MATRICES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & -6 & 8 & 4\\ 0 & 7 & 3 & 11\\ 22 & 17 & 0,1 & 8\end{pmatrix}$.

1) Donner le format de A

2) Donner la valeur de chacun des éléments a_{14} , a_{23} , a_{33} et a_{32}

3) Ecrire la matrice transposée A^t de A et donner son format

Exercice n°2.

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5 & \ldots & 7\\ \ldots & 9 & \ldots\\ 8 & \ldots & 0\\ 7 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

1) Compléter l'écriture de A de format 4×3 avec : $a_{32}=5$, $a_{23}=-4$, $a_{21}=8$ et $a_{12}=11$

2) Ecrire la matrice transposée A^t de A et donner son format

Exercice n°3.

1) Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.

2) Donnez la matrice A telle que pour tout indice i et j avec, $1\leq i\leq 3$ et $1\leq j\leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la formule $a_{ij}=2i-j$

Exercice n°4.

On donne $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}7 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Calculez $A+B$, $A-B$, $3A$, $4B$, $3A-4B$

Exercice n°5.

On donne $A=\begin{pmatrix}x & 5\\ 0 & 2x\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}y & 7\\ -1 & 3y\end{pmatrix}$.

1) Trouver x et y pour que $A+B=\begin{pmatrix}4 & 12\\ -1 & 17\end{pmatrix}$

2) Trouver x et y pour que $2A-4B=\begin{pmatrix}-5 & -18\\ 4 & -16\end{pmatrix}$

Exercice n°6.

On considère les matrices A, B et C définies par $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -4 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -14 & 7\\ 24 & 17\end{pmatrix}$

Trouver deux réels x et y tels que $xA+yB=C$.

Exercice n°7.

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice n°8.

Calculer, puis comparer les produits $A \times B$ et $B \times A$

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice n°9.

Dans chacun des cas, calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$. Quelle particularité présente-t-il ?

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice n°10.

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où x est un réel.

Déterminer x pour que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice n°11.

Calculez et comparez $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A + B)^2$ avec : $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n°12.

Soit les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On se propose de rechercher s'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$.

1) Traduire cette égalité par un système de quatre équations à quatre inconnues

2) Résoudre ce système

3) Pour les valeurs trouvées a,b,c, et d , on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Vérifier que $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$

Exercice n°13.

Définir pour chaque système la matrice A et le vecteur colonne C tels que le système donné soit équivalent à l'égalité matricielle $A\times X=C$

1) $\begin{cases}-5x+3y=2\\-x+y=5\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}2,23x-5,5y=12\\0,2x+y=7\end{cases}$

3) $\begin{cases}3x-y+2z=7\\5x+y-z=8\\-x+3y+7z=-22\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}3x-y=15\\y+7z=12\\x+y=25\end{cases}$

5) $\begin{cases}x+y+z=-5\\-y+z=2\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}3x+6y=x+z+31\\7y+2z=x-y+27\end{cases}$

Exercice n°14.

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}3&-10\\-2&8\end{pmatrix}$

1) A l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse A^{-1} (mettre les coefficients sous forme fractionnaire)

2) En déduire la résolution des systèmes suivants :

a) $\begin{cases}3x-10y=4\\-2x+8y=7\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}3x-10y=1,5\\-2x+8y=-0,4\end{cases}$ **c)** $\begin{cases}3x-10y=15\\-2x+8y=-5\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}3x-10y=1,25\\-2x+8y=0,5\end{cases}$

Exercice n°15.

1) On considère le système $\begin{cases}x+y+z=a\\2x+y+3z=b\\x-y+2z=c\end{cases}$ où x,y,z,a,b et c sont des nombres réels.

Exprimer les nombres réels x,y et z en fonction de a,b et c

2) On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

Montrer que la matrice A ,est inversible et donner l'expression de A^{-1}

Exercice n°16.

On suppose que $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ où a,b,c et d sont des réels tels que $ad-bc\neq 0$

1) Trouver en fonction de a,b,c et d les réels x,y,t et t tels que : $A\times\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

2) Vérifier que A admet pour matrice inverse : $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

MATRICES - EXERCICES CORRIGES
CORRECTION

Exercice n°1

1) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est de format } 3\times 4}$ puisqu'elle contient 3 lignes et 4 colonnes

2) a_{14} est le nombre figurant à l'intersection de la 1ère ligne et de la 4ème colonne, donc $\boxed{a_{14}=4}$

a_{23} est le nombre figurant à l'intersection de la 2ère ligne et de la 3ème colonne, donc $\boxed{a_{23}=3}$

a_{33} est le nombre figurant à l'intersection de la 3ème ligne et de la 3ème colonne, donc $\boxed{a_{33}=0{,}1}$

a_{32} est le nombre figurant à l'intersection de la 3ème ligne et de la 2ème colonne, donc $\boxed{a_{32}=17}$

3) La matrice transposée A^t de A s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de A.

On obtient donc $\boxed{A^t=\begin{pmatrix}1&0&22\\-6&7&17\\8&3&0{,}1\\4&11&8\end{pmatrix}}$. $\boxed{\text{La matrice } A^t \text{ est donc de dimension } 4\times 3}$

Exercice n°2

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}5&\dots&7\\\dots&9&\dots\\8&\dots&0\\7&1&3\end{pmatrix}$.

1) a_{32} est le nombre figurant à l'intersection de la 3ème ligne et de la 2ème colonne

a_{23} est le nombre figurant à l'intersection de la 2ème ligne et de la 3ème colonne

a_{21} est le nombre figurant à l'intersection de la 2ème ligne et de la 1ère colonne

a_{12} est le nombre figurant à l'intersection de la 1ère ligne et de la 2ème colonne

On complète ainsi la matrice A : $\boxed{A=\begin{pmatrix}5&11&7\\8&9&-4\\8&5&0\\7&1&3\end{pmatrix}}$

2) La matrice transposée A^t de A s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de A.

On obtient donc $A^t=\begin{pmatrix}5&8&8&7\\11&9&5&1\\7&-4&0&3\end{pmatrix}$. $\boxed{\text{La matrice } A^t \text{ est donc de dimension } 3\times 4}$

Exercice n°3

1) Toute matrice antisymétrique possède une transposée égale à son opposée.

Par exemple, si on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, on aura $A^t=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=-A$

2) L'indication $1\le i\le 3$ et $1\le j\le 3$ nous donne le format de la matrice A : il s'agit d'une matrice 3×3.

De plus on calcule successivement $a_{11}=2-1=1$, $a_{12}=2-2=0$, $a_{13}=2-3=-1$, $a_{21}=4-1=3$, $a_{22}=4-2=2$, $a_{23}=4-3=1$, $a_{31}=6-1=5$, $a_{32}=6-2=4$ et $a_{33}=6-3=3$.

La matrice A est donc : $\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&2&1\\5&4&3\end{pmatrix}}$

Exercice n°4

On calcule successivement :

$$A+B=\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+7&5+2\\3+(-1)&-1+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&7\\2&-4\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&2\\-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-7&5-2\\3-(-1)&-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&3\\4&2\end{pmatrix}$$

$$3A=3\times\begin{pmatrix}2&5\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2&3\times5\\3\times3&3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&15\\9&-3\end{pmatrix}\quad ;\ 4B=\begin{pmatrix}4\times7&4\times2\\4\times(-1)&4\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&8\\-4&-12\end{pmatrix}$$

$$3A-4B=\begin{pmatrix}6&15\\9&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}28&8\\-4&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-28&15-8\\9-(-4)&-3-(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22&7\\13&9\end{pmatrix}$$

Exercice n°5

1) On exprime d'une part $A+B=\begin{pmatrix}x&5\\0&2x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&7\\-1&3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y&5+7\\0+(-1)&2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y&12\\-1&2x+3y\end{pmatrix}$

On aura l'égalité $A+B=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}x+y&12\\-1&2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix}$ donc par identification des différents termes si et seulement si $\begin{cases}x+y=4\\2x+3y=17\end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases}x+y=4 & L_1\\2x+3y=17 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-x & L_1\\2x+3(4-x)=17 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-x & L_1\\2x+12-3x=17 & L_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-x & L_1\\-x=5 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=4-(-5) & L_1\\x=-5 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}y=9 & L_1\\x=-5 & L_2\end{cases}}$$

L'égalité $A+B=\begin{pmatrix}4&12\\-1&17\end{pmatrix}$ aura donc lieu pour $x=-5$ et $y=9$

2) On exprime d'une part $2A-4B=\begin{pmatrix}2x&10\\0&4x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4y&28\\-4&12y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-4y&-18\\4&4x-12y\end{pmatrix}$

On aura l'égalité $2A-4B=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix}2x-4y&-18\\4&4x-12y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix}$ donc par identification des différents termes si et seulement si $\begin{cases}2x-4y=-5\\4x-12y=-16\end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases}2x-4y=-5 & L_1\\4x-12y=-16 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=-5 & L_1\\2x-6y=-8 & \frac{1}{2}L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4y-5 & L_1\\-2y=-3 & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=4\times\frac{3}{2}-5 & L_1\\y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=1 & L_1\\y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=\frac{1}{2} & L_1\\y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1\end{cases}}$$

L'égalité $2A-4B=\begin{pmatrix}-5&-18\\4&-16\end{pmatrix}$ aura donc lieu pour $x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$

Exercice n°6

On calcule : $xA+yB=x\begin{pmatrix}1&3\\-4&2\\0&7\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-2&0\\-2&1\\8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2y&3x\\-4x-2y&2x+y\\8y&7x+y\end{pmatrix}$.

On aura l'égalité $xA+yB=C$ si et seulement si $\begin{pmatrix}x-2y&3x\\-4x-2y&2x+y\\8y&7x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6\\-14&7\\24&17\end{pmatrix}$, donc par identification des termes, si et seulement si $\begin{cases}x-2y=-4\\3x=6\\-4x-2y=-14\\2x+y=7\\8y=24\\7x+y=17\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}}$

Exercice n°7

a) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{2}$ et $\underline{2}\times2$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×2. On a alors :

$$\begin{pmatrix}2&5\\3&6\\4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times2+5\times4&2\times5+5\times6\\3\times2+6\times4&3\times5+6\times6\\4\times2+7\times4&4\times5+7\times6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}24&40\\30&51\\36&62\end{pmatrix}}$$

b) Les matrices étant respectivement de format $2\times\underline{2}$ et $\underline{3}\times2$, leur produit est impossible à définir.

c) Les matrices étant respectivement de format $1\times\underline{3}$ et $\underline{3}\times3$, leur produit est bien défini et est une matrice 1×3. On a alors :

$$\begin{pmatrix}-1&4&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&6\\2&4&-2\\3&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times0+4\times2+3\times5&-1\times(-1)+4\times4+5\times5&-1\times6+4\times(-2)+5\times3\end{pmatrix}$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}23&42&1\end{pmatrix}}$$

d) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{3}$ et $\underline{3}\times2$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×2. On a alors :

$$\begin{pmatrix}2&5&0\\3&6&3\\4&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1+5\times2+0\times3&2\times(-1)+5\times0+0\times5\\3\times1+6\times2+3\times3&3\times(-1)+6\times0+3\times5\\4\times1+1\times2+2\times3&4\times(-1)+1\times0+2\times5\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}12&-2\\24&12\\12&6\end{pmatrix}}$$

e) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{2}$ et $\underline{3}\times2$, leur produit est impossible à définir.

f) Les matrices étant respectivement de format $3\times\underline{3}$ et $\underline{3}\times3$, leur produit est bien défini et est une matrice 3×3. On a alors :

$$\begin{pmatrix}1&0&5\\2&-1&6\\3&4&7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&7&8\\0&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+0\times0+5\times4&1\times7+0\times2+5\times5&1\times8+0\times3+5\times6\\2\times2+(-1)\times0+6\times4&2\times7+(-1)\times2+6\times5&2\times8+(-1)\times3+6\times6\\3\times2+4\times0+4\times7&3\times7+4\times2+7\times5&3\times8+4\times3+7\times6\end{pmatrix}$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}22&32&38\\28&42&49\\34&64&78\end{pmatrix}}$$

Exercice n°8

Pour chaque exemple, les matrices étant carrées de même format, leur produit dans les deux sens est bien défini

a) Si $A=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 2 & 11\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -5 & 8\end{pmatrix}$, alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 2 & 11\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 2\\ -5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times 4+8\times(-5) & -1\times 2+8\times 8\\ 2\times 4+11\times(-5) & 2\times 2+11\times 8\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-44 & 62\\ -47 & 92\end{pmatrix}}$$

et $$B\times A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -5 & 8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1 & 8\\ 2 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times(-1)+2\times 2 & 4\times 8+2\times 11\\ (-5)\times(-1)+8\times 2 & (-5)\times 8+8\times 11\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0 & 54\\ 21 & 48\end{pmatrix}}$$

On constate que $\boxed{A\times B\neq B\times A}$

b) Si $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times 3+8\times 1 & 4\times 9+8\times 1\\ 1\times 3+2\times 1 & 1\times 9+2\times 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}20 & 44\\ 5 & 11\end{pmatrix}}$$

et $$B\times A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 4+9\times 1 & 3\times 8+9\times 2\\ 1\times 4+1\times 1 & 1\times 8+1\times 2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}21 & 42\\ 5 & 10\end{pmatrix}}$$

On constate que $\boxed{A\times B\neq B\times A}$

c) Si $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 5+1\times 2 & 2\times 2+1\times 3\\ 1\times 5+1\times 2 & 1\times 2+1\times 3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}12 & 7\\ 7 & 5\end{pmatrix}}$$

et $$B\times A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\times 2+2\times 1 & 5\times 1+2\times 1\\ 2\times 2+3\times 1 & 2\times 1+3\times 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}12 & 7\\ 7 & 5\end{pmatrix}}$$

On constate cette fois ci que $\boxed{A\times B=B\times A}$, **mais ce n'est surtout pas une règle générale !**

Exercice n°9

Dans chaque cas, les matrices étant carrées de même format, leur produit est bien défini et est une matrice 2×2

a) Si $A=\begin{pmatrix}6 & -12\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix}6 & -12\\ -3 & 6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}12 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\times 12+(-12)\times 6 & 6\times 6+(-12)\times 3\\ (-3)\times 12+6\times 6 & (-3)\times 6+6\times 3\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

On constate que le produit $A\times B$ est nul sans pour autant que A ou B soit la matrice nulle

b) Si $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 0+4\times 0 & 2\times 2+4\times(-1)\\ (-1)\times 0+(-2)\times 0 & (-1)\times 2+(-2)\times(-1)\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

On constate que le produit $A\times B$ est nul sans pour autant que A ou B soit la matrice nulle

Exercice n°10

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\times x+1\times 2 & x\times 1+1\times 3 \\ 2\times x+3\times 2 & 2\times 1+3\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+2 & x+3 \\ 2x+6 & 11 \end{pmatrix}$. Pour avoir $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, il suffit d'avoir $\begin{pmatrix} x^2+2 & x+3 \\ 2x+6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2=6 \\ x+3=1 \\ 2x+6=2 \end{cases}$, ce qui se produit si et seulement $\boxed{x=-2}$

Exercice n°11

On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 4+8\times 1 & 4\times 8+8\times 2 \\ 1\times 4+2\times 1 & 1\times 8+2\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, puis

$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 3+9\times 1 & 3\times 9+9\times 1 \\ 1\times 3+1\times 1 & 1\times 9+1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$,

et enfin $A\times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 3+8\times 1 & 4\times 9+8\times 1 \\ 1\times 3+2\times 1 & 1\times 9+2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$.

On peut ainsi calculer :

$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + 2\times \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 88 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 164 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}$

D'autre part, $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

d'ou : $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\times 7+17\times 2 & 7\times 17+17\times 3 \\ 2\times 7+3\times 2 & 2\times 17+3\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 42 \end{pmatrix}$

On constate que $\boxed{A^2+2AB+B^2 \neq (A+B)^2}$

Exercice n°12

1) L'équation matricielle $A\times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$ se traduit par le système : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ 5a+6c=0 \\ 5b+6d=1 \end{cases}$.

2) On résout séparément deux systèmes : $\begin{cases} a+c=1 \\ 5a+6c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-c \\ 5(1-c)+6c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-c \\ c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-(-5)=6 \\ c=-5 \end{cases}$,

et $\begin{cases} b+d=0 \\ 5b+6d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-d \\ 5(-d)+6d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-d=-1 \\ d=1 \end{cases}$

3) On pose : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule, d'une part $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times 1+(-1)\times 5 & 6\times 1+(-1)\times 6 \\ (-5)\times 1+1\times 5 & (-5)\times 1+1\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et d'autre part $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 6+1\times (-5) & 1\times (-1)+1\times 1 \\ 5\times 6+6\times (-5) & 5\times (-1)+6\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a bien vérifié bien que $A^{-1}\times A = A\times A^{-1} = I_2$

Exercice n°13

1) En posant $A=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$, le système $\begin{cases}-5x+3y=2\\ -x+y=5\end{cases}$ est équivalent à $\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$, c'est-à-dire à $A\times X=C$

2) En posant $A=\begin{pmatrix}2,23 & -5,5\\ 0,2 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}12\\ 7\end{pmatrix}$, le système $\begin{cases}2,23x-5,5y=12\\ 0,2x+y=7\end{cases}$ est équivalent à $A\times X=C$

3) En posant $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}7\\ 8\\ -22\end{pmatrix}$, le système $\begin{cases}3x-y+2z=7\\ 5x+y-z=8\\ -x+3y+7z=-22\end{cases}$ est équivalent à $A\times X=C$

4) Le système $\begin{cases}3x-y=15\\ y+7z=12\\ x+y=25\end{cases}$ se réécrit $\begin{cases}3x-y+0z=15\\ 0x+y+7z=12\\ x+y+0z=25\end{cases}$

En posant $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 7\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}15\\ 12\\ 25\end{pmatrix}$, le système $\begin{cases}3x-y=15\\ y+7z=12\\ x+y=25\end{cases}$ est équivalent à $A\times X=C$

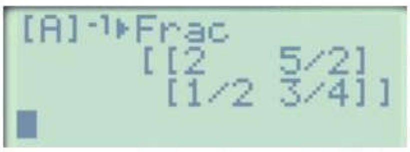
5) Le système $\begin{cases}x+y+z=-5\\ -y+z=2\end{cases}$ se réécrit $\begin{cases}x+y+z=-5\\ 0x-y+z=2\end{cases}$

En posant $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-5\\ 2\end{pmatrix}$, le système $\begin{cases}x+y+z=-5\\ -y+z=2\end{cases}$ est équivalent à $A\times X=C$

6) Le système $\begin{cases}3x+6y=x+z+31\\ 7y+2z=x-y+27\end{cases}$ se réécrit $\begin{cases}2x+6y-z=31\\ -x+8y+2z=27\end{cases}$. En posant $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & -1\\ -1 & 8 & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}31\\ 27\end{pmatrix}$, le système $\begin{cases}3x+6y=x+z+31\\ 7y+2z=x-y+27\end{cases}$ est équivalent à $A\times X=C$

Exercice n°14

1) Grâce à la calculatrice, on saisit la matrice A et on calcule son inverse

Saisie de la matrice A	Obtention de la matrice inverse :
	 

2) a) Le système $\begin{cases}3x-10y=4\\ -2x+8y=7\end{cases}$ s'écrit $A\times X=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix}$.

Puisque la matrice A est inversible, on aura $X=A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\ 7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\times 4+\frac{5}{2}\times 7=\frac{51}{2}\\ y=\frac{1}{2}\times 4+\frac{3}{4}\times 7=\frac{29}{4}\end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution : $\boxed{S=\left\{\left(\frac{51}{2};\frac{29}{4}\right)\right\}}$

b) Le système $\begin{cases}3x-10y=1,5\\-2x+8y=-0,4\end{cases}$ s'écrit $A\times X=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1,5\\-0,4\end{pmatrix}$. Puisque la matrice A est inversible, on aura $X=A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1,5\\-0,4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\times1,5+\frac{5}{2}\times(-0,4)=2\\y=\frac{1}{2}\times1,5+\frac{3}{4}\times(-0,4)=0,45\end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution : $\boxed{S=\{(2;0,45)\}}$

c) Le système $\begin{cases}3x-10y=15\\-2x+8y=-5\end{cases}$ s'écrit $A\times X=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}15\\-5\end{pmatrix}$.

Puisque la matrice A est inversible, on aura $X=A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}15\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\times15+\frac{5}{2}\times(-5)=17,5\\y=\frac{1}{2}\times15+\frac{3}{4}\times(-5)=3,75\end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution : $\boxed{S=\{(17,5;3,75)\}}$

d) Le système $\begin{cases}3x-10y=1,25\\-2x+8y=0,5\end{cases}$ s'écrit $A\times X=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1,25\\0,5\end{pmatrix}$. Puisque la matrice A est inversible, on aura $X=A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1,25\\0,5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\times1,25+\frac{5}{2}\times0,5=3,75\\y=\frac{1}{2}\times1,25+\frac{3}{4}\times0,5=1\end{cases}$

Le système admet donc pour ensemble de solution : $\boxed{S=\{(3,75;1)\}}$

<u>Exercice n°15</u>

1) On a :

$$\begin{cases}x+y+z=a & L_1\\2x+y+3z=b & L_2\\x-y+2z=c & L_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=a & L_1\\x-y+2z=c & L_2\\2x+y+3z=b & L_3\end{cases} \text{ renumérotation des lignes}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=a & L_1\\-2y+z=c-a & L_4=L_2-L_1\\-y+z=b-2a & L_5=L_3-2L_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a-y-z & L_1\\-y=c-b+a & L_4-L_5\\z=b-2a+y & L_5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=a-(-a+b-c)-z & L_1\\y=-a+b-c & L_4-L_5\\z=b-2a+(-a+b-c) & L_5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a-(-a+b-c)-(-3a+2b-c) & L_1\\y=-a+b-c & L_4-L_5\\z=-3a+2b-c & L_5\end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases}x=5a-3b+2c & L_1\\y=-a+b-c & L_4-L_5\\z=-3a+2b-c & L_5\end{cases}}$$

2) Si on note $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, alors le système $\begin{cases}x+y+z=a\\2x+y+3z=b\\x-y+2z=c\end{cases}$ se traduit matriciellement par $AX=B$

Puisque l'on a $\begin{cases} x+y+z=a \\ 2x+y+3z=b \\ x-y+2z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5a-3b+2c \\ y=-a+b-c \\ z=-3a+2b-c \end{cases}$, alors en notant $C=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ on aura $AX=B \Leftrightarrow X=CB$. Or si A est inversible, on a l'équivalence $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$, ce qui nous permet d'affirmer que la matrice A est inversible, et que $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

Exercice n°16

1) On résout le système $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ ay+bt=0 & L_2 \\ cx+dz=0 & L_3 \\ cy+dt=1 & L_4 \end{cases}$ en résolvant séparément les systèmes $\begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ cx+dz=0 & L_2 \end{cases}$ et $\begin{cases} ay+bt=0 & L_1 \\ cy+dt=1 & L_2 \end{cases}$.

On résout le premier système :

$\begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ cx+dz=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acx+bcz=c & cL_1 \\ acx+adz=0 & aL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acx+bcz=c & cL_1 \\ (ad-bc)z=-c & aL_2-cL_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acx+bcz=c & cL_1 \\ \boxed{z=-\dfrac{c}{ad-bc}} & aL_2-cL_1 \end{cases}$ (car $ad-bc \neq 0$)

et $\begin{cases} ax+bz=1 & L_1 \\ cx+dz=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} adx+bdz=d & dL_1 \\ bcx+bdz=0 & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-bc)x=d & dL_1-bL_2 \\ bcx+bdz=0 & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x=\dfrac{d}{ad-bc}} & dL_1-bL_2 \\ bcx+bdz=0 & bL_2 \end{cases}$ (car $ad-bc \neq 0$)

On résout le deuxième système :

$\begin{cases} ay+bt=0 & L_1 \\ cy+dt=1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acy+bct=0 & cL_1 \\ acy+adt=a & aL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acy+bct=0 & cL_1 \\ (ad-bc)t=a & aL_2-cL_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} acy+bct=0 & cL_1 \\ \boxed{t=\dfrac{a}{ad-bc}} & aL_2-cL_1 \end{cases}$ (car $ad-bc \neq 0$)

et $\begin{cases} ay+bt=0 & L_1 \\ cy+dt=1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ady+bdt=0 & dL_1 \\ bcy+bdt=b & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-bc)y=-b & dL_1-bL_2 \\ bcy+bdt=b & bL_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{y=\dfrac{-b}{ad-bc}} & dL_1-bL_2 \\ bcy+bdt=b & bL_2 \end{cases}$ (car $ad-bc \neq 0$)

2) On a ainsi $\begin{cases} x=\dfrac{d}{ad-bc} \\ y=\dfrac{-b}{ad-bc} \\ z=-\dfrac{c}{ad-bc} \\ t=\dfrac{a}{ad-bc} \end{cases}$. Si A est inversible, on a l'équivalence $AX=I \Leftrightarrow X=A^{-1}I=A^{-1}$, ce qui nous permet d'affirmer que la matrice A est inversible, et que $A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \boxed{\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.