Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département d'informatique

1ère Année Licence Informatique
2026-2027

Analyse 1
Fiche de TD 4
Fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-5x+4}}, \qquad \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-5x+4}}, \quad \ln(6-|x-2|),$$

$$x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right), \quad \cos\left(\frac{1}{1-e^{x^2}}\right), \qquad \frac{\sqrt{\ln x}}{1-\ln x}.$$

Exercice 2

1- Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}, \quad \cos(2x)+\tan^2(x), \quad \cos(2x)-2\cos x.$$

2- Étudier la périodicité des fonctions suivantes :

$$\sin(2x)+\cos x, \quad 3\cos x+\sin(\sqrt{2}\,x), \quad \cos(4x)+\sin(6x) \quad \text{supplémentaire .}$$

3- Montrer que la fonction définie par

$$g(x)=\sqrt{x-4E\left(\frac{x}{4}\right)}$$

est périodique de période 4.

Exercice 3

Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x\,E\big(\ln(\frac{1}{x})\big), \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+2e^x-5}{e^x-3x}, \qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin(3x^2)}{x^6+3x^2}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x, \quad a\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition et la possibilité de prolongement par continuité.

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}, & \text{si } x\neq 1,\\ 1, & \text{si } x=1.\end{cases}, \quad f_2(x)=\begin{cases}x+1, & x\leq -1\\ \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), & x>-1\end{cases},$$

$$f_3(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad f_4(x)=\frac{\sin(\pi x)}{|x-1|}$$

Exercice 5

Déterminer les réels a et b pour que la fonction suivante soit continue sur son domaine de définition :

$$g(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & x < 0, \\ a, & x = 0, \\ b\dfrac{\sin(5x)}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Exercice 6

1- Montrer que l'équation $4x^3 - 3x + \dfrac{1}{2} = 0$ admet exactement trois solutions dans $]-1, 1[$.

2- Montrer que $x\,e^x = 1$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$. (Supplémentaire)

Exercice 7 - Facultatif

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ x - E(x), & 1 < x < 2 \\ E(x) - x + 1, & 2 \leq x < 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(x), & x \geq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^3 - 1}, & x < 1 \end{cases}$$

Exercice 8 - Facultatif

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ a - bx, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 3be^x - x, & x > 0, \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 - Facultatif

Soit la fonction $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

(b) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation

$$f(x) = x$$

admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$. (On donne $\ln(2) = 0.6$.)