
بسم الله الرحمن الرحيم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
السنة الثالثة اقتصاد كمي

نظرية الألعاب الإستراتيجية

د. بن عاتق عمر

السنة الجامعية 2019-2020

مقدمــــــة

تمثل نظرية الألعاب الإستراتيجية إحدى الأساليب الكمية في بحوث العمليات التي تساعد المسيّر على اتخاذ القرارات في الحالات و المواقف التي تتضمّن التنافس على مورد مشترك و ذلك بافتراض الثقافة الكاملة أيّ توافر معلومات كاملة عن سير المباراة و قواعدها و الأطراف المشتركة فيها .

فإنّ نظرية الألعاب الإستراتيجية تهدف للوصول إلى إستراتيجية معينة ترضي الطرفين أفضل من عدم الوصول .

ماهية نظرية الألعاب الإستراتيجيـة

نبذة تاريخية حول نظرية الألعاب

ظهرت هذه النظرية خلال الحرب العالمية الأولى عام **1921** على يد العالم **Emil Borel**، ثمّ قام بعده الرياضي المشهور **John Von Newman**

عام **1928** بتقديم أوّل دراسة ناجحة للمباريات مدعمة بالحجج و البراهين الرياضية و لكن تقتصر فقط على خوارزميات و نظريات تبنى على الأساس الرياضي و المنطقي لقواعد و قوانين كلّ لعبة .

و في عام 1944 قام العالمان **Newman et Morgenstern** بتطوير نظرية المباريات و إستعمالها كأداة لتحليل المواقف التنافسية المتعارضة في المجالات الإقتصادية و الحربية ، و قدّما العالمان عملهما في كتاب

" Theory of games and economic behavior "

و منذ ذلك الحين توسّع إستخدام هذه النظرية على نطاق واسع في مجال الإدارة و العمل الإداري .

تعريف نظرية الألعاب الإستراتيجية

1> إنّ كلمة { المباراة } تعني المنافسة النشطة بين جهتين أو أكثر وفقا لقاعدة محدّدة مسبقا ، و تستخدم في المنافسة بين الشركات في تحديد الأسعار للمنتجات و حملات الدعاية للإنتخابات السياسية و كذلك في الحروب . و إنّ خبرة اللاّعب أحيانا تمكّنه من التنبّؤ بردّ الفعل بالنّسبة لخصمه لإستراتيجية معينة قد يتّبعها في المباراة و يتنافس اللاّعبان و نجاح واحد منهم يكون عادة على حساب خسارة الآخر و كلّ لاعب يختار و ينفّذ الإستراتيجية التي يعتقد أنّها تؤدّي إلى كسب المباراة .

2> المباراة عبارة عن مسابقة بين طرفين أو أكثر ، كلّ منهما يرغب في الفوز ، و تهدف نظرية الألعاب إلى إيجاد الإستراتيجيات المثالية في ظلّ مواقف النزاع أو الصراع ، ويكون لدى كلّ لاعب عدد من البدائل و الإستراتيجيات و بالتالي يوجد عائد لكل موقف من المواقف .

مفهوم المصطلحات المستخدمة في نظرية الألعاب

{Game} المباراة

وهي سلسلة من الخيارات التي تقود الى نهاية المباراة.

{Players} اللاعبون

وهم الاطراف المشتركة في المباراة, اي متخذي القرار.

{Strategy} الاستراتيجية

هي الخطة التي يختارها اللاعب في حركته و اتخاذ قراره.

الاستراتيجية الخالصة (النقية):

وتعني ان اللاعب يختار استراتيجية معينة من استراتيجياته و يلعبها طول فترة المباراة.

الاستراتيجية المختلطة :

وتعني ان اللاعب يوزع اهتمامه بين جميع ما هو متاح امامه من الاستراتيجيات وسيتم استخدامه لهذه الاستراتيجيات بنسب مختلفة طوال فترة المباراة.

مصفوفة العائد:

وهي الجدول الذي يبين المدفوعات التي يجب على اللاعب الخاسر دفعها الى اللاعب الرابح في نهاية المباراة.

عناصر نظرية الألعاب الإستراتيجية

يشترط في نظرية المباراة أن تتوفر على العناصر التالية:

قواعد اللعبة: ان لكل لعبة قواعد موضوعة مسبقا و معرفة بعائد معين، حيث تحدد هذه القواعد الانشطة الاولية لتحركات اللعبة.

العائد: وراء كل لعبة عائد معين سواء كان معبرا عنه بربح او خسارة او منفعة، حيث يسعى كل طرف مشارك في اللعبة الى تحقيقه، وهذا العائد لا يتوقف على الاستراتيجية التي يختارها اللاعب وانما ايضا على الاستراتيجيات المختارة من قبل الطرف الاخر.

الاستراتيجيات: تعتبر الاستراتيجية مجموعة من السياسات التي بدورها هي خطط محددة مسبقا تصف تحركات اللاعب و منافسه والتي سيقوم بها خلال المباراة وهي نوعين:

الاستراتيجية المطلقة (الصرفة): وهي الاستراتيجية اليي يمارسها اللاعب طوال وقت المباراة.

الاستراتيجية المختلطة: وهي المعيار القراري الذي يحدد التصرف الذي يجب ان يتخذه متخذ القرار وفقا لمجموعة محددة من الاحتمالات.

اللاعبون: قد تكون المباراة ذات شخصين او متعددة الاطراف، واللاعب وحدة مستقلة لاتخاذ القرار وليس من الضروري ان يكون شخصا فردا و انما قد يكون جماعة تعمل في مؤسسة ما او فريقا او دولة.

تصنيف الألعاب

تصنيف الألعاب عادة إما حسب عدد اللاعبين المشاركين في اللعبة أو حسب عدد الإستراتيجيات أو حسب نتيجة اللعبة.

أ- حسب عدد اللاعبين تقسم الى نوعين:

1- لعبة ذات شخصين: أي أن عدد المشاركين في اللعبة إثنان فقط.

2- لعبة متعددة الاطراف: أي ان عدد المشاركين في اللعبة أكثر من اثنين.

ب- حسب عدد الإستراتيجيات تقسم الى نوعين:

1- لعبة محددة: وهي اللعبة التي يكون فيها عدد الإستراتيجيات المتاحة أمام كل لاعب محدودة.

2- لعبة مستمرة(غير محدودة):وهي اللعبة التي يكون فيها عدد الاستراتيجيات أمام كل لاعب غير محدودا أي لانهائيا.

ج- حسب نتيجة اللعبة تقسم الى نوعين ايضا:

1- لعبة ذات مجموع صفري: وهي اللعبة التي يكون فيها ربح اللاعب الاول مساوي تماما لخسارة اللاعب الاخر.

2- لعبة ذات مجموع غير صفري: وهي اللعبة التي يكون فيها ربح احد اللاعبين لا يساوي خسارة اللاعب الاخر وانما يمكن ان يخسر الطرفين او يكسبا نتيجة المباراة.

الشكل العام للعبة بين شخصين ذات مجموع صفري

تتميز المباراة ذات المجموع الصفري بان مصالح الطرفين المتباريين متعارضة تماما، بحيث ان مجموع المنفعة لهما يساوي صفر في جميع الاحوال، وهذا معناه ان ما يخسره المتباري الاول يساوي ما يربحه اللاعب الاخر.

بشكل عام لدينا لعبة مؤلفة من شخصين ذات مجموع صفري، وكان اللاعب الاول يملك **m** إستراتيجية و اللاّعب الثاني **n**إستراتيجية ، و إذا إختار اللاّعب الأول الإستراتيجية **i**حيث **i=1,2,…,m** و اللاّعب الثاني الإستراتيجية **j** حيث **j=1,2,…,n**

عندئذ ربح اللاّعب الأول(خسارة اللاّعب الثاني) يساوي **aij**. و تدعى المصفوفة **aij** بمصفوفة المدفوعات أو الأرباح أو العوائد و التي تأخذ الشكل التالي :

	اللاّعب B						
اللاّعب A		1	2	....	j	....	n
	1	a11	a12	....	a1j	....	a1n
	2	a21	a22	....	a2j	....	a2n
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	....	⋮
	i	ai1	ai2	....	aij	....	ain
	⋮	⋮	⋮	....	⋮	....	⋮
	m	am1	am2	....	amj	....	amn

باعتبار أن اللاّعبA هو لاعب الأرباح و اللاّعب الثاني هو لاعب الخسائر و أن aij في المصفوفة السابقة تعبر عن :

. ربحA فيما إذا كانت $aij> 0$ و تعبر عن خسارته فيما إذا كانت $aij< 0$.

. خسارةB فيما إذا كانت $aij> 0$ و تعبر عن ربحه فيما إذا كانت $aij< 0$.

للتوضيح نأخذ المثال التالي :

اشترك اللاّعبان A و B في مباراة معينة ، اللاّعب A لديه ثلاث استراتيجيات L,M,K و اللاّعب B لديه استراتيجيتين P,Q و كان العائد كالآتي :

الاختيار	العائد
L,P	A يدفع الى B ثلاث وحدات نقدية.
L,Q	B يدفع الى A ثلاث وحدات نقدية.
M,P	A يدفع الى B وحدتين نقديتين.
M,Q	B يدفع الى A أربع وحدات نقدية.
N,P	B يدفع الى A وحدتين نقديتين.
N,Q	B يدفع الى A ثلاث وحدات نقدية.

مصفوفة المباراة (العائد) تكون كالاتي:

استراتيجيات اللاعب A		استراتيجيات اللاعب B	
		P	Q
	L	-3	3
	M	-2	4
	N	2	3

تبيّن المصفوفة أعلاه ربح و خسارة كل من اللاّعبين A و B عند إستخدامه لأية إستراتيجية ، حيث تمثل القيم الموجبة ارباح اللاّعب A و خسائر اللاّعب B و تمثل القيم السالبة ارباح اللاّعب B و خسائر اللاّعب A . تسمّى هذه المصفوفة بمصفوفة العائد و هي في هذا المثال 3*2 و تسمى أيضا مباراة (3*2) .

الإستراتيجيات المطبقة في نظرية الألعاب و طرق حلــها

الإستراتيجية الخالصة و نقطة الإستقرار و التوازن

الإستراتيجية الخالصة هي الإستراتيجية التي يلجأ إليها اللاّعب في كلّ وقت وبصرف النظر عن الإستراتيجية التي يتخذها اللاّعب الآخر ، و نقطة التوازن هي النتيجة التي يحصل عليها كلّ لاعب يمارس الإستراتيجية الخالصة .

مثـــال

توضّح المصفوفة التالية مباراة بين شخصين ، حيث هناك بديلين متاحين لكلّ من الطرفين اللاّعب الأول و اللاّعب الثاني

الإستراتيجيات	**Y1**	**Y2**	**MIN**
X1	1	2	1
X2	5	3	**3**
MAX	5	**3**	

MaxMin = MinMax = 3

الإستراتيجية المهيمنة

في حالة المصفوفات ذات الأبعاد الكبيرة و في حالة كون المباراة لا تحتوي على نقطة استقرار نستطيع تحت ظروف معينة أن نختصر حجم المصفوفة المعطاة إلى حجم أصغر بأسلوب الهيمنة

1–قواعد الهيمنة :

* إذا كانت جميع العناصر في الصفH أصغر أو مساوية للعناصر المقابلة لها في الصف الآخرI فإن الصف Hمهيمن عليه و يمكن حذفه.

* إذا كانت جميع العناصر في أحد الأعمدةK أكبر أو مساوية للعناصر المقابلة لها في عمود آخر J فإن العمود Kمهيمن عليه و يمكن حذفه.

* يمكن حذف أكثر من عمود أو أكثر من صف مهيمن عليه و جعل مصفوفة الحل في أبسط صورها .

نلاحظ أن عملية حذف الصفوف و الأعمدة لا تؤثر على قيمة المباراة سواءا كانت مستقرة أو غير مستقرة .

2-حل الألعاب الإستراتيجية بطريقة السيطرة أو التحكم :

إن مبدأ الألعاب بطريقة السيطرة قائم على إمكانية تصغير حجم اللعبة بإلغاء الإستراتيجيات المسيطر عليها من قبل استراتيجيات أخرى حيث تكون عناصر هذه الإستراتيجيات أصغر أو تساوي عناصر الإستراتيجيات المسيطرة .

مثال : لتكن لدينا المباراة التالية

		اللاعب B	
		Y1	Y2
	X1	4	3
اللاعبA	X2	2	20
	X3	1	1

	Y1	Y2
X1	4	3
X2	2	20

الإستراتيجية المختلطة

في بعض المباريات لا يمكن التوصل إلى حل مثالي مباشرة للعبة ،أي لا تحتوي على نقطة استقرار بمعنى آخر أن اللاعبين لا يمكنهم اختيار احدى الخطط كاستراتيجية مثالية و في هذه الحالة فإن لكل لاعب عدد من الإستراتيجيات المختلطة حيث يقوم اللاعب باتخاذ الإستراتيجيات بنسب محددة « **Maxi-min #Mini-max** »

و فيما يلي سنتطرق إلى كيفية حل المباراة في حالة الإستراتيجيات المختلطة .

1–طرق حل المباراة في حالة الإستراتيجيات المختلطة :

من الممكن حل المباراة في حالة الإستراتيجيات المختلطة باستخدام إحدى الطرق الآتية :

الطريقة الجبرية – الطريقة الحسابية – الطريقة البيانية –طريقة البرمجة الخطية .

1.1 – الطريقة الجبرية :

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين و كل لاعب له إستراتيجيتين أي عندما تكون مصفوفة المباراة بحجم(2 *2) فقط .

و لتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي :

لو فرضنا أن مصفوفة العائد هي :

	Q1	Q2
P1	4	10
P2	5	2

وبفرض أن اختيار اللاعب A للإستراتيجية الأولى هو باحتمال P1 و الإستراتيجية الثانية باحتمال P2 حيث :

P1 :هي نسبة عدد المرات اللتي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الأولى .

P2 :هي نسبة عدد المرات اللتي سيلعب بها اللاعب A الإستراتيجية الثانية .

وعلى فرض أن : $P1 + P2 = 1$ ومنه : $P2 = 1 - P1$.

نفرض B سيلعب الإستراتيجية الأولى باحتمال Q1 و الإستراتيجية الثانية باحتمال Q2 حيث:

Q1 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الأولى .

$Q2$: هي نسبة عدد المرات اللتي سيلعب بها اللاعب B الإستراتيجية الثانية.

و على فرض أن : $Q1+Q2=1$ ومنه $Q2=1-Q1$.

يتم إيجاد الإستراتيجيات للاعب A من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E(A/B=1) = 4P1+5P1$$

$$E(A/B=2) = 10P1+2P2$$

$$E(A/B=1)=E(A/B=2) \quad 4P1+5P1 = 10P1+2P2$$

$$\Rightarrow \quad 6P1-3P2=0$$

$$\Rightarrow \quad 6P1-3(1-P1)= 0$$

$$\Rightarrow \quad 6P1-3-3P1=0$$

$$\Rightarrow \quad 9P1-3= 0$$

$$\Rightarrow \quad P1= 3/9 \quad P1= 1/3$$

$$P2= 1-P1 \quad P2= 1-3/9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P2= 6/9 \quad P2=2/3$$

$\Rightarrow$ أي أن A سيلعب الإستراتيجية الأولى بـ 1/3

من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بـ2/3 من الوقت المخصص اللاعب للعب.

يتم ايجاد الإستراتيجيات للاعب B من الصيغ الرياضية الآتية:

$E(B/A=1) = 4Q1+10Q2$

$E(B/A=2) = 5Q1+2Q2$

$E(B/A=1) = E(B/A=2) \Rightarrow 4Q1+10Q2 = 5Q1+2Q2$

$\Rightarrow 5Q1-4Q1+2Q2-10Q2= 0$

$\Rightarrow Q1-8Q2= 0$

$\Rightarrow Q1-8(1-Q1)= 0$

$\Rightarrow Q1-8+8Q1= 0$

$\Rightarrow 9Q1-8= 0$

$\Rightarrow Q1= 8/9$

$Q2= 1-Q1 \Rightarrow Q2= 1-8/9$

$\Rightarrow Q2= 1/9$

أي أن B سيلعب الإستراتيجية الأولى بـ 8/9

من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بـ1/9 من الوقت المخصص اللاعب للعب.

أما قيمة اللعبة V فيتم استخراجها بتعويض قيم P_i و Q_i في احدى الصيغ الأربعة $\Rightarrow$

$V= 4P1+5P2 \Rightarrow V= 4(1/3)+5(2/3)$

$V= 14/3$

1-2 الطريقة الحسابية:

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين و كل لاعب له إستراتيجيتين أي عندما تكون و مصفوفة المباراة بحجم(2 *2) فقط .

لتوضيح هذه الطريقة نستعين بنفس المثال السابق
:

	Q1	Q2
P1	4	10
P2	5	2

بعد التأكد من أن المباراة غير مستقرة يتم حل مصفوفة المباراة باستخدام الطريقة الحسابية وفقا للخطوات التالية :

*نستخرج الفرق بين العددين في الصف الأول و نضع القيمة المطلقة للفرق أمام الصف الثاني.

* نستخرج الفرق بين العددين في الصف الثاني و نضع القيمة المطلقة للفرق أمام الصف الأول.

* نستخرج الفرق بين العددين في العمود الأول و نضع القيمة المطلقة للفرق أمام العمود الثاني.

* نستخرج الفرق بين العددين في العمود الثاني و نضع القيمة المطلقة للفرق أمام العمود الأول.

4	10	3/9
5	2	6/9
8/9	1/9	

يتضح من النتائج التي حصلنا عليها أن اللاعبA سوف يستخدم إستراتيجيتيه 9 مرات حيث يلعب الإستراتيجية الأولى 3 مرات والإستراتيجية الثانية 6 مرات .

أي أنه سيلعب الإستراتيجية الأولى بنسبة 3/9 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بنسبة 6/9 من الوقت المخصص للعب.

أما اللاعب Bفسوف يستخدم إستراتيجيتيه 9 مرات

حيث يلعب الإستراتيجية الأولى 8 مرات والإستراتيجية الثانية مرة واحدة .

أي أنه سيلعب الإستراتيجية الأولى بنسبة 8/9 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الإستراتيجية الثانية بنسبة 1/9 من الوقت المخصص للعب.

أما قيمة اللعبة فهي كالآتي :

$$V= 4(8/9) + 10(1/9) \Rightarrow V = 42/9 \Rightarrow V = 14/3$$

أي أن اللعبة يتم الحصول عليها بضرب العائد الذي يحصل عليه اللاعب A في حالة اختياره الإستراتيجية الأولى في عدد المرات التي يلعب بها اللاعب B

في حالة اختياره الإستراتيجية الأولى مضاف إليها العائد الذي يحصل عليه اللاعب B الإستراتيجية الأولى في عدد المرات التي يلعب بها الإستراتيجية الثانية مقسوما على قيمة اللاعب اللعبة.

1-3 الطريقة البيانية:

تستخدم هذه الطريقة فقط إذا كان لأحد اللاعبين إستراتيجيتين فقط أي عندما تكون (مصفوفة (N*2)و عند عدم وجود حالة استقرار و عدم إمكانية تقليص المباراة من نوع(2*N)أو

المباراة إلى درجة أدنى حتى نتمكن من حلها بالطريقة الجبرية او الطريقة الحسابية . لذلك نقوم بحلها بالطريقة البيانية بإتباع الخطوات التالية :

*يتم وضع محورين شاقوليين يمثل أحدهما a_1 و الثاني a_2 ، و يربط بينهما محور أفقي يمثل احتمالات A التي يرمز لها بـ P.

تحديد قيم b_1 على a_1 وa_2 ورسم المستقيم (b_1) ثم يتم قيم b_2
*

على a_1 وa_2 ورسم المستقيم (b_2) ،و هكذا
حتى الإستراتيجية الأخيرة بالنسبة للاعب B .
*فتكون نقطة تقاطع m هي التي تحقق التوازن و من معادلة التوازن و معادلة مجموع الاحتمالات $P1+P2=1$ نجد احتمالات P1 و P2 و حساب قيمة V.

ملاحظة:

إن الغلاف الأدنى للتمتيل البياني يمثل ربح A و بالتالي نختار أعلى نقطة عليه **Maxi-min**, أما اللاعب
عوائد B فتمثل في الغلاف العلوي و بالتالي نختار أدنى نقطة عليه **Mini-max**.

مثال:

افترضنا أن المباراة الآتية (3* 2) بين شركتين A و B .
إذا علمت أن مصفوفة العائد هي كالآتي :

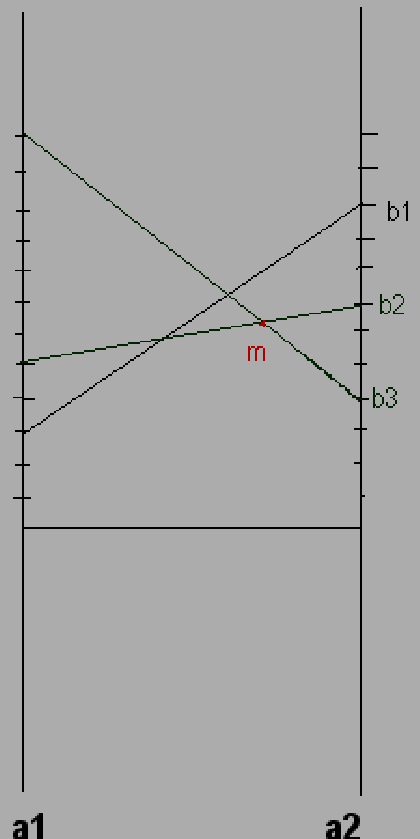
	Q1	Q2	Q3
P1	3	5	12
P2	10	7	4

الحل:

بالنسبة للاعب A:

نقطة التقاطع m:

$(b_2)\cap(b_3)$



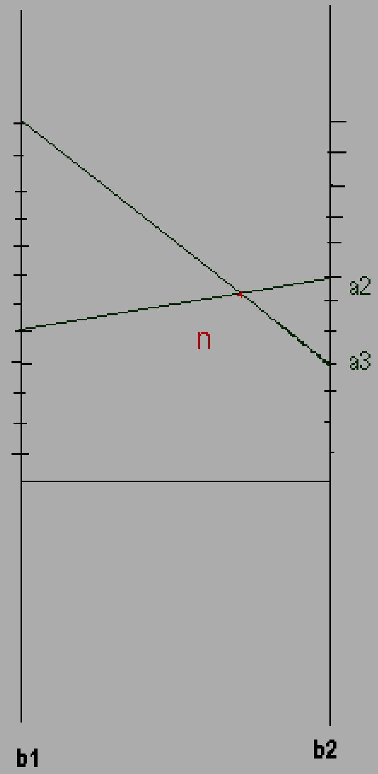
$5P1+7P2= 12P1+4P2$

- $7P1-3P2= 0$
- $7P1-3+3P2= 0$
- $10P1-3= 0$
- $P1= 3/10$

$P2= 1-P1 \Rightarrow P2= 1-3/10$

- $P2= 7/10$

بالنسبة للاعب B:



$12Q3+5Q2= 7Q2+4Q3$

- $\Rightarrow 8Q3-2Q2= 0$
- $\Rightarrow 8Q3-2+2Q3= 0$
- $\Rightarrow 10Q3= 2$
- $\Rightarrow Q3= 2/10 \Rightarrow Q3= 1/5$

$Q2= 1-Q3 \Rightarrow Q2= 1-1/5$

$\Rightarrow Q2= 4/5$

4- طريقة البرمجة الخطية:تستخدم هذه الطريقة في جميع المباريات ذات المجموع الصفري بين لاعبين و خاصة تلك التي عند عدم وجود نقطة استقرار و عدم إمكانية تقليص المباراة إلى درجة أدنى حتى نتمكن من حلها بالطرق السابقة حيث تكون من نوع (M,N>2). حيث تقدم البرمجة الخطية أفضل حل لهذه المشاكل .

-تحويل نظرية الألعاب إلى برمجة خطية :

*مصفوفة الدفع لمصفوفة ذات مجموع صفري :

			B		
	الإستراتيجية	1	2	J……… …….	n
	1	a11	a12	a1j	a1n
	2	a21	a22	a2j	a2n
A	i	ai1	ai2	aij	ain
	. . .				
	m	am1	am2	amj	amn

* الصياغة الرياضية للبرنامج :

. بالنسبة للاعب A :

نرفق احتمالات $x1,x2,x3.......xn$ للاستراتيجيات $1,2,3.....m$

و التي تدل على احتمالية اتباع استراتيجية بحيث يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} xi =1 , xi\geq 0$$

العائد A عندما يلعب

المتوقع للاعب

اللاعب B الاستراتيجية الأولى :

$$a11x1+a21x2+......+ai1xi+am1xm\geq V$$

العائد المتوقع للاعب A عندما يلعب

اللاعبB الاستراتيجية الثانية :

$$a12x1+a22x2+......+ai2xi+am\ 2xm\geq V$$

و هكذا بالنسبة لباقي القيود.

بمعنى آخر فإنّ العائد المتوقع للآّعب A عندما يلعب B الإستراتيجية j يكتب كالتالي :

$$\Sigma aij.xj \geq V \quad / \; j=1, \ldots, n$$

و تكون غاية اللآّعب الأول جعل العائد المتوقع أكبر ما يمكن

$$z=V \longrightarrow Max$$

$$\begin{cases} \sum aij.xi \geq V \\ \Sigma xi = 1 \\ xij \geq 0 \end{cases}$$

و هو برنامج خطي يمكن حلّه عن طريق إجراء بعض التعديلات لتحويله إلى شكل قانوني لنموذج خطي ، نقسم القيود على قيمة العائد للحصول على طرف حرّ بحيث يكون V أكبر ما يمكن .

$a11.x1/V + a21.x2/V + \ldots + am1.xm/V \geq 1$

$a21.x1/V + a22.x2/V + \ldots + am2.xm/V \geq 1$

$\vdots$

$a1m.x1/V + a2m.x2/V + \ldots + amn.xm/V \geq 1$

$x1/V + x2/V + \ldots + xm/V = 1/V$

$Z = 1/V$ $Xi = xi/V$

بحيث لدينا اللاّعب A يبحث عن تعظيم قيمة اللعبة V

$\text{Max } z = \text{Min } Z$

$= \text{Min } 1/V$

دالة الهدف :

$\text{Min } (X1 + X2 + \ldots + Xm) = \text{Min} \sum_{i=1}^{m} Xi$

البرنامج الخطي للاّعبA :

$$\text{Min } Z = \text{Min}\,(X1+X2+ \dots + Xm)$$

$$s/c \quad \left\{ \begin{array}{l} a11.X1 + a21.x2 + \dots + am1.Xm \geq 1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a1n.X1 + a2n.X2 + \dots + amn.Xm \geq 1 \\ Xi \geq 0 \end{array} \right.$$

$$Xi = xi/V \Rightarrow xi = Xi.V$$

$$V = 1/Z \Rightarrow xi = Xi/V$$

إذا كانت قيمة$V \leq 0$ فإنّ عملية القسمة تغير من إتجاه المتباينات و لحلّ هذا المشكل نقوم بإضافة ثابت موجب**K** إلى جميع عناصر مصفوفة اللّعبة بحيث نضمن أنّ قيمة اللّعبة تكون أكبر من الصفر و بعد الحصول على الحلّ الأمثل نطرح من قيمة اللّعبة قيمة هذا الثابت و بذلك نحصل على القيمة الحقيقية للّعبة .

K=القيمة المطلقة لأصغر عنصر سالب مضاف إليه واحد .

بالنّسبة للاّعب **B** نرفق الإحتمالات من **y1** إلى **yn** للإستراتيجيات من **1** إلى **n** على التوالي و التي تدلّ على إحتمالية إنتهاج كلّ إستراتيجية بحيث يكون مجموع الإحتمالات يساوي **1**

الخسائر المتوقعة للاّعب**B** في حالة تبنيه اللاّعب **A** للإستراتيجية **i** هي :

$$\sum_{j=1}^{n} aij.\mathrm{yj} < V$$

تكون غاية اللاّعب**B** جعل الخسائر المتوقعة أقل ما يمكن :

$$z = V \longrightarrow \mathrm{Min}$$

$Z=1/V$ $\quad\quad\quad\quad$ $Y_i=y_i/V$

$\text{Min } z = \text{Max } Z$

$1/V = y_1/V + y_2/V + \dots + Y_n/V$

البرنامج الخطي للاّعبB :

$\text{Max } Z = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

$$
\begin{cases}
a_{11}.Y_1 + a_{12}.Y_2 + \dots + a_{1n}.Y_n \leq 1 \\
a_{21}.Y_1 + a_{22}.Y_2 + \dots + a_{2n}.Y_n \leq 1 \\
\vdots \\
a_{m1}.Y_1 + a_{m2}.Y_2 + \dots + a_{mn}.Y_n \leq 1 \\
Y_i \geq 0
\end{cases}
$$

البرنامج الخطي للاّعب A هو البرنامج المرافق للاّعب B