محاضرة الفائدة المركبة (تابع)

I. الحالات الخاصة لإيجاد الجملة بفائدة مركبة

1. إذا كان n عدد غير صحيح (كسر)

أي عندما تكون المدة جزء من السنة، فيمكن الحصول على الجملة بإحدى الطرق التالية:

مثال 1: أوجد جملة مبلغ 5000 دج وظف بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا لمدة 4 سنوات و 7 أشهر و 10 أيام.

الحل:

أولا: باستخدام طريقة الفائدة البسيطة (الطريقة العقلانية)

تتضمن هذه الطريقة تطبيق قانون الفائدة المركبة لحساب جملة المبلغ الموظف للفترات الزمنية الصحيحة (المدة بالسنوات) ثم الاضافة إليها فائدة هذه الجملة المحسوبة للفترة الأقل من سنة بتطبيق علاقة الفائدة البسيطة وذلك كما يلي:

$$V=C(1+t)^n+C(1+t)^n\times t\times\frac{m}{360}$$

$$V=C(1+t)^n\left[1+t\times\frac{m}{360}\right]$$

حيث : m تمثل عدد أيام التوظيف بعد نهاية السنوات الصحيحة، وفي المثال السابق (المثال رقم 9) هي عدد الأيام بعد نهاية السنة السادسة أي 7 أشهر و 10 أيام = 220 يوم وبتطبيق العلاقة السابقة نجد:

$$V=5000(1+0.06)^4\left[1+0.06\times\frac{220}{360}\right]$$

$$V=6543.83\,DA$$

ثانيا: باستخدام الجدول الملحق

في هذه الحالة يتم تطبيق الفائدة المركبة بالنسبة للمدة سواء كانت صحيحة او عبارة عن كسر ويتم تطبيق القانون التالي:

$$V=C(1+t)^{n+\alpha}=C(1+t)^n(1+t)^\alpha$$

مثال 2: أحسب جملة مبلغ 40000 دج وظف بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا لمدة 5 سنوات و 7 أشهر.

$$V=C(1+t)^n(1+t)^\alpha=40000(1+0.06)^5(1+0.06)^{7/12}$$

يتم الحصول على قيمة $(1+0.06)^5$ من الجدول المالي رقم 1 = 1.338226

ويتم الحصول على قيمة $(1+0.06)^{7/12}$ من الجدول المالي رقم 6 (الجدول الملحق) = 1.034470

$$V=40000\times1.338226\times1.034470=55374.18\,DA$$

ثالثا: باستخدام طريقة التناسب

تقوم هذه الطريقة على ايجاد جملة دينار واحد والمقابل لمعدل الفائدة المعطى للفترتين الزمنيتين التي تقع في نطاقها مدة التوظيف الفعلية (n و $n+1$)، ثم يتم حساب الفرق بينهما وضرب الحاصل في قيمة الكسر الذي يمثل مدة التوظيف بعد السنة n أي $\frac{m}{360}$ ، ثم تضاف هذه النتيجة لمعامل الفائدة المركبة الخاص بالسنة n ، ليضرب هذا الناتج في أصل المبلغ لنحصل على الجملة. ويمكن بيان ذلك عمليا بالتطبيق على المثال رقم 10 .

- حساب الفرق

$$(1+t)^{n+1}=(1.06)^5=1.338226$$
$$(1+t)^n=(1.06)^4=1.262477$$
$$\Delta=0.075749$$

- ضرب الفرق في الكسر $\left(\frac{m}{360}=\frac{220}{360}\right)$ الذي يمثل عدد أيام التوظيف في السنة 5:

$$\frac{m}{360}\times\Delta=\frac{220}{360}\times0.075749=0.046291$$

- جمع الحاصل مع معامل الفائدة المركبة الخاص بالسنة 4:

$$(1.06)^5+0.046291=1.338226+0.046291=1.384517$$

- حساب الجملة:

$$V=5000\times1.384517=6922.585$$
$$V=6922.585\,DA$$

2.4 حالة عدم وجود المعدل بالجدول المالي

يمكن تقسيم الحالات التي يكون فيها معدل الفائدة موجودا بالجدول المالي رقم 1 إلى قسمين:

- إذا كان أقل أو اكبر من نطاق الجدول $]25\%,1.5[$
- إذا كان داخل نطاق الجدول لكن قيمته غير مدرجة بالجدول وإنما تقع بين معدلين.

ومهما كانت الحالة فإنه يمكن إعتماد طريقة التناسب في حل هذا الإشكال، ويمكن بيان ذلك من خلال المثال التالي:

مثال 3: ما هي جملة مبلغ 2000 دج بمعدل فائدة مركبة 5.2 % سنويا لمدة 8 سنوات.

الحل: حساب قيمة Δ

$$V=2000(1+0.052)^8$$

باستخدام الجدول المالي وبتطبيق قواعد النسب والتناسب نجد أن معدل 5.2% يقع بين معدل 5% و 5.25%.

$$(1.0525)^{8}=1.505833$$
$$(1.05)^{8}=1.477455$$
$$\Delta=0.028378$$

إن قيمة Δ تمثل الفرق الذي يقابل 0.25% .

والقيمة التي تقابل 0.2 % نرمز لها بالرمز x .

$$\begin{cases} 0.028378 \rightarrow 0.25 \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 0.2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{0.028378\times 0.2}{0.25}=0.0227024$$

وعليه لإيجاد معامل الفائدة المركبة المقابل لمعدل 5.2% نجد المعامل المقابل لـــ 5% والمعامل x المقابل لـــ 0.2%.

$$(1+0.052)^{8}=(1+0.05)^{8}+x=1.477455+0.0227024=1.5001574$$

وبضرب هذا الأخير في أصل المبلغ نحصل على الجملة:

$$V=2000\times 1.5001574=3000.31$$

مثال 4: أوجد جملة قرض قيمته 2400 دج وظف بمعدل 4.9% لكل 6 أشهر لمدة 6 سنوات

الحل: وحدات الزمن يجب أن تكون متطابقة مع المعدل وعليه نجد أن المدة 12 سداسي : $n=6\times 2=12$

$$V=2400(1+0.049)^{12}$$

بالرجوع للجدول المالي رقم (1) وبتطبيق قواعد النسب والتناسب نجد أن معدل 4.9% يقع بين معدل 4.75% و 5% .

$$(1.05)^{12}=1.795856$$
$$(1.0475)^{12}=1.745213$$
$$\Delta=0.050643$$

إن قيمة تمثل الفرق الذي يقابل 0.25% .

والقيمة التي تقابل 0.15% نرمز لها بالرمز x .

$$\begin{cases} 0.050643 \rightarrow 0.25 \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow 0.15 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{0.050643\times 0.15}{0.25}=0.0303858$$

وعليه لإيجاد معامل الفائدة المركبة المقابل لمعدل 4.9% نجد المعامل المقابل لـــ 4% والمعامل x المقابل لـــ 0.15%.

$$(1+0.049)^{12}=(1+0.0475)^{12}+x=1.745213+0.0303858=1.7755988$$

وبضرب هذا الأخير في أصل المبلغ نحصل على الجملة:

$$V=2400\times 1.7755988=4261.43$$

II. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة

غالبا ما يحدد معدل الفائدة سنويا، ولكن من الممكن أن تطبق معدلات الفائدة يوميا أو شهريا أو فصليا، أو سداسيا، لذلك هناك طريقة للتعبير عن معدل الفائدة لأقل من سنة سواء عن طريق المعدلات المتناسبة (الاسمية) أو المعدلات المتكافئة (الحقيقية).

1.2 المعدلات المتناسبة Taux Proportionnels

إذا كانت الفائدة تضاف في نهاية فترات زمنية تقل عن السنة، وتم تحديد معدل الفائدة عن نفس الفترة إضافة الفائدة، فالمعدل المتناسب في هذه الحالة عبارة عن "حاصل ضرب المعدل عن الفترة الزمنية في عدد الفترات الزمنية الموجودة في سنة كاملة".

ويكون المعدل t_k متناسبا مع المعدل السنوي t_a إذا كان حاصل قسمة المعدل السنوي على عدد مرات الرسملة k يساوي المعدل t_k ، حيث يجسب المعدل المتناسب وفق المعادلة التالية:

$$t_k=\frac{t}{k}$$

حيث k : تمثل عدد مرات التوظيف خلال السنة الواحدة.

مثلا: معدل 18% تقابله المعدلات المتناسبة التالية:

- المعدل السداسي: $$t_k=t_2=t_s=\frac{18}{2}=9$$
- المعدل الثلاثي: $$t_k=t_4=t_t=\frac{18}{4}=4.5$$
- المعدل الشهري: $$t_k=t_{12}=t_m=\frac{18}{12}=1.5$$

ملاحظة: عند حساب الفائدة البسيطة باستعمال معدلين متناسبين بالنسبة لمبلغ معين ولمدة محددة فإنهما ينتجان نفس القيمة المكتسبة.

2.2 المعدلات المتكافئة Taux équivalents

عادة ما يذكر معدل الفائدة عن السنة، كأن يقال أن الفائدة تضاف في نهاية كل سنة بمعدل 8%، وفي مثل هذه الحالة فإن المعدل المكافئ السنوي هو 8%، وأيضا المعدل المتناسب السنوي هو 8% .

لكن الاختلاف يظهر عندما يذكر أن الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر (أو كل ستة أشهر أو كل شهر) بمعدل فائدة 3.5% عن كل فترة زمنية، في مثل هذه الحالة نجد أن المعدل المتناسب 14% (3.5%× 4) لكن المعدل المكافئ يختلف عن المعدل المتناسب، أي لا يساوي 14% ، وذلك لأن المعدل المكافئ يعرف بأنه: مقدار الفائدة عن الوحدة النقدية لمدة سنة واحدة على أساس أن الفائدة التي تستحق في نهاية كل فترة زمنية تضاف إلى رأس المال بمجرد استحقاقها وتستثمر بنفس شروط استثمار رأس المال الأصلي".

فالمعدلات المتكافئة أو المتعادلة هي عكس المعدلات المتناسبة، إذ تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة. فنقول عن معدلين أنهما متكافئان إذا اختلفا في قيمتهما وفي فترة رسملتهما، لكنهما ينتجان نفس الجملة المكتسبة لأي فترة زمنية مشتركة محددة. فالمعدل السنوي t_a الخاص بالرسملة السنوية يكون مكافئا لمعدل سداسي ($t_2=t_s$ برسملة نصف سنوية إذا أنتجا نفس الجملة لنفس المدة. ويمكن استنتاج الصيغة العامة للمعدل المكافئ كما يلي:

$$C(1+t)^n=C(1+t_k)^{nk}$$

حيث:

t_k : معدل التوظيف لمدة أقل من سنة.

nk : عدد فترات التوظيف (الرسملة).

من خلال العلاقة السابقة يمكن استخلاص علاقة المعدل المكافئ t_k :

$$C(1+t)^{\frac{n}{n}}=C(1+t_k)^{\frac{nk}{n}}$$
$$\Rightarrow(1+t)=(1+t_k)^k$$
$$\Rightarrow(1+t)^{\frac{1}{k}}=(1+t_k)$$
$$t_k=(1+t)^{\frac{1}{k}}-1$$

مثال 5: استثمر شخص مبلغ 2000 دج بمعدل فائدة سداسي 6% .

المطلوب:

1. ايجاد الجملة والفائدة المركبة في نهاية سنة واحدة.
2. ايجاد معدل الفائدة المتناسب.
3. ايجاد معدل الفائدة (المكافئ).

الحل:

1.حساب الجملة والفائدة المركبة

$$V=C(1+t_s)^{n_s}=2000(1+0.06)^2$$
$$V=2247.2\,DA$$
$$I=V-C=2247.2-2000$$
$$I=247.2\,DA$$

2.ايجاد معدل الفائدة السنوي المتناسب

$$t_a=t_s\times2=6\times2=12$$

3.ايجاد معدل الفائدة السنوي المكافئ

$$(1+t_a)=(1+t_s)^2\Rightarrow t_a=(1+t_s)^2-1$$
$$t_a=(1+0.06)^2-1=0.1236$$
$$t_a=12.36$$

مثال 6: أحسب المعدل السداسي المكافئ للمعدل السنوي 9.5%

الحل: لدينا : $k=2$

$$t_k=(1+t)^{\frac{1}{k}}-1$$

$$t_2=(1+0.095)^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{1.095}-1$$

$$t_2=4.6422$$

مثال 7: أحسب المعدل الشهري المكافئ للمعدل السنوي 16% .

لدينا : $k=12$

$$t_k=(1+t)^{\frac{1}{k}}-1$$

$$t_{12}=(1+0.16)^{\frac{1}{12}}-1=\sqrt[12]{1.16}-1$$

$$t_{12}=1.2445$$

III. القيمة الحالية

تتمثل عملية التحيين في ايجاد القيمة الحالية، أي القيمة المقابلة في بداية الفترة لمبلغ نقدي يتوقع أنه يستحق الدفع مستقبلا آخذين بعين الاعتبار معدل الفائدة الساري المفعول. وعليه فإن عملية التحيين هي عملية معاكسة تماما لعملية **الرسملة**.

ويمكن تعريف القيمة الحالية بأنها : "القيمة التي لو استثمرت بفائدة مركبة للمدة الباقية حتى تاريخ الاستحقاق الأصلي، فإنها تؤول إلى القيمة الاسمية لدين أو لورقة تجارية".

أو بعبارة أخرى تعرف القيمة الحالية بأنها"الأصل الذي لو استثمر بنفس معدل الفائدة المركبة تصبح جملته في ذلك التاريخ المحدد في المستقل مساوية للمبلغ المستحق في ذلك التاريخ".

ويسمى الفرق بين القيمة الاسمية المستحقة في المستقبل وقيمتها الحالية بالخصم المركب.

ويمكن استخراج القيمة الحالية على أساس الفائدة المركبة كما يلي :

$$V_n=C(1+t)^n=V_n=V_a(1+t)^n$$

$$\Rightarrow V_a=\frac{V_n}{(1+t)^n}$$

$$V_a=V_n(1+t)^{-n}.........(1)$$

ويتم استعمال الجدول المالي رقم 2 من أجل استخراج قيمة $(1+t)^{-n}$.

وفي حالة وجود مصاريف أخرى فإن القيمة الحالية تحسب كما يلي:

مثال 8: تاجر مدين بملغ 5400 دج تستحق في نهاية 5 سنوات، أوجد القيمة الحالية لهذا الدين، إذا ما تم احتساب فائدة مركبة بمعدل 3.5 % سنويا.

الحل:

* حساب القيمة الحالية:

$$V_a = V_n(1+t)^{-n}$$
$$V_a = V_n(1+t)^{-n} = 5400(1+0.035)^{-5}$$
$$V_a = 5400 \times 0.841973 = 4546.65\,DA$$

مثال 9: سند قيمته الاسمية 400000 دج يستحق السداد بعد 8 سنوات، وقد وجد أن قيمته الحالية بمعدل فائدة مركب سنوي معين هي 173570.4 دج. أحسب معدل الخصم المستخدم.

$$V_a = V_n(1+t)^{-n}$$
$$(1+t)^{-n} = \frac{V_a}{V_n} \Rightarrow (1+t)^{-8} = \frac{173570.4}{400000}$$
$$(1+t)^{-8} = 0.433926$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 2 عند المدة 8 سنوات والقيمة 0.433926 نجد أن المعدل الفائدة =11% .

IV. الخصم المركب (الخصم الصحيح)

في حالة الفائدة المركبة فإن الخصم يحسب دائما على أساس **خصم صحيح** أو حقيقي بدلا من الخصم التجاري، ويعرف الخصم المركب بأنه " المقابل الذي يخصمه المدين أو (البنك) في نظير سداد قيمة الدين أو (قيمة الورقة التجارية) قبل ميعاد الاستحقاق الأصلي".

أي:

القيمة الحالية = القيمة الاسمية (الجملة) - الخصم المركب

الخصم المركب = القيمة الاسمية -القيمة الحالية

ويمكن استخلاص قانون للخصم المركب كما يلي:

$$E = V_n - V_a$$
$$E = V_n - V_n(1+t)^{-n}$$
$$E = V_n\left[1-(1+t)^{-n}\right]......................2$$

مثال 10: سند قيمته الاسمية تقدر بـــ 7000 دج يستحق السداد بعد 6 سنوات، فإذا كان معدل الفائدة المركبة 5% سنويا، فما هي قيمة الخصم الذي يحصل عليه المدين؟

الحل: حساب الخصم المركب:

$$E = V_n\left[1-(1+t)^{-n}\right] = 7000\left[1-(1+0.05)^{-6}\right] == 7000(1-0.746215)$$
$$E = 7000 \times 0.253785$$
$$E = 1776.495\,DA$$

مثال 11: تاجر مدين بملغ 12300 دج تستحق في نهاية 7 سنوات، أوجد القيمة الحالية لهذا الدين، إذا ما تم احتساب فائدة مركبة بمعدل 4 % سنويا، ثم أوجد قيمة الخصم المركب.

الحل:

* حساب القيمة الحالية:

$$V_a = V_n(1+t)^{-n} = 12300(1+0.04)^{-7}$$
$$V_a = 12300 \times 0.759918 = 9347\,DA$$

* حساب قيمة الخصم المركب:

$$E = V_n - V_a$$
$$E = 12300 - 9347$$
$$E = 2953\,DA$$

مثال 12: دين قيمته الاسمية 30000 دج يستحق السداد بعد 8 سنوات بمعدل فائدة مركب 6.5% سنويا، فكم يدفع المدين :

- إذا أراد دفع الدين الآن.
- إذا أراد دفع الدين بعد 3 سنوات من الآن.

الحل:

1. إذا أراد دفع الدين الآن:

في هذه الحالة يتم حساب القيمة الحالية قبل موعد الاستحقاق بـــ 8 سنوات و يكون ذلك كما يلي:

$$V_a = V_n(1+t)^{-8} = 30000(1+0.065)^{-8}$$
$$V_a = 30000 \times 0.604231 = 18126.93\,DA$$

2. إذا أراد دفع الدين بعد 3 سنوات فإن يمنح خصما لمدة 5 سنوات ويتم حساب ذلك كما يلي:

$$V_a = V_n(1+t)^{-5} = 30000(1+0.065)^{-5}$$
$$V_a = 30000 \times 0.729881 = 21896.43\,DA$$

V. تسوية واستبدال الديون الطويلة الأجل (بفائدة مركبة)

تعرف تسوية الديون بأنها: "استبدال دين أو عدة ديون قديمة بدين واحد جديد أو عدة ديون جديدة وذلك حسب طبيعة الاتفاق بين طرفين".

ونقول عن مبلغين ماليين انهما متكافئين إذا تم خصمهما بنفس معدل الفائدة المركبة وأعطيا نفس القيمة الحالية. ولن تختلف أسس وأشكال وظروف تسوية الديون الطويلة الأجل عن تلك التي تحكم تسوية واستبدال الديون القصيرة الأجل فيما عدا أن الأولى تتم على أساس فائدة مركبة بينما في الثانية ستتم على أساس فائدة بسيطة.

و**تكون الصورة العامة لمعادلة القيمة كما يلي:**

القيمة الحالية للديون الأصلية = القيمة الحالية للديون الجديدة

مثال 13:

تاجر مدين بالمبالغ الآتية:

6500 دج تستحق بعد 3 سنوات.

9000 دج تستحق بعد 5 سنوات
10500 دج تستحق بعد 6 سنوات .
يريد هذا التاجر استبدال الديون السابقة بدينين جديدين متساويين، يستحق الأول منهما بعد 4 سنوات و الثاني بعد 7 سنوات.
المطلوب: ايجاد قيمة كل من الدينين جديدين إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 9% سنويا.
الحل: مجموع القيم الحالية للديون القديمة في تاريخ التسوية = مجموع القيم الحالية للديون الجديدة
علما أن القيمة الاسمية للدينين الجديدين متساوية $V'_{n1}=V'_{n2}=V'_n$

$$\sum V_a=\sum V'_a$$

$$V_{a1}+V_{a2}+V_{a3}=V'_{a1}+V'_{a2}$$

$$V_{n1}(1+t)^{-n1}+V_{n2}(1+t)^{-n2}+V_{n3}(1+t)^{-n3}=V'_{n1}(1+t)^{-n'1}+V'_{n2}(1+t)^{-n'2}$$

$$6500(1+0.09)^{-3}+9000(1+0.09)^{-5}+10500(1+0.09)^{-6}=V'_n(1+0.09)^{-4}+V'_n(1+0.09)^{-7}$$

$$6500(1+0.09)^{-3}+9000(1+0.09)^{-5}+10500(1+0.09)^{-6}=V'_n\left[(1+0.09)^{-4}+(1+0.09)^{-7}\right]$$

$$17129.372=1.255459V'_n$$

$$V'_n=\frac{17129.372}{1.255459}=13643.91\,DA$$

وبالتالي:

$$V'_n=V'_{n1}=V'_{n2}=13643.91\,DA$$

محاضرة الدفعات الثابتة بفائدة مركبة

تمهيد:

يقصد بالدفعات المتساوية les Annuités مجموعة من المبالغ المتساوية تدفع دوريا على فترات متساوية من الزمن، والفترة التي تفصل بين كل مبلغين قد تكون سنوية أو نصف سنوية أو ربع سنوية أو أي فترة زمنية أخرى يتفق عليها، وفي حالة الدفعات المالية المتساوية والمستثمرة بفائدة مركبة نجد أن الفائدة تضاف إلى مبلغ الدفعة في نهاية كل فترة زمنية، وتحسب فائدة على المبلغ الجديد للدفعة خلال الفترة الزمنية وهكذا.

وتنقسم الدفعات إلى عدة أنواع حسب اعتبارات مختلفة ويمكن ايجازها في الأنواع التالية:

أولا: من حيث تأجيل بدء دفع مبالغها

وتنقسم إلى نوعين هما:

1. **دفعات عاجلة:** وهي الدفعات التي يستحق دفع أول مبلغ من مبالغها في الوحدة الزمنية التي تبدأ من الآن سواء أكانت دفعة فورية أو دفعة عادية .
2. **دفعات مؤجلة:** وهي التي يستحق سداد أول مبلغ من مبالغها بعد مدة زمنية معينة من تاريخ الاتفاق.

ثانيا: من حيث موعد استحقاق مبلغ الدفعة

هناك نوعين هما:

1. **دفعات نهاية المدة (الدفعات العادية، دفعات السداد) :** وهي التي يتم دفع مبلغ دفعتها في نهاية كل وحدة زمنية.
2. **دفعات بداية المدة (الدفعات الفورية، غير العادية، دفعات الاستثمار) :** وهي التي يتم دفع مبلغ دفعتها في بداية كل وحدة زمنية.

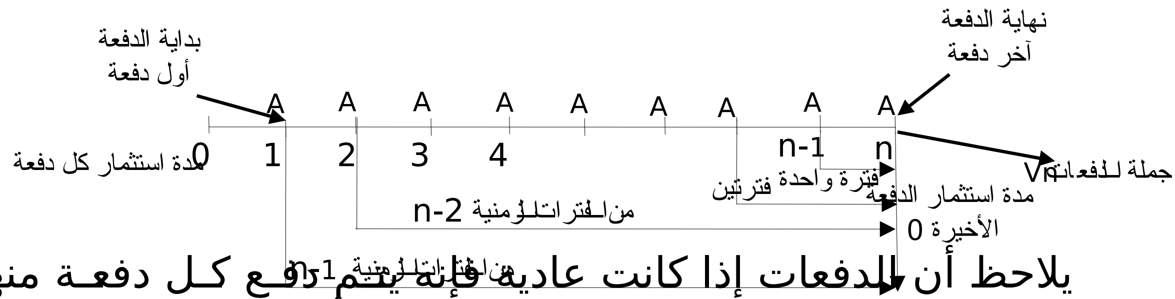
I. الدفعات الثابتة العادية (لآخر المدة أو دفعات السداد)

1.1 جملة الدفعات الثابتة لآخر المدة

في حالة الدفعات العادية فإن الجملة المركبة للدفعات تكون هي قيمة جملة الدفعات (شاملة مبلغ الدفعة الأخيرة منها) وذلك في تاريخ سداد تلك الدفعة الأخيرة وبعد سدادها مباشرة، وذلك لأن الدفعة الأخيرة تسدد في نهاية الوحدة الزمنية الأخيرة وهو تاريخ انتهاء مدة الدفعات العادية وهو أيضا التاريخ الذي تحسب فيه جملة تلك الدفعات.

أي أن جملة هذه الدفعات هو عبارة عن مجموع هذه الدفعات وفائدتها حتى نهاية مدة الدفعات مجتمعة.

فإذا رمزنا إلى معدل الفائدة بـ t ، وقيمة الدفعة A ، وأن عدد الدفعات (عدد الفترات الزمنية) n ، فإنه يمكن التعبير عن ما سبق بالشكل التالي:



يلاحظ أن الدفعات إذا كانت عادية فإنه يتم دفع كل دفعة منها في نهاية الوحدة الزمنية المناظرة، فالدفعة الأولى تدفع في نهاية السنة الأولى ومدة استثمارها هي $n-1$ ، والدفعة الثانية في نهاية السنة الثانية ومدة استثمارها هي $n-2$ إلى غاية الدفعة الأخيرة التي تدفع في نهاية مدة الدفعات ومدة استثمار تساوي 0 لأنها تدفع في نهاية المدة.

ويلاحظ أن مجموع جملة الدفعات مجتمعة تعبر عن متتالية هندسية تصاعدية حدها الأول A وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n . وبالتالي يكتب مجموعها في شكل الصيغة التالية:

$$V=A\left[1+(1+t)+(1+t)^2+(1+t)^3+\ldots.+(1+t)^{n-2}+(1+t)^{n-1}\right]$$

ويعبر عن مجموع المتتالية الهندسية بالعلاقة التالية:

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

حيث أن: a : تمثل الحد الأول للمتتالية الهندسية، و R : أساس المتتالية الهندسية.

وعليه فإن جملة دفعات متساوية عادية لآخر المدة تحسب وفق العلاقة التالية:

$$V=A\left[\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)-1}\right]$$

$$V=A\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ويمكن الاعتماد على الجدول المالي رقم 3 من أجل استخراج قيمة $\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]$.

مثال 1: يودع شخص مبلغ 2000 دج في نهاية كل سنة لمدة 7 سنوات في حساب بمعدل فائدة مركبة 9% ، أحسب الجملة المركبة المستحقة في نهاية المدة

الحل:

*** حساب جملة دفعات عادية عددها سبعة دفعات**

$$V = A\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right] = 2000\left[\frac{(1+0.09)^7-1}{0.09}\right]$$

$$V = 2000 \times 9.200435 = 18400.87\,DA$$

مثال 2: أوجد جملة دفعات عادية ربع سنوية مبلغها 1300دج ومدتها 4 سنوات ونصف بمعدل فائدة سنوي 14%.

الحل:

* **حساب الجملة**

لحساب الجملة يتم تحويل الفترات إلى ثلاثيـات و المعـدل إلـى معـدل ثلاثي (ربع سنوي).

عدد الدفعات = عدد الوحدات الزمنية الربع السنوية = 4.5× 4 =18 دفعة

معدل الفائدة الربع سنوي = 14÷ 4 =3.5 % .

$$V = A\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right] = 1300\left[\frac{(1+0.035)^{18}-1}{0.035}\right]$$

$$V = 1300 \times 24.499691 = 31849.6\,DA$$

حساب عناصر جملة دفعات آخر المدة

أولا: حساب قيمة الدفعة

مثال 3: بلغت جملة 8 دفعات عادية سنوية في نهاية المدة 40830.6 دج وذلك بمعدل فائدة مركبة 5.5% سنويا. فأوجد مبلغ الدفعة.

الحل:

***حساب قيمة الدفعة**

$$A = \frac{V}{\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]} = \frac{40830.6}{\left[\frac{(1+0.055)^8-1}{0.055}\right]} = \frac{40830.6}{9.721573}$$

$$A = 4200\,DA$$

مثال 4: إذا كانت جملة 12 دفعة سنوية عادية قيمة كـل منهـا 2700 دج هي 45548.84 دج. أوجد معدل الفائدة المركبة.

الحل:

*** حساب معدل الفائدة**

$$\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right] = \frac{V}{A}$$

$$\left[\frac{(1+t)^{12}-1}{t}\right] = \frac{45548.84}{2700} = 16.869940$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 3 وبـالبحث عـن القيمـة 16.86994 المقابلة لـــ 12 فترة نجدها تقابل معدل الفائدة 6% .

ثالثا: حساب عدد الدفعات (عدد الفترات)

مثال 5: إذا كانت دفعات السداد قيمة الواحدة منها 7300دج أنتجت بعد مدة زمنية معينة جملة قدرها 105751.90 دج بمعدل فائدة 8% . أحسب عدد الدفعات.

الحل:

***حساب عدد الدفعات**

$$\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]=\frac{V}{A}$$

$$\left[\frac{(1+0.08)^n-1}{0.08}\right]=\frac{105751.9}{7300}=14.486561$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 3 والبحث عن القيمة 14.486561 المقابلة لـمعدل الفائدة 8% نجدها تقابل 10 فترات.

2.1 القيمة الحالية للدفعات الثابتة لآخر المدة

يقصد بالقيمة الحالية للدفعات مجموع القيم الحالية للدفعات في بداية المدة على أساس معدل فائدة مركبة، أي قيمة الدفعات عند إمضاء عقد القرض وهذا في الفترة 0، أي فترة قبل الدفعة الأولى.

فالقيمة الحالية لكل مبلغ من المبالغ الدورية للدفعة في بداية مدة الدفعة عبارة عن مبلغ الدفعة مخصوما منه الفائدة المركبة المستحقة عن هذا المبلغ من بداية مدة الدفعة وحتى تاريخ استحقاق مبلغ الدفعة بمعدل فائدة معين. وسيختلف مقدار الخصم عن كل مبلغ من مبالغ الدفعات لاختلاف مدة خصمه -أي ستختلف القيمة الحالية لكل مبلغ من مبالغ الدفعة-.

ويمكن ايجاد القيمة الحالية لكل الدفعات عن طريق حساب القيمة الحالية لكل دفعة على حدا في بداية المدة ثم جمعها.

فإذا افترضنا أنه لدينا n دفعة لآخر المدة وأن t هو معدل الفائدة المركبة، فإن القيمة الحالية لكل دفعة يمكن تمثيلها كما يلي:

أن مجموع القيم الحالية للدفعات مجتمعة ابتداءا من آخر دفعة تشكل متتالية هندسية تصاعدية حدها الأول $A(1+t)^{-n}$ وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n .

وبالتالي يكتب مجموعها في شكل الصيغة التالية:

$$V_a=A\left[(1+t)^{-n}+(1+t)^{-n-1}+\ldots+(1+t)^{-3}+(1+t)^{-2}+(1+t)^{-1}\right]$$

ويعبر عن مجموع المتتالية الهندسية بالعلاقة التالية:

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

حيث أن: a تمثل الحد الأول للمتتالية الهندسية، و R أساس المتتالية الهندسية.

وعليه فإن القيمة الحالية لدفعات متساوية عادية (لآخر المدة) تحسب وفق العلاقة التالية:

$$V_a=A(1+t)^{-n}\left[\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)-1}\right]$$

$$V_a=A\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]................()$$

ويمكن الاعتماد على الجدول المالي رقم 4 من أجل استخراج قيمة $\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]$.

مثال 6: أحسب القيمة الحالية لـــ 12 دفعة عادية سنوية مبلغ كل منها 6000 دج بمعدل فائدة مركبة 9.5%.

الحل:

*** حساب القيمة الحالية**

$$V_a=A\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]=6000\left[\frac{1-(1+0.095)^{-12}}{0.095}\right]$$

$$V_a=6000\times6.983839$$

$$V_a=41903.03\,DA$$

ملاحظة:

يمكن ايجاد علاقة بين القيمة المكتسبة للدفعات العادية وقيمتها الحالية كما يلي:

$$V=V_a(1+t)^n$$

أو من خلال العلاقة التالية:

$$V_a=V(1+t)^{-n}$$

II. الدفعات غير العادية (الفورية ، لأول المدة أو دفعات الاستثمار)

1.2 جملة الدفعات الثابتة لأول المدة

بالنسبة للدفعات الفورية فإن الجملة المركبة للدفعات تكون عبارة عن مجموع الجملات المركبة لكل دفعة منها عن المدة من تاريخ سدادها حتى تاريخ نهاية وحدة زمنية واحدة من تاريخ سداد آخر تلك الدفعات (أي حتى تاريخ نهاية مدة الدفعات).

فلمعرفة جملة الدفعات الفورية يتم حساب جملة كل دفعة مع الأخذ بعين الاعتبار أن الدفعة تدفع في بداية كل فترة زمنية (سنة،

سداسي، ثلاثي، شهر،...)، أي أن جملة هـذه الـدفعات هـو عبـارة عـن مجموع هذه الدفعات وفائدتها حتى نهاية مدة الدفعات مجتمعة.

فإذا رمزنا إلى معـدل الفائـدة بـــ t ، وقيمـة الدفعـة A ، وأن عدد الدفعات (عدد الفترات الزمنيـة) n ، فـإنه يمكـن التعـبير عـن مـا سبق بالشكل التالي:

بداية الدفعة
أول دفعة
آخر دفعة

A A A A A A A A A

مدة استثمار كل دفعة 0 1 2 3 4 n-2 n-1 n جملة الدفعات V_n

فترة واحدة فترتين

فــترة زمنية n-1

فــترة زمنية n

يلاحظ أن الدفعات إذا كانت فورية فإنه يتـم دفـع كـل دفعـة منهـا في بداية الوحدة الزمنية المناظرة لها، فالدفعة الأولى تدفع فـي بدايـة السنة الأولى ومدة استثمارها هي n ، والدفعة الثانية في بداية السنة الثانية ومدة استثمارها هي $n-1$ إلى غاية الدفعة الأخيرة الـتي تـدفع قبل نهاية مدة الدفعات بفترة زمنيـة واحـدة ومـدة اسـتثمارها تسـاوي فترة زمنية واحدة.

يلاحـظ أن مجمـوع جملـة الـدفعات مجتمعـة تعـبر عـن متتاليـة هندسية تصاعدية حدها الأول $A(1+t)$ وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n . وبالتالي يكتب مجموعها في شكل الصيغة التالية:

$$V^{¿}=A\left[(1+t)+(1+t)^2+(1+t)^3+\ldots+(1+t)^{n-2}+(1+t)^{n-1}+(1+t)^n\right]$$

ويعبر عن مجموع المتتالية الهندسية بالعلاقة التالية:

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

حيث أن: a تمثل الحد الأول للمتتالية الهندسية، و R أساس المتتاليـة الهندسية.

وعليه فإن جملـة دفعـات متسـاوية فوريـة (لأول المـدة) تحسـب وفق العلاقة التالية:

$$V^{¿}=A(1+t)\left[\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)-1}\right]$$

$$V^{¿}=A(1+t)\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ويمكن الاعتماد على الجدول المالي رقـم 3 مـن أجـل اسـتخراج قيمـة $\left[\frac{(1+t)^n-1}{t}\right]$.

كما يمكن كتابة المعادلة السابقة (رقم) على الشكل التالي:

$$V^{¿}=A\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}-1\right]\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

العلاقة بين الجملة للدفعات الفورية والجملة للدفعات العادية

كما يمكن الاعتماد على علاقة القيمة الجملة لدفعات آخر المــدة لحساب الجملة لدفعات أول المدة، فمن العلاقة رقم يلاحظ أن الجملة للدفعات الفورية تساوي الجملة للدفعات العادية مضروبة في $(1+t)$.
ويمكن كتابة العلاقة بين نوعي الدفعات كما يلي:

$$V^{¿}=V(1+t)$$

مثال 7: أودع شخص مبلغ 5700 دج في بنك في بداية كـل سداسـي لمدة 4 سـنوات بمعـدل فائـدة مركبـة سـنوي 12% ، أحسـب الجملـة المركبة المستحقة في نهاية المدة.

الحل:

*** حساب جملة الدفعات الفورية**

لحساب الجملة يتم تحويل الفترات إلى سداسيات و المعدل إلى معدل سداسي (نصف سنوي)

عدد الدفعات = عدد الوحدات الزمنية النصف سنوية

= 4× 2 =8 دفعات

معدل الفائدة السداسي = المعدل السنوي ÷ 2

معدل الفائدة السداسي= 12÷ 2 =6 % .

$$V^{¿}=A(1+t)\left[\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\right]=5700(1+0.06)\left[\frac{(1+0.06)^{8}-1}{0.06}\right]$$

$$V^{¿}=5700\times1.06\times9.897468=59800.5\,DA$$

حساب عناصر جملة دفعات أول المدة

مثال 8: قام شخص بإيداع دفعات فورية سنوية في بنك بمعدل فائدة مركبة 8.5 % سنويا، فبلغت جملة ايداعاته في نهايـة 5 سـنوات مـن تاريخ أول إيداع 49503.53 دج . أحسب مبلغ الدفعة

الحل:

***حساب قيمة الدفعة**

$$A=\frac{V^{¿}}{(1+t)\left[\frac{(1+t)^{n}-1}{t}\right]}=\frac{49503.53}{(1+0.085)\left[\frac{(1+0.085)^{5}-1}{0.085}\right]}$$

$$A=7700\,DA$$

مثال 9: أودع شخص مبلغ 17400 دج في بنك في أول كل سنة لمدة 7 سـنوات، فبلغـت جملـة تلـك الـدفعات فـي نهايـة السـنة السـابعة

159521.13دج، أوجد معدل الفائدة المركبة الذي حسبت بموجبه تلك الدفعة.

الحل:

*** حساب معدل الفائدة**

$$\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}\right]=\frac{V}{A}+1$$

$$\left[\frac{(1+t)^{7+1}-1}{t}\right]=\frac{159521.13}{17400}+1=10.167881$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 3 وبالبحث عن القيمـة 10.167881 المقابلة لـــ 8 فترات نجدها تقابل معدل الفائدة 6.75% .

مثال 10:أودع شخص دفعات فورية نصف سنوية مبلغ كل منها 15000 دج بمعدل فائدة مركبة 4.5% لكل نصف سنة، فوجد أن جملة هذه الدفعات في نهاية مدة معينة هي 420953.44دج. أوجد مدة تلك الدفعات.

الحل:

***حساب عدد الدفعات**

بما أن المعدل المعمول به هو نصف سنوي (سداسي) فإن المدة المحسوبة ستكون بالسداسيات

$$\left[\frac{(1+t)^{n+1}-1}{t}\right]=\frac{V}{A}+1$$

$$\left[\frac{(1+0.045)^{n+1}-1}{0.045}\right]=\frac{420953.44}{15000}+1=29.063562$$

بالرجوع إلى الجدول المالي رقم 3 وبالبحث عن القيمـة 29.063562 المقابلة لـــمعدل الفائدة 4.5% نجد أن $n+1$ تقابلها 19 فترة ومنه:

$$n+1=19 \Rightarrow n=19-1=18$$

$$n=18\,semestres$$

إذن عدد الدفعات هو 18 دفعة.

أو يمكن استعمال الطريقة الرياضية كما يلي:

$$n=\frac{\ln\left[\frac{V\times t}{A}+t+1\right]}{\ln(1+t)}-1=\frac{\ln\left[\frac{420953.44\times 0.045}{15000}+0.045+1\right]}{\ln(1+0.045)}-1$$

$$n=18\,semestres$$

2.2 القيمة الحالية لدفعات بداية المدة

يقصد بالقيمة الحالية لدفعات الاستثمار قيمة الدفعات في بداية الزمن (0)، وتتساوي القيمة الحالية للدفعات الفورية مجموع القيم الحالية لكل الدفعات، حيث يتم حساب تلك القيمة عند أول دفعة.

فإذا افترضنا أنه لدينا n دفعة لأول المدة وأن t هو معدل الفائدة المركبة، فإن القيمة الحالية لكل دفعة يمكن تمثيلها كما يلي:

القيمة الحالية للدفعات Va

آخر دفعة

A A A A A A A A A

0 1 2 3 4 n-1 n

فترة واحدة خصم الدفعة الأولى =0

فترتين

فترة زمنية n-1

ومن أجل استخلاص القانون الأساسي لحساب القيمة الحالية للدفعات الفورية فإن يجب حساب أولا القيمة الحالية لكل دفعة و يلاحظ أن مجموع القيم الحالية للدفعات مجتمعة ابتداءا من آخر دفعة تشكل متتالية هندسية تصاعدية حدها الأول $A(1+t)^{-(n-1)}$ وأساسها $(1+t)$ وعدد حدودها n .

وبالتالي يكتب مجموعها في شكل الصيغة التالية:

$$V_a^{¿}=A\left[(1+t)^{-n+1}+(1+t)^{-n+2}+\ldots.+(1+t)^{-2}+(1+t)^{-1}+1\right]$$

ويعبر عن مجموع المتتالية الهندسية بالعلاقة التالية:

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}$$

حيث أن: a تمثل الحد الأول للمتتالية الهندسية، و R أساسها.

وعليه فإن القيمة الحالية لمجموع دفعات أول المدة تحسب وفق العلاقة التالية:

$$V_a^{¿}=A(1+t)^{-n+1}\left[\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)-1}\right]=A\left[\frac{(1+t)-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

$$V_a^{¿}=A(1+t)\left[\frac{(1-(1+t)^{-n}}{t}\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots()$$

ويمكن الاعتماد على الجدول المالي رقم 4 من أجل استخراج قيمة $\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]$.

كما يمكن كتابة المعادلة رقم على الشكل التالي:

$$V_a^{¿}=A(1+t)\left[\frac{1-(1+t)^{-n}}{t}\right]=A\left[\frac{(1+t)-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

$$V_a^{¿}=A\left[1+\frac{1-(1+t)^{-n+1}}{t}\right]$$

العلاقة بين القيمة الحالية للدفعات الفورية والقيمة الحالية للدفعات العادية

كما يمكن الاعتماد على علاقة القيمة الحالية لدفعات آخر المــدة لحساب القيمة الحالية لدفعات أول المدة، فمن العلاقة رقم يلاحظ أن القيمة الحالية للدفعات الفورية تساوي القيمة الحالية للدفعات العاديــة مضروبة في $(1+t)$. ويمكن كتابة العلاقة بين نوعي الدفعات كما يلي:

$$V_a^{¿}=V_a(1+t)$$

مثال 11:ـ أحسب القيمة الحالية لدفعات فورية سنوية مبلغ كل منهـا 19100 دج ومدتها 4 سنوات بمعدل فائدة مركبة 11% سنويا.

الحل: * حساب القيمة الحالية

$$V_a^{¿}=A(1+t)\left[\frac{(1-(1+t)^{-n}}{t}\right]=19100(1+0.11)\left[\frac{(1-(1+0.11)^{-4}}{0.11}\right]$$

$$V_a^{¿}=19100\times1.11\times4.709731$$

$$V_a^{¿}=99851\,DA$$