lecture. $f(B_t)$ est un processus d'Itô :

- sa partie martingale est $\int_0^t f'(B_s)\,dB_s$ (comme dans le calcul classique) ;
- sa dérive est $\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$: c'est le **terme d'Itô**, absent du calcul classique.

Vérification sur $f(x) = x^2$. $f' = 2x$, $f'' = 2$: $d(B_t^2) = 2B_t\,dB_t + \frac{1}{2}\cdot 2\,dt = 2B_t\,dB_t + dt$.

1.2 D'où vient le terme $\frac{1}{2}f''$: l'idée

Dans le calcul classique, on écrit $f(x+dx) - f(x) = f'(x)\,dx + \frac{1}{2}f''(x)\,(dx)^2 + \cdots$ et l'on néglige $(dx)^2$, qui est d'ordre 2.

Pour le brownien, l'accroissement dB est d'ordre $\sqrt{dt}$ (car $\mathbb{E}[(\Delta B)^2] = \Delta t$). Donc $(dB)^2$ est d'ordre dt : **il n'est pas négligeable**. Plus précisément, la variation quadratique dit que $\sum(\Delta B)^2 \to t$, ce qui justifie la règle

$$(dB_t)^2 = dt.$$

Les termes d'ordre 3 et plus, eux, sont négligeables : $|\Delta B|^3$ est d'ordre $(\Delta t)^{3/2}$, et $\sum(\Delta t)^{3/2} \to 0$.

1.3 Démonstration

On la donne sous l'hypothèse simplificatrice que f' et f'' sont **bornées** ; le cas général se déduit par une technique de localisation (admise).

Soit la subdivision uniforme $t_i = it/n$ de $[0,t]$, avec $h = t/n$ et $\Delta_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$.

Étape 1 : télescopage et Taylor. On écrit $f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(f\left(B_{t_{i+1}}\right) - f\left(B_{t_i}\right)\right)$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne, pour chaque i, un point ξ_i entre B_{t_i} et $B_{t_{i+1}}$ tel que

$$f\left(B_{t_{i+1}}\right) - f\left(B_{t_i}\right) = f'\left(B_{t_i}\right)\Delta_i + \frac{1}{2}f''(\xi_i)\,\Delta_i^2.$$

Donc $f(B_t) - f(B_0) = S_1 + S_2 + S_3$ avec

$$S_1 = \sum_i f'\left(B_{t_i}\right)\Delta_i, \qquad S_2 = \frac{1}{2}\sum_i f''\left(B_{t_i}\right)\Delta_i^2, \qquad S_3 = \frac{1}{2}\sum_i \left(f''(\xi_i) - f''\left(B_{t_i}\right)\right)\Delta_i^2.$$

Étape 2 : $S_1 \to \int_0^t f'(B_s)\,dB_s$**.** S_1 est l'intégrale d'Itô du processus simple $\sum_i f'\left(B_{t_i}\right)\mathbf{1}_{I_i}$, où I_i désigne l'intervalle $]t_i, t_{i+1}]$. Ce processus converge vers $f'(B)$ dans $\mathcal{H}^2$ (f' est continue et bornée : convergence dominée). Par l'isométrie, $S_1 \to \int_0^t f'(B_s)\,dB_s$ dans L^2.

Étape 3 : $S_2 \to \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$**.** Notons $g = f''$ (bornée par une constante C) et $g_i = g\left(B_{t_i}\right)$. On compare S_2 à la somme de Riemann $\frac{1}{2}\sum_i g_i\ h$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i g_i\ (\Delta_i^2 - h)\right)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}\left[g_i^2\,(\Delta_i^2 - h)^2\right] + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[g_i(\Delta_i^2 - h)\,g_j\,(\Delta_j^2 - h)\right].$$

Termes croisés ($i < j$) : tout sauf $\Delta_j^2 - h$ est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable, et $\mathbb{E}\left[\Delta_j^2 - h \mid \mathcal{F}_{t_j}\right] = h - h = 0$: ils sont nuls.

Termes diagonaux : g_i est indépendant de Δ_i et $\mathbb{E}[(\Delta_i^2 - h)^2] = \mathrm{Var}(\Delta_i^2) = 2h^2$. Donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_i g_i\ (\Delta_i^2 - h)\right)^2\right] \leq C^2 \cdot n \cdot 2h^2 = \frac{2C^2t^2}{n} \to 0.$$

Ainsi S_2 a la même limite que $\frac{1}{2}\sum_i g\left(B_{t_i}\right) h$, qui est une somme de Riemann de la fonction continue $s \mapsto g(B_s)$: elle tend vers $\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\, ds$.

Étape 4 : $S_3 \to 0$**.** On majore $|S_3| \leq \frac{1}{2}\left(\max_i \left|f''(\xi_i) - f''\left(B_{t_i}\right)\right|\right) \cdot \sum_i \Delta_i^2$. Le maximum tend vers 0 p.s. : la trajectoire de B sur $[0, t]$ reste dans un compact, f'' y est uniformément continue, et $\left|\xi_i - B_{t_i}\right| \leq |\Delta_i| \leq \max_j \left|\Delta_j\right| \to 0$ (uniforme continuité de B). Comme $\sum_i \Delta_i^2 \to t$, on obtient $S_3 \to 0$ en probabilité.

Conclusion. En passant à la limite (quitte à extraire une sous-suite convergeant p.s.) dans $f(B_t) - f(B_0) = S_1 + S_2 + S_3$, on obtient la formule d'Itô. ▫

Ce qu'il faut retenir de la preuve. Le terme $\frac{1}{2}f''$ provient du terme d'ordre 2 de Taylor, qui survit parce que $\sum_i \Delta_i^2 \to t$ au lieu de tendre vers 0.

2. La formule d'Itô pour $f(t, B_t)$

Théorème. Soit $f(t, x)$ de classe C^1 en t et C^2 en x (on dit $C^{1,2}$). Alors

$$df(t, B_t) = \partial_t f(t, B_t)\, dt + \partial_x f(t, B_t)\, dB_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t, B_t)\, dt,$$

c'est-à-dire

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t \left(\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\right)(s, B_s)\, ds + \int_0^t \partial_x f(s, B_s)\, dB_s.$$

Idée. On fait un développement de Taylor en (t, x). Les termes en $(\Delta t)^2$ et $\Delta t\, \Delta B$ sont négligeables (d'ordres $(\Delta t)^2$ et $(\Delta t)^{3/2}$) ; seul $(\Delta B)^2$ survit parmi les termes d'ordre 2.

Exemple 1. $f(t, x) = tx$: $\partial_t f = x, \partial_x f = t, \partial_{xx} f = 0$. Donc $d(tB_t) = B_t\, dt + t\, dB_t$, soit

$$\int_0^t s\ dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\ ds.$$

Exemple 2. $f(t, x) = x^2 - t$: $\partial_t f = -1, \partial_x f = 2x, \partial_{xx} f = 2$. Donc $d(B_t^2 - t) = (-1 + 1)\, dt + 2B_t\, dB_t = 2B_t\, dB_t$: il n'y a plus de dérive, ce qui explique que $B_t^2 - t$ soit une martingale.

2.1 Le critère de martingale

Corollaire. Si $f \in C^{1,2}$ vérifie l'**équation de la chaleur rétrograde**

$$\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_{xx} f = 0,$$

alors $f(t, B_t) = f(0,0) + \int_0^t \partial_x f(s, B_s)\, dB_s$. Si de plus $\partial_x f(s, B_s) \in \mathcal{H}^2$, alors $f(t, B_t)$ est une martingale.

$f(t,x)$	$\partial_t f$	$\frac{1}{2}\partial_{xx} f$	Martingale obtenue
x	0	0	B_t
$x^2 - t$	-1	1	$B_t^2 - t$
$x^3 - 3tx$	$-3x$	$3x$	$B_t^3 - 3tB_t$
$e^{\lambda x - \lambda^2 t/2}$	$-\frac{\lambda^2}{2} f$	$\frac{\lambda^2}{2} f$	martingale exponentielle
$e^{t/2}\cos x$	$\frac{1}{2} f$	$-\frac{1}{2} f$	$e^{t/2}\cos B_t$

On retrouve en une ligne toutes les martingales de la semaine 3, obtenues alors par des calculs d'espérance conditionnelle. Ce lien entre martingales et équations aux dérivées partielles est le point de départ de la formule de **Feynman-Kac**.

3. La formule d'Itô pour un processus d'Itô

3.1 Énoncé

Soit X un processus d'Itô : $dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t$.

Théorème. Pour $f \in C^{1,2}$:

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)\, dt + \partial_x f(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t, X_t)\, H_t^2\, dt.$$

En développant dX_t :

$$df(t, X_t) = \left(\partial_t f + K_t\, \partial_x f + \frac{1}{2} H_t^2\, \partial_{xx} f\right)(t, X_t)\, dt + H_t\, \partial_x f(t, X_t)\, dB_t.$$

3.2 La table de multiplication

On retient la formule sous la forme d'un développement de Taylor à l'ordre 2,

$$df(t, X_t) = \partial_t f\, dt + \partial_x f\, dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\, (dX_t)^2,$$

où $(dX_t)^2$ se calcule avec les règles suivantes :

$\times$	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Ainsi $(dX_t)^2 = (K_t\,dt + H_t\,dB_t)^2 = K_t^2(dt)^2 + 2K_tH_t\,dt\,dB_t + H_t^2(dB_t)^2 = H_t^2\,dt$. On note aussi $d\langle X\rangle_t = (dX_t)^2 = H_t^2\,dt$: la dérive ne contribue pas à la variation quadratique.

3.3 Méthode pratique en 4 étapes

1. Identifier $f(t,x)$ et le processus X (avec K et H).
2. Calculer $\partial_t f, \partial_x f, \partial_{xx} f$.
3. Écrire $df = \partial_t f\,dt + \partial_x f\,dX + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\,(dX)^2$ et remplacer dX et $(dX)^2 = H^2\,dt$.
4. Regrouper les termes en dt (dérive) et en dB (partie martingale).

4. Version multidimensionnelle

4.1 Brownien de dimension d

Un brownien de dimension d est un vecteur $B = (B^1, \dots, B^d)$ de browniens réels **indépendants**. Les règles de calcul deviennent

$$dB_t^i\,dB_t^j = \delta_{ij}\,dt \quad (\text{égal à } dt \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon}), \qquad dt\,dB_t^i = 0, \qquad (dt)^2 = 0.$$

Justification de $dB^i dB^j = 0$ pour $i \neq j$: $\sum_k \Delta_k B^i\,\Delta_k B^j \to 0$ dans L^2, car ses termes sont indépendants, centrés, de variance h^2 ; la variance de la somme vaut $nh^2 = t^2/n \to 0$.

4.2 Formule générale

Théorème. Soient $X^1, \dots, X^m$ des processus d'Itô, $dX_t^i = K_t^i\,dt + \sum_{k=1}^d H_t^{ik}\,dB_t^k$, et $f(t, x_1, \dots, x_m)$ de classe $C^{1,2}$. Alors

$$df(t,X_t) = \partial_t f\,dt + \sum_{i=1}^m \partial_{x_i} f\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \partial_{x_i x_j} f\,d\langle X^i, X^j\rangle_t,$$

où la **covariation** vaut $d\langle X^i, X^j\rangle_t = dX_t^i\,dX_t^j = \sum_{k=1}^d H_t^{ik}\,H_t^{jk}\,dt$.

Cas du brownien seul $(X = B, m = d)$: $df(B_t) = \sum_i \partial_i f(B_t)\,dB_t^i + \frac{1}{2}\Delta f(B_t)\,dt$, où $\Delta = \sum_i \partial_{ii}$ est le laplacien.

4.3 Formule d'intégration par parties

Avec $f(x,y) = xy$ $(\partial_x f = y, \partial_y f = x, \partial_{xy} f = 1, \partial_{xx} f = \partial_{yy} f = 0)$:

$$d(X_tY_t) = X_t\,dY_t + Y_t\,dX_t + d\langle X, Y\rangle_t.$$

Le terme $d\langle X, Y\rangle_t$ est nouveau par rapport au calcul classique. Il disparaît si l'un des deux processus est à variation finie (par exemple déterministe et C^1) : c'est le cas utilisé pour Ornstein-Uhlenbeck.

4.4 Browniens corrélés

Soient B^1, B^2 indépendants et $\rho \in [-1,1]$. Le processus $W = \rho B^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, B^2$ est un brownien (processus gaussien centré continu de covariance $(\rho^2 + 1 - \rho^2)(s \wedge t) = s \wedge t$), et

$$dB_t^1\, dW_t = \rho\, (dB_t^1)^2 + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t^1\, dB_t^2 = \rho\, dt.$$

Cette construction sert en finance pour modéliser deux actifs corrélés, ou un prix et sa volatilité.

5. Applications immédiates

5.1 Moments du brownien

Avec $f(x) = x^n$ $(n \geq 2)$: $d(B_t^n) = nB_t^{n-1}\, dB_t + \frac{n(n-1)}{2} B_t^{n-2}\, dt$. La partie martingale est d'espérance nulle ($B^{n-1} \in \mathcal{H}^2$ car tous ses moments sont finis). En prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}[B_t^n] = \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t \mathbb{E}\,[B_s^{n-2}]\, ds.$$

Calcul de $\mathbb{E}[B_t^4]$. Pour $n = 4$: $\mathbb{E}[B_t^4] = 6 \int_0^t \mathbb{E}\,[B_s^2]\, ds = 6 \int_0^t s\ ds = 3t^2$. ✓

Récurrence générale. Pour $n = 2k$, on obtient par récurrence $\mathbb{E}[B_t^{2k}] = (2k-1)!!\ \ t^k$, où $(2k-1)!! = 1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1)$. Vérification pour $k = 3$: $\mathbb{E}[B_t^6] = 15 \int_0^t 3\, s^2\, ds = 15t^3$, et $5!! = 15$. ✓ Les moments impairs sont nuls (récurrence à partir de $\mathbb{E}[B_t] = 0$).

5.2 Martingales exponentielles

Soit $Z_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\right)$, c'est-à-dire $Z_t = f(t, B_t)$ avec $f(t,x) = e^{\lambda x - \lambda^2 t/2}$. On a $\partial_t f = -\frac{\lambda^2}{2} f$, $\partial_x f = \lambda f$, $\partial_{xx} f = \lambda^2 f$, donc

$$dZ_t = \left(-\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}\right) Z_t\, dt + \lambda Z_t\, dB_t = \lambda Z_t\, dB_t.$$

Z est une martingale car $\mathbb{E} \int_0^t Z_s^2\ ds = \int_0^t e^{\lambda^2 s}\ ds < \infty$ (on a utilisé $\mathbb{E}[Z_s^2] = e^{-\lambda^2 s}\, \mathbb{E}\left[e^{2\lambda B_s}\right] = e^{-\lambda^2 s} e^{2\lambda^2 s}$).

Généralisation (exponentielle de Doléans-Dade). Pour H adapté, posons $Y_t = \int_0^t H_s\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\ ds$ et $Z_t = e^{Y_t}$. Alors $dY = H\, dB - \frac{1}{2} H^2\, dt$, $(dY)^2 = H^2\, dt$, et

$$dZ_t = e^{Y_t}\,dY_t + \frac{1}{2}e^{Y_t}\,(dY_t)^2 = Z_t H_t\,dB_t - \frac{1}{2}Z_t H_t^2\,dt + \frac{1}{2}Z_t H_t^2\,dt = Z_t H_t\,dB_t.$$

Z est toujours une martingale locale ; c'est une vraie martingale sous la condition de Novikov $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2\ ds\right)\right] < \infty$ (admis). Cet objet sera au cœur du théorème de Girsanov et du changement de probabilité en finance.

5.3 Fil rouge n° 1 : le brownien géométrique

Soient $S_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (tendance) et $\sigma > 0$ (volatilité). On pose

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right).$$

Proposition. S vérifie l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t.$$

Preuve. $S_t = f(t, B_t)$ avec $f(t,x) = S_0\exp(\sigma x + (\mu - \sigma^2/2)t)$. Alors $\partial_t f = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)f$, $\partial_x f = \sigma f$, $\partial_{xx} f = \sigma^2 f$, et

$$dS_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right)S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t. \qquad \blacksquare$$

Interprétation. $\frac{dS_t}{S_t} = \mu\,dt + \sigma\,dB_t$: le rendement instantané est une tendance μ plus un bruit d'intensité σ. C'est le modèle de Black-Scholes pour le prix d'une action. L'unicité de la solution sera démontrée.

Attention au $-\sigma^2/2$. Le calcul classique suggérerait $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \mu t}$. C'est faux : le terme d'Itô impose la correction $-\frac{\sigma^2}{2}t$ dans l'exposant.

Moments. Avec $\mathbb{E}[e^{\sigma B_t}] = e^{\sigma^2 t/2}$:

$$\mathbb{E}[S_t] = S_0\,e^{(\mu-\sigma^2/2)t}\,e^{\sigma^2 t/2} = S_0\,e^{\mu t}, \qquad \mathbb{E}[S_t^2] = S_0^2\,e^{(2\mu-\sigma^2)t}\,e^{2\sigma^2 t} = S_0^2\,e^{(2\mu+\sigma^2)t},$$

$\mathrm{Var}(S_t) = S_0^2\,e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$.

Logarithme. $\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t,\ \sigma^2 t\right)$: S_t suit une loi **log-normale**.

5.4 Fil rouge n° 2 : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On revient à l'équation de Langevin de la semaine 2, avec $\gamma > 0$, $\sigma > 0$ et $X_0 = x_0$:

$$dX_t = -\gamma X_t\,dt + \sigma\,dB_t.$$

Proposition. La solution est

$$X_t = x_0\, e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\; dB_s.$$

Preuve (méthode du facteur intégrant). Soit $Y_t = e^{\gamma t} X_t$. Comme $e^{\gamma t}$ est déterministe et C^1, la covariation $d\langle e^{\gamma \cdot}, X\rangle$ est nulle, et la formule d'intégration par parties donne

$$dY_t = \gamma e^{\gamma t} X_t\, dt + e^{\gamma t}\, dX_t = \gamma e^{\gamma t} X_t\, dt + e^{\gamma t}(-\gamma X_t\, dt + \sigma\, dB_t) = \sigma e^{\gamma t}\, dB_t.$$

Donc $Y_t = x_0 + \sigma \int_0^t e^{\gamma s}\; dB_s$, et l'on multiplie par $e^{-\gamma t}$. ▫

Loi. L'intégrand $s \mapsto e^{-\gamma(t-s)}$ est déterministe : c'est une intégrale de Wiener. Donc X_t est gaussien, de moyenne $x_0 e^{-\gamma t}$ et de variance

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}\; ds = \frac{\sigma^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}).$$

Comportement en temps long. Quand $t \to \infty$, la moyenne tend vers 0 et la variance vers $\sigma^2/(2\gamma)$: X_t converge en loi vers $\mathcal{N}\big(0, \sigma^2/(2\gamma)\big)$, la **loi stationnaire**. Le processus est « rappelé » vers 0 : c'est un modèle de **retour à la moyenne**, utilisé pour les taux d'intérêt.

5.5 Brownien plan

Soit (B^1, B^2) un brownien de dimension 2 et $R_t^2 = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2$. Avec $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\Delta f = 4$:

$$d(R_t^2) = 2B_t^1\, dB_t^1 + 2B_t^2\, dB_t^2 + 2\, dt.$$

Donc $\mathbb{E}[R_t^2] = 2t$ et $R_t^2 - 2t$ est une martingale. En dimension d : $\mathbb{E}[|B_t|^2] = d\, t$.

6. Pièges fréquents

1. **Oublier le terme d'Itô.** $d(B_t^2) \neq 2B_t\, dB_t$; $d(e^{B_t}) \neq e^{B_t}\, dB_t$.
2. **Oublier le facteur H^2.** Pour $dX = K\, dt + H\, dB$, le terme correctif est $\frac{1}{2}\partial_{xx} f \cdot H^2\, dt$, et non $\frac{1}{2}\partial_{xx} f\, dt$.
3. **Garder des termes nuls.** $(dt)^2 = 0$ et $dt\, dB = 0$; seul $(dB)^2 = dt$ survit.
4. **Conclure trop vite à une martingale.** Une intégrale $\int H\, dB$ est une vraie martingale si $H \in \mathcal{H}^2$; sinon, ce n'est en général qu'une martingale locale.
5. **Oublier la covariation** dans un produit : $d(XY) = X\, dY + Y\, dX + d\langle X, Y\rangle$.

7. À retenir

1. $df(B_t) = f'(B_t)\, dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)\, dt$.
2. $df(t, X_t) = \partial_t f\, dt + \partial_x f\, dX_t + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\, (dX_t)^2$, avec $(dB)^2 = dt$, $dt\, dB = 0$, $(dt)^2 = 0$.
3. $f(t, B_t)$ est une martingale quand $\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_{xx} f = 0$ (et $\partial_x f(t, B_t) \in \mathcal{H}^2$).

4. $d(XY) = X\,dY + Y\,dX + d\langle X, Y\rangle$; $dB^i dB^j = \delta_{ij}\,dt$.
5. Brownien géométrique : $S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$ résout $dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dB$ et $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{\mu t}$.
6. Ornstein-Uhlenbeck : $X_t = x_0 e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\,dB_s$, gaussien de variance $\frac{\sigma^2}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})$.

8. TD — Exercices corrigés (difficulté croissante)

Exercice 1 — Premiers calculs avec $f(B_t)$

1. Écrire $df(B_t)$ pour $f(x) = x^3$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$.
2. En déduire $\mathbb{E}[\sin B_t]$ et $\mathbb{E}[\cos B_t]$. Vérifier avec la fonction caractéristique de B_t.

Exercice 2 — Fonctions de (t, B_t)

1. Calculer $d(tB_t^2)$ et en déduire $\mathbb{E}[tB_t^2]$; vérifier.
2. Montrer que $e^{t/2}\cos B_t$ est une martingale.
3. Montrer que $\int_0^t B_s^2\,dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s\,ds$.

Exercice 3 — Martingales polynomiales par la formule d'Itô

Retrouver, par la formule d'Itô, que $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ et $Y_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$ sont des martingales (comparer avec l'exercice 1 de la semaine 3).

Exercice 4 — Produit et moments exponentiels

1. Calculer $d(B_t e^{B_t})$ de deux façons : par la formule d'intégration par parties, puis avec $f(x) = xe^x$.
2. En déduire $m(t) = \mathbb{E}[B_t e^{B_t}]$.

Exercice 5 — Moments d'ordre 6

1. Écrire la formule de récurrence du § 5.1 pour $n = 6$ et calculer $\mathbb{E}[B_t^6]$.
2. En déduire $\mathbb{E}[Z^6]$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Corrigé.

1. $\mathbb{E}[B_t^6] = \frac{6\times5}{2}\int_0^t \mathbb{E}\,[B_s^4]\,ds = 15\int_0^t 3\,s^2\,ds = 15t^3$.

2. Avec $t = 1$: $\mathbb{E}[Z^6] = 15 = 5!!$.

Exercice 6 — Le brownien géométrique en chiffres

On prend $S_0 = 100$, $\mu = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$ et $t = 1$ (un an). On donne $\Phi(0{,}15) \approx 0{,}5596$.

1. Montrer par la formule d'Itô que $d(\ln S_t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\,dB_t$.
2. Calculer $\mathbb{E}[S_1]$, la médiane de S_1 et l'écart-type de S_1.

3. Calculer $\mathbb{P}(S_1 > S_0)$.

Exercice 7 — Ornstein-Uhlenbeck

Soit X la solution de $dX_t = -\gamma X_t\, dt + \sigma\, dB_t$, $X_0 = x_0$.

1. Retrouver $\mathbb{E}[X_t]$ sans la formule explicite, en prenant l'espérance dans l'équation.
2. Pour $s \leq t$, calculer $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.
3. Application : $\gamma = 1$, $\sigma = \sqrt{2}$. Donner la loi stationnaire et la corrélation stationnaire entre X_s et X_{s+1}.

Exercice 8 — Calculs en dimension 2

Soient B^1, B^2 deux browniens indépendants.

1. Montrer que $B_t^1 B_t^2$ et $(B_t^1)^2 - (B_t^2)^2$ sont des martingales.
2. Soit $\rho \in [-1,1]$ et $W = \rho B^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, B^2$. Calculer $d(B_t^1 W_t)$ et en déduire $\mathbb{E}[B_t^1 W_t]$.

Exercice 9 — L'exponentielle stochastique

1. Montrer que $d(e^{B_t}) \neq e^{B_t}\, dB_t$.
2. Trouver un processus X tel que $dX_t = X_t\, dB_t$ et $X_0 = 1$.
3. Plus généralement, pour a, b réels, trouver X tel que $dX_t = aX_t\, dt + bX_t\, dB_t$ et $X_0 =$

Références

Références du plan de cours ; données bibliographiques de mémoire, à contrôler en bibliothèque.

- B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, 6e éd., 2003 — chapitre 4 (formule d'Itô), et chapitre 5 pour le brownien géométrique et Ornstein-Uhlenbeck.
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses — chapitre 3 (calcul d'Itô), en français.
- S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004 — chapitre 4 (formule d'Itô-Doeblin, brownien géométrique, version multidimensionnelle).
- I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, GTM 113, 2e éd., 1991 — chapitre 3, version rigoureuse.
- J.-F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, coll. Mathématiques et Applications 71, 2013 — chapitre 5, en français.