اختبار الفرضيات في النماذج

1- جدول تحليل التباين (ANOVA: Analysis of Variance):

$$U = Y - Y = Y - X\hat{\beta}$$

$$\hat{U}'\hat{U} = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$

$$\hat{U}'\hat{U} = (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta})$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - Y'_{1n}X_{nk}\hat{\beta}_{k1} - \hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - (\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1})' - (\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1}) + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \ldots [(scl)' = (scl)]$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - 2\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

$$X'X\hat{\beta} = X'X(X'X)^{-1}X'Y = X'Y$$

$$\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - 2\hat{\beta}'_{1k}X'_{kn}Y_{n1} + \hat{\beta}'X'Y$$

$$\boxed{\hat{U}'\hat{U} = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}$$

$Y'Y = \hat{\beta}'X'Y + \hat{U}'\hat{U}$ …(كلها مصفوفات رقمية لذا يمكن القسمة عليها)

$$1 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} + \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y}$$

$$1 = \frac{SSR}{SST} + \frac{SSE}{SST}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SST - SSE}{SST} = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y} = 1 - \frac{\hat{U}'\hat{U}}{Y'Y}$ ~ إذا كان $\bar{y} = 0$

$\bar{y} \neq 0$: $R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - n y^2}{Y'Y - n y^2}$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k}(1 - R^2)$$

$$\bar{R}^2 = \frac{1-k}{n-k} - \frac{n-1}{n-k}(R^2)$$

جدول تحليل التباين (ANOVA):

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	التباين	مؤشر F
المفسر من طرف الانحدار	$SSR = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{y}^2$	$k-1$	$SSR/(k-1)$	$\frac{SSR/(k-1)}{SSE/(n-k)}$
غير المفسر	$SSE = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$	$n-k$	$SSE/(n-k)$	
المجموع	$SST = Y'Y - n\bar{y}^2$	$n-1$		

2- اختبار الفرضيات :

أ- اختبار الفرضيات لمعلمات الانحدار فرديا (اختبار t)

يستخدم اختبار (t) لاختبار المعنوية الإحصائية لكل معلمة من معلمات النموذج على حدة، وذلك بغرض معرفة ما إذا كان المتغير المستقل مفسرا إحصائيا للمتغير التابع. تصاغ الفرضية العدمية (H_0) والفرضية البديلة (H_1) كما يلي:

$$H_0: \beta_i = 0$$

$$H_1: \beta_i \neq 0$$

$$\beta \sim N\,[\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}]$$

ويمكن تقدير σ^2 تقريبيا كما وضحنا سابقا بالصيغة التالية:

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{(\hat{U}'\hat{U})}{(n-k)}$$

$$t\ calculator = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{S\sqrt{x_{ii}}} \quad \ldots \text{(القيمة المحسوبة)}$$

n: عدد المشاهدات، k: عدد معلمات النموذج بما فيها معلمة الثابت.

x_{ii} هو العنصر رقم (i) من عناصر قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$ التي تدخل في صيغة التباين:

$$var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} = S^2 (X'X)^{-1}$$

$$t\ critical = t\ tabulated = t_{(n-k,\alpha/2)} \ldots \text{(القيمة الحرجة أو الجدولية)}$$

مجال الثقة للمعلمة β عند مستوى **ثقة** $(1-\alpha)$ يعطى كالتالي:

$$\hat{\beta}i \pm t_{(n-k,\alpha/2)} S_{\hat{\beta}i} = \hat{\beta}i \pm t_{(n-k,\alpha/2)} S\sqrt{x_{ii}} \ldots (S_{\hat{\beta}i} = var(\hat{\beta}i))$$

[في الانحدار البسيط: $\hat{\beta}i \pm t_{(n-2,\alpha/2)} S_{\hat{\beta}i}$، لأنّ (k=2)]

$t_{cal} > t_{tab} \Rightarrow$ رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α

$t_{cal} < t_{tab} \Rightarrow$ عدم رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α

ب- اختبار التفسير الإحصائي العام للنموذج (اختبار F)

يستخدم اختبار (F) لاختبار المعنوية الإحصائية للانحدار (أو للنموذج) بصفة عامة، وذلك بغرض معرفة ما إذا كان النموذج قابل للتنبؤ بقيم المتغير التابع. تصاغ الفرضية العدمية (H_0) والفرضية البديلة (H_1) كما يلي:

$$H_0: \forall\, \alpha_j,\ \alpha_j = 0,\ j=1, \ldots, k.$$

H_1: $\exists\, \alpha_j, \alpha_j \neq 0, j=1, \ldots, k.$

انطلاقا من جدول (ANOVA) القيمة المحسوبة لإحصاءة (F) تعطى كالآتي:

$$F = \frac{SSR/(k-1)}{SSE/(n-k)} = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}$$

أما القيمة الحرجة فهي: $F_{tab} = F_{\alpha(k-1,n-k)}$

[في الانحدار البسيط: $F_{\alpha(1,n-2)}$، لأن (k=2)]

$F_{cal} > F_{tab} \Rightarrow$ رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α

$F_{cal} < F_{tab} \Rightarrow$ عدم رفض الفرضية H_0 عند درجة معنوية α