Chapitre 5

Fonctions Dérivables

5.1 Dérivabilité d'une fonction

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est *dérivable* en $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\text{ou} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

  existe et est finie.

- On note cette limite $f'(x_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Elle s'appelle le ***nombre dérivé*** de f en x_0.

- Le quotient $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle le ***taux d'accroissement*** (ou **taux de croissance**).

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

Exemple

1) Soit $f(x) = x^2$. Calculons sa dérivée en tout $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Ainsi $f'(x) = 2x$.

2) Même question pour $f(x) = \sin x$.

Rappel :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x_0\cos h+\sin h\cos x_0-\sin x_0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\sin x_0\,\frac{\cos h-1}{h}+\cos x_0\,\frac{\sin h}{h}\right]\\ &= \sin x_0\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}}_{0}+\cos x_0\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{1} = \cos x_0.\end{aligned}$$

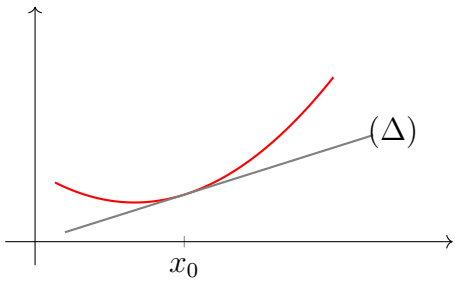
Ainsi $f'(x)=\cos x$, c'est-à-dire $(\sin x)'=\cos x$.

5.1.1 Interprétation géométrique

Soit f une fonction dérivable en x_0 et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(x_0, f(x_0))$ est

$$\boxed{y = f'(x_0)\,(x-x_0)+f(x_0)}$$

Ainsi $f'(x_0)$ représente la *pente* de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M (le coefficient directeur de (Δ)).



Théorème

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Supposons que f est dérivable en x_0. Pour tout x dans un voisinage de x_0 ($x\neq x_0$) on a

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0).$$

Donc

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big) = \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\times\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{0} = 0.$$

Donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Conclusion : f est continue en x_0. □

Remarque

1) Le théorème s'énonce aussi : si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0.

2) **Attention :** si une fonction est continue, elle n'est pas forcément dérivable.

Définition

On dit que f est dérivable

- *à gauche* en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'_g(x_0)$ existe et est finie ;
- *à droite* en x_0 ssi $\lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'_d(x_0)$ existe et est finie.

Remarque

f est dérivable en x_0 ssi $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

5.1.2 Les quatre cas de non dérivabilité

1) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ n'existe pas.

2) Si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0.

3) Une tangente verticale en x_0, c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$.

4) Existence d'un point anguleux en x_0.

Exemple

Étude de la continuité et de la dérivabilité au point a.

1) $f(x) = |x|$, $a = 0$, avec $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

• ***Continuité en*** 0. $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$.
Donc f est continue en 0.

• ***Dérivabilité en*** 0.

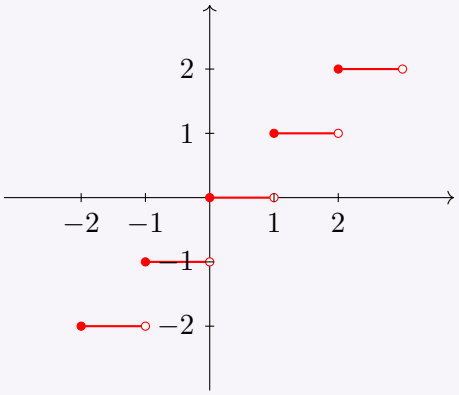
$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x} = 1,$$
$$f'_g(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x} = -1.$$

On remarque que $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, donc f n'est pas dérivable en $a = 0$. La fonction $x \mapsto |x|$ admet un *point anguleux* en $a = 0$.

2) $f(x) = E(x)$ (partie entière) .

Continuité de E ***en*** $a = n \in \mathbb{Z}$***.***

On a $f(n) = n$ car $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to n^-} E(x) = n - 1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} E(x) = n$. On remarque que $f(n) = \lim\limits_{x \to n^+} E(x) \neq \lim\limits_{x \to n^-} E(x)$. Donc f n'est pas continue en tout $n \in \mathbb{Z}$, donc elle n'est pas dérivable en tout point $n \in \mathbb{Z}$.



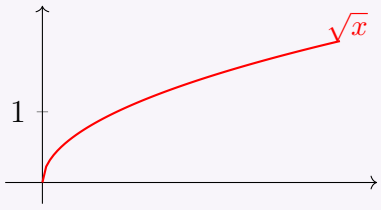
3) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$.

Continuité en 0. $f(0) = \sqrt{0} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. Donc f est continue en 0.

Dérivabilité en 0***.***

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0 ; f admet une *tangente verticale* en 0.



4) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Continuité en $a = 2$***.***

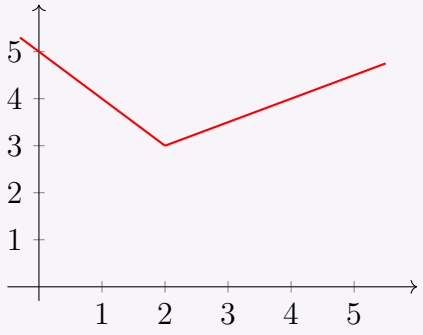
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x + 5) = 3 = f(2), \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) = 3.$$

Donc $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$: f est continue en $a = 2$.

Dérivabilité en $a = 2$***.***

$$f'_g(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x+5-3}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1,$$
$$f'_d(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2}x+2-3}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{2}(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2}.$$

On remarque que $f'_d(2) \neq f'_g(2)$: f admet un point anguleux en $x = 2$.



5.1.3 Opérations algébriques sur les dérivées

Théorème

Soient f et g deux fonctions dérivables en $a \in (D_f \cap D_g)$. Alors :

1) $(f+g)$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2) $(f \times g)$ est dérivable en a et $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$;
3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, (λf) est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;
4) si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$.

Attention

Dans ce théorème, la condition (f et g sont dérivables) est une condition *suffisante* mais pas *nécessaire*.

Exemple

$f(x) = x^2$ est dérivable en 0 ; $g(x) = E(x)$ n'est pas dérivable en 0. Mais $(f \cdot g)(x) = x^2 E(x)$ est dérivable en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2E(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\,E(x) = 0.$$

Donc $(f \cdot g)(x)$ est dérivable en 0.

5.1.4 Dérivée de la fonction composée

Théorème

Si f est dérivable en $a \in D_f$ et g est dérivable en $f(a) \in D_g$, alors $(g \circ f)$ est dérivable en a et

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big)}$$

Règle de la chaîne. Soit u une fonction dérivable de x et v une fonction dérivable de u. Alors la fonction composée $x \mapsto v(u(x))$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Exemple

Soit $u(x) = e^x$ et $v = \cos u$, c'est-à-dire $v(x) = \cos(e^x)$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(u) \cdot e^x = -e^x \sin\left(e^x\right).$$

Exemple (Pour les étudiants)

Soient $f(x) = \sin x$ et $g(x) = |x|$.
On a $D_f = D_g = \mathbb{R}$, donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |\sin x|$.
Étudier la dérivabilité de $(g \circ f)$ en $\frac{\pi}{2}$ et en 0.

• ***Dérivabilité de $g \circ f$ en $\frac{\pi}{2}$.***
f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$; $f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ et g est dérivable en $1 = f(\frac{\pi}{2})$. Donc $(g \circ f)$ est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ d'après le théorème précédent.

• ***Dérivabilité de $g \circ f$ en 0.***
f est dérivable en 0 et $f(0) = \sin 0 = 0$; mais g n'est pas dérivable en $0 = f(0)$, donc on ne peut pas utiliser le théorème : on doit étudier directement la dérivabilité de $(g \circ f)$ en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$
$$(\text{car } \sin x \geq 0 \text{ pour } x \to 0^+),$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$
$$(\text{car } \sin x \leq 0 \text{ si } x \to 0^-).$$

Donc $(g \circ f)$ n'est pas dérivable en 0.

5.1.5 Dérivée de la fonction réciproque (fonction inverse)

Théorème

Si 1) $f : I \to J$ est bijective, 2) f est dérivable en $a \in I$, 3) $f'(a) \neq 0$, alors la fonction inverse f^{-1} est dérivable en $f(a) = y_0$ et l'on a

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'\big(f(a)\big) = \frac{1}{f'(a)}}$$

Démonstration. Posons $g = f^{-1}$. On a $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, d'où

$$g'(f(a)) = \frac{(g \circ f)'(a)}{f'(a)} = \frac{(f^{-1} \circ f)'(a)}{f'(a)}.$$

Comme $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in I$, on a $(f^{-1} \circ f)'(x) = x' = 1$. Ainsi $\big(f^{-1}\big)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$. □

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \mapsto f(x) = e^x$. La fonction f est bijective (continue et strictement croissante), donc elle est inversible (elle admet une fonction inverse f^{-1}) : $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y \mapsto f^{-1}(y) = \ln y$, car $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$. Ainsi

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\ln y)' = \frac{1}{y}.$$

5.1.6 Dérivées des fonctions usuelles

On suppose que les fonctions usuelles sont définies sur leur domaine de définition.

La fonction	La dérivée
x^n	$n\,x^{n-1}$
$[u(x)]^n$	$n\,[u(x)]^{n-1}\,u'(x)$
e^x	e^x
$a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$	$a^x \ln a$
$e^{u(x)}$	$e^{u(x)}\,u'(x)$
$a^{u(x)}\ (a>0,\ a\neq 1)$	$a^{u(x)}\,u'(x)\,\ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\log_a u(x)\ (a>0,\ a\neq 1)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}\cdot\dfrac{1}{\ln a}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(u(x))$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\tan(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = \big[1+\tan^2 u(x)\big]u'(x)$

5.2 Extremum

5.2.1 Définitions

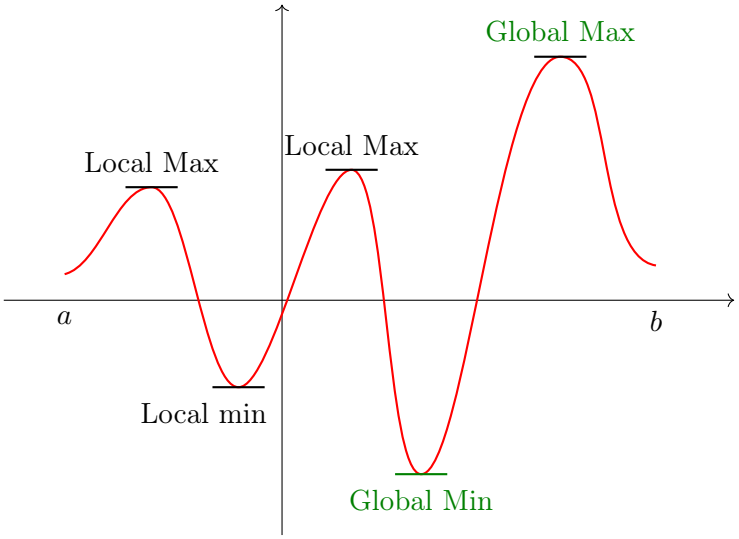
Soit f une fonction définie sur D_f et $a \in D_f$.

Définition

1) f admet un *maximum local* en a ssi $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\,,\ f(x) \leq f(a)$.
Un *maximum global* en a ssi $\forall x \in D_f,\ f(x) \leq f(a)$.

2) f admet un *minimum local* en a ssi $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]a-\eta, a+\eta[\,,\ f(x) \geq f(a)$.
Un *minimum global* en a ssi $\forall x \in D_f,\ f(x) \geq f(a)$.

3) f admet un *extremum local* (ou global) en a si f admet un maximum ou un minimum local (ou global) en a.



5.2.2 Théorème de Fermat

Théorème Fermat

Soit f une fonction *dérivable* en $a \in D_f$. Si f admet un *extremum* (local ou global) en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration. Supposons que a est un maximum local de f (même preuve pour un minimum). Donc $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$, $f(x) \leq f(a)$, c'est-à-dire $f(x) - f(a) \leq 0$.

- Pour $x \leq a$ on a $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a \leq 0$, donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.
- Pour $x \geq a$ on a $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a \geq 0$, donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$.

Comme f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$, d'où $f'(a) = 0$. □

Remarque

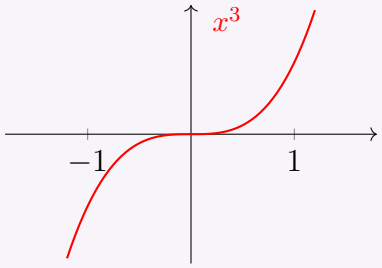
Remarques importantes.

1) Le théorème de Fermat affirme que si une fonction atteint un extremum local en un point où elle est dérivable, alors la tangente en ce point est horizontale : la pente est nulle.
2) La réciproque du théorème de Fermat est fausse : $f'(a) = 0$ n'implique pas que a est un extremum.
   Important :
   i) $f'(a) = 0$ *en changeant de signe* $\Rightarrow (a, f(a))$ est un extremum ;

ii) $f'(a) = 0$ *sans changer de signe* $\Rightarrow (a, f(a))$ n'est pas un point extremum. Mais si $f''(a) = 0$ en changeant de signe (en a), alors $(a, f(a))$ est dit un *point d'inflexion.*

Exemple

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $(f'(0) = 0)$. f' ne change pas de signe en $a = 0$. $f''(x) = 6x = 0$ en 0 et change de signe, donc le point $(0, 0)$ n'est pas un extremum, c'est un *point d'inflexion.*



Attention

3) Si f n'est pas dérivable en a, alors le théorème de Fermat n'est pas applicable.

4) Une fonction peut admettre un point d'extremum sans être dérivable en ce point.

Exemple : $f(x) = |x|$ admet un minimum global en 0, pourtant f n'est pas dérivable en 0.