نموذج المعادلات الآنية \ المحاضرة الأولى

Simultaneous Equation Model (SEM)

شروط استخدام النموذج:

يستخدم نموذج المعادلات الآنية حين يحتوي النموذج على معادلتين (أو أكثر) إحداهما معادلة سلوكية أو عشوائية والأخرى معادلة تعريفية أو مطابقة، حيث يكون المتغير الداخلي أو التابع في إحدى المعادلتين متغيرا خارجيا أو مستقلا في المعادلة الثانية، ويشترط كذلك وجود على الأقل متغير خارجي واحد في النموذج ككل (أي أنه لا يكون تابعا في أي معادلة من معادلات النموذج).

لنأخذ **النموذج الكينيزي** البسيط التعريفي للدخل.

Consumption : $C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t$,... $0 < \beta_1 < 1$... **(1)**

Income Identity: $Y_t = C_t + I_t$... $I_t = S_t$ ... **(2)**

المعادلة (1) هي دالة الاستهلاك السلوكية أو العشوائية.

المعادلة (2) هي دالة الدخل التعريفية (المطابقة).

من المعادلتين (1) و (2) يبدو من الواضح أن المتغيرين Y و C يؤثران في بعضهما وأن Y في المعادلة (2) لا يُتوقع أن يكون مستقلا عن U في المعادلة (1). لأن الخطأ العشوائي عندما يتغير يؤثر في الاستهلاك من خلال المعادلة (1) والذي بدوره أي C يؤثر في Y من خلال المعادلة (2)، فينتج ارتباط خطي غير مباشر بين حد الخطأ U والمتغير المستقل في المعادلة الأولى Y أو ما يعرف بالمشكلة المتزامنة، وبالتالي طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لا تصلح لتقدير المعادلة (1).

1- هل مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية مناسبة لتقدير المعادلة (1)؟

لنفرض أننا نريد تقدير معلمات دالة الاستهلاك الموضحة في المعادلة (1) بافتراض:

$E(U_t) = 0$, $E(U_t^2) = \sigma^2$, $E(U_t U_{t+i}) = 0$ ...$(i\neq0)$, $Cov(I_t,U_t) = 0$.

والتي تمثل فرضيـــات طريقة المربعات الصــــغرى الاعتيادية (OLS) (أو نقول نموذج الانحدار الخطي الكلاسيكي). سنثبت أولا أن Y و U (في المعادلة 1) مرتبطان ثم سنثبت أن $\hat{\beta}_1$ هي مقدرة غير مناسبة ل β_1. لإثبات أن Y و U مرتبطان نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2):

$$Y_t = C_t + I_t = (\beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t) + I_t$$
$$Y_t = C_t + I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + U_t + I_t$$
$$Y_t - \beta_1 Y_t = \beta_0 + U_t + I_t$$
$$Y_t = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t + \frac{1}{1-\beta_1} U_t \quad ...(3)$$
$$E(Y_t) = \frac{\beta_0}{1-\beta_1} + \frac{1}{1-\beta_1} I_t \quad ...(4), \qquad (E(U_t) = 0 \text{ لأن})$$

بطرح المعادلة (4) من (3) نجد:

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{1}{1-\beta_1} U_t$$

يجب الإشارة إلى أنه يمكننا أن نكتب (U_t) على الشكل $(U_t - E(U))$، وبالتالي:

$$Cov(Y_t, U_t) = E\left[(Y_t - E(Y_t))\,(U_t - E(U))\right]$$

$$= E\left(\frac{1}{1-\beta_1} U_t\,(U_t)\right)$$

$$\mathbf{Cov(Y_t, U_t) = \frac{1}{1-\beta_1}\sigma^2} \Rightarrow Cov(Y_t, U_t) \neq 0$$

لأن σ^2 موجب افتراضا، والمعلمة β_1 تأخذ قيما محصورة في المجال التالي: $0 < \beta_1 < 1$.

كنتيجة Y و U في المعادلة (1) يتوقع أن يكونا مرتبطين فيما بينهما كما تم البرهان عليه، مما ينتهك فرضـــية نموذج الانحدار الخطي التقليدي بأن الأخطاء مســـتقلة أو على الأقل غير مرتبطة مع المتغيرات المفسِرة. ونظرا لوجود هذا الارتباط فإن طريقة المربعات الصغرى غير مناسبة.

أسئلة:

1 \ من خلال صيغة التباين المشترك هل يمكن تحديد نوع الارتباط الخطي بين حد الخطأ U والدخل Y؟

2\ كيف يمكن تقدير النموذج السابق مع معالجة مشكلة الارتباط الخطي بين حد الخطأ U والدخل Y؟