المحور الثالث :الدفعات المتساوية بفائدة مركبة

أولا :مفاهيم ،اصطلاحات ،و قوانين أساسية

1-تعريف الدفعات المتساوية :هي عبارة عن مبالغ مالية متساوية تدفع (تقتطع) بشكل دوري على فترات زمنية متساوية (سنوية ،فصلية ،سداسية أو حتى شهرية) ولمدة زمنية محدودة (N).

الدفعة على هذا الأساس هي مبلغ يتكرر دفعه (اقتطاعه) على فترات منتظمة ،وعادة ما يستخدم هذا النوع من الدفعات أو الاقتطاعات من شركات التأمين ودوائر التقاعد على سبيل المثال ،أو يكون عبارة عن أقساط السلع التي يتم تمويلها عن طريق البنوك أو قد يتم إيداع هذه الدفعات من قبل الأشخاص أنفسهم بغية الحصول على مبلغ بعد فترة زمنية معينة للوفاء بالتزام معين كشراء عقار.

2-عناصر الدفعة الثابتة: تتميز الدفعات الثابتة بالعناصر التالية:

- مبالغ الدفعات المقدمة دوريا متساوية.
- الفترة الفاصلة بين دفعة وأخرى ،هي أيضا فترات متساوية.
- معدل الفائدة،ثابت بالنسبة لكل الدفعات.
- تحديد تاريخ أول دفعة وتاريخ أخر دفعة.
- عدد الدفعات محدد

3-أنواع الدفعات المتساوية : هناك تصنيفات عديدة حسب معايير مختلفة ،لكننا نستهدف من خلال هذه المحاضرة نوعين من الدفعات وفقا لمعيار وقت الدفع:

- دفعات نهاية المدة : وتسمى أيضا دفعات السداد ،دفعات الاستهلاك ،الدفعات العادية ،الدفعات المتأخرة ، المؤجلة أو الآجلة ...وهي دفعات تسدد نهاية كل فترة

- دفعات بداية المدة :تسمى أيضا دفعات الاستثمار ،الدفعات الفورية ،الدفعات غير العادية ،الدفعات العاجلة....وهي دفعات تسدد بداية كل فترة

4-اصطلاحات أساسية حول الدفعات المتساوية :

لنصطلح في هذا المحور على ما يلي :

قيمة الدفعة الثابتة هي a عدد الدفعات هو n معدل الفائدة المركبة هو i

القيمة المكتسبة لجملة دفعات نهاية المدة هي A

القيمة الحالي لجملة دفعات نهاية المدة V_0

القيمة المكتسبة لجملة دفعات بداية المدة هي A^*

القيمة الحالية لجملة دفعات بداية المدة هي V_0^*

5-قانون مجموع جملة متتالية هندسية المعتمد في المحور:

نذكر بهذا القانون لأننا سنعتمد عليه في حساب كل القيم الحالية والقيم المكتسبة لدفعات بداية ونهاية المدة .مجموع متوالية هندسية حدها الأول a و معدل تزايدها أو أساسها هو r و عدد حدودها n معطى بالقانون الرياضي الموالي:

$$\sum_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

الدفعات المتساوية العادية بفائدة مركبة :

(دفعات نهاية المدة ، دفعات السداد ،الدفعات الآجلة)

1-القيمة المكتسبة لجملة دفعات نهاية المدة:

لتكن القيمة المكتسبة لجملة الدفعاتA_n ، عدد الدفعات n ، مبلغ الدفعة a ،القيمة المكتسبة لسلسة دفعات نهاية المدة ما هي إلا مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات في تاريخ التسديد:

القيم المكتسبة لكل دفعة على حدا في تاريخ التسديد ستكون بالشكل الموالي:

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الأولى : $a\,(1+i)^{n-1}$

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الثانية : $a\,(1+i)^{n-2}$

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الثالثة : $a(1+i)^{n-3}$

.

.

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الأخيرةn : $a\,(1+i)^{n-n} = a$

القيمة المكتسبة لجملة الدفعات A_n إذن هي مجموع القيم المكتسبة الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$A_n = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-3} + \cdots . + a$$:

كما نلاحظ فإن القيمة المكتسبة لجملة الدفعات A_n هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول a أساسها$(1+i)$وعدد حدودها n

وبتطبيق قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية

$$\Sigma_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ينتج :

$$A = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} \quad \Rightarrow \quad A = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

وهو القانون الأساسي الذي يعرف رياضيا القيمة المكتسبة لدفعات نهاية المدة

ملاحظة :القيمة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ متوفرة في الجدول المالي رقم 03

مثال : يطلب حساب القيمة المكتسبة ل 12دفعة عادية ،قيمة كل منها 7000 وحدة نقدية ،بمعدل 5.5%

$$A = a\ \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 7000\ \frac{(1+5.5)^{12} - 1}{5.5}$$

$\Longrightarrow A = 7000 \times 16.378559$ نجد هذه القيمة في الجدول المالي رقم 03

$\Longrightarrow A = 114699.13$ DA

➢ **قيمة الدفعة المؤجلة المستنتجة من قانون الجملة المكتسبة :**

$$A = a\ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \Longrightarrow a = \frac{Ai}{(1+i)^n - 1}$$

ملاحظة :هناك طريقتان لحساب قيمة الدفعة

***الطريقة الأولى** :يمكننا مباشرة استخدام الجدول المالي رقم 01 لحساب $(1 + i)^n$ ومن ثم استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد النتيجة

***الطريقة الثانية** :نستخدم الجدول المالي رقم 05 الذي يعطينا الصيغة $\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ بقراءة القيمة الموافقة لنفس المدة ونفس الفائدة ثم طرح القيمة i وضربها في قيمة A

البرهان الرياضي للطريقة الثانية :

$$\frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i$$

وذلك بعد توحيد المقامات واختزال $(1 + i)^{-n}$ بعد استخراجها كعامل مشترك كما يلي:

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{i\,(1-(1+i)^{-n})}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i = \frac{i - i + i\,(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{i\,(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{i\,(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i = \frac{i\,(1+i)^{-n}}{(1+i)^{-n}((1+i)^{+n}) - 1)}$$

$$\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i = \frac{i}{(1+i)^{n} - 1}$$

مثال :يريد شخص أن يشكل رأسمال قدره 7250 ون ،بواسطة 7 دفعات نهاية مدة متساوية بفائدة مركبة قدرها 9% ،ماهو مقدار كل دفعة واجبة الدفع لهذا الغرض بطريقتين (استخدام الجدول 01 واستخدام الجدول 05)؟

*الطريقة الأولى:باستخدام الجدول المالي 01 مباشرة

$$a = \frac{Ai}{(1+i)^{n} - 1} = \frac{7250 \times 0.09}{(1+0.09)^{7} - 1} = \frac{652}{0.828039} = 787.95 \text{ون}$$

*الطريقة الثانية :باستخدام الجدول 5 نجد القيمة 0.198691 هي الموافقة للفائدة 9% و عدد الدفعات7 وعليه نجد قيمة كل دفعة كما يلي :

$$a = \frac{Ai}{(1+i)^{n} - 1} = A\ \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} - i$$

$$= 7250 \times 0.198691 - 0.09 = 788.009 \text{ ون}$$

- **قيمة عدد الدفعات المؤجلة المستنتجة من قانون الجملة المكتسبة :**

من خلال هذه الجزئية سنوضح الطريقة الحسابية لإيجاد عدد الدفعات المتساوية المؤجلة n بمعلومية كل من معدل الفائدة والجملة المكتسبة وقيمة كل دفعة:

$$A = a\ \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} \Rightarrow \frac{Ai}{a} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{Ai}{a} + 1 = (1+i)^{n}$$

لإيجاد قيمة عدد الدفعات المتساوية المؤجلةn نستخدم لوغاريتم الآلة الحاسبة

بما أن $\frac{Ai}{a} + 1$ يكون معلوما وليكن b يصبح لدينا:

$$b = (1+i)^n \Rightarrow \log b = \log(1+i)^n$$

$$\Rightarrow \log b = n\log(1+i) \quad \Rightarrow n = \frac{\log b}{\log(1+i)}$$

مثال :ما هو عدد الأقساط المتعلق بمبلغ 30000 ون والذي أعطى جملة بقيمة 267.684,10 ون ،بمعدل الفائدة 8%

$$A = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{Ai}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{Ai}{a} + 1 = (1+i)^n$$ بعد التطبيق العددي

$$\Rightarrow \frac{267.684,10 \times 8\%}{30000} + 1 = (1+8\%)^n$$

$$\Rightarrow (1+8\%)^n = 1,713824266 \Rightarrow \log(1+8\%)^n = \log 1,713824266$$

$$\Rightarrow n\log(1+8\%) = \log 1,713824266$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 1,713824266}{\log(1+0.08)} = \frac{0,233966288}{0,033423755}$$

$$\Rightarrow n = 7$$

- **قيمة معدل الفائدة للدفعات المؤجلة المستنتجة من قانون الجملة المكتسبة :**

من خلال هذه الجزئية سنوضح الطريقة الحسابية لإيجاد معدل الفائدة i بمعلومية كل من عدد الدفعات المتساوية المؤجلة n والجملة المكتسبة وقيمة كل دفعة:

$$A = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Rightarrow \frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{1}$$

باستخدام الجدول المالي رقم 03 عند تقاطع القيمة $\frac{A}{a}$ وقيمة عدد الدفعات المتساوية المؤجلة n نستنتج قيمة i

مثال :ما هو معدل الفائدة ل 7 أقساط متعلقة بمبلغ 30000 ون والذي أعطى جملة بقيمة 267.684,10 ون.

$$A = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \Longrightarrow \frac{A}{a} = \frac{(1+i)^n - 1}{1} \Longrightarrow \frac{267.684{,}10}{30000} = \frac{(1+i)^7 - 1}{1}$$

$$\Longrightarrow 8.922803 = \frac{(1+i)^7 - 1}{1}$$

من الجدول المالي 3 عند تقاطع n=7 والقيمة **8.922803** وبالإسقاط نجد i=8%

2-القيمة الحالية لجملة دفعات نهاية المدة:

لتكن القيمة الحالية لجملة الدفعاتV_0 ، عدد الدفعات n ، مبلغ الدفعة a

القيمة الحالية لسلسة دفعات نهاية المدة ما هي إلا مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات في التاريخ صفر

القيم الحالية لكل دفعة على حدى في التاريخ صفر ستكون بالشكل الموالي:

*القيمة الحالية عن الدفعة الأولى : $a\,(1+i)^{-1}$

*القيمة الحالية عن الدفعة الثانية : $a\,(1+i)^{-2}$

*القيمة الحالية عن الدفعة الثالثة : $a(1+i)^{-3}$

.

.

*القيمة الحالية عن الدفعة قبل الأخيرةn : $a\,(1+i)^{-(n-1)}$

*القيمة الحالية عن الدفعة الأخيرةn : $a\,(1+i)^{-n}$

القيمة الحالية لجميع الدفعات V_0 هي مجموع القيم الحالية الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + a(1+i)^{-3} + \cdots + a\,(1+i)^{-n}$$

كما نلاحظ فإن القيمة الحالية لمجموع الدفعات An هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول $a\,(1+i)^{-n}$ أساسها$(1+i)$وعدد حدودها n

وبتطبيق قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية ينتج :

$$V_0 = a\,(1+i)^{-n}\ \frac{(1+i)^{n}-1}{1+i-1} = \frac{a\,(1+i)^{-n}\,(1+i)^{n} - 1a\,(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

ومنه
$$V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

وهو القانون الأساسي الذي يعرف رياضيا القيمة الحالية لمجموع دفعات نهاية المدة

ملاحظة: باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ عند تقاطع i و n المرافقتين

مثال :احسب القيمة الحالية ل 10 دفعات سنوية مبلغ كل دفعة 11000 ، ومعدل الفائدة سنوي7.5%

$$V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 11000\,\frac{1-(1+7.5\%)^{-10}}{7.5\%}$$

باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة 6.864081 عند تقاطع i=7.5% و n=10

$\Rightarrow V_0 = 6.864081 \times 11000$ $\Rightarrow V_0 = 75504.891$

الدفعات المتساوية غير العادية بفائدة مركبة :

(دفعات بداية المدة ، دفعات الاستثمار ،الدفعات العاجلة الفورية)

1-القيمة المكتسبة لجملة دفعات بداية المدة:

لتكن القيمة المكتسبة لجملة الدفعات A^* ، عدد الدفعات n ، مبلغ الدفعة a ،القيمة المكتسبة لسلسة دفعات بداية المدة ما هي إلا مجموع القيم المكتسبة لهذه الدفعات في تاريخ التسديد:

القيم المكتسبة لكل دفعة على حدا في تاريخ التسديد ستكون بالشكل الموالي:

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الأولى : $a\,(1+i)^n$

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الثانية : $a\,(1+i)^{n-1}$

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الثالثة : $a(1+i)^{n-2}$

.

.

*القيمة المكتسبة عن الدفعة قبل الأخيرةn : $a\,(1+i)^2$

*القيمة المكتسبة عن الدفعة الأخيرةn : $a\,(1+i)^1$

القيمة المكتسبة لجملة الدفعات الفورية A^* إذن هي مجموع القيم المكتسبة الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$A^* = a(1+i)^1 + a(1+i)^2 + a(1+i)^3 + \cdots + a(1+i)^n$$

كما نلاحظ فإن القيمة المكتسبة لجملة الدفعات A^* هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول $a(1+i)^1$ أساسها$(1+i)$وعدد حدودها n

وبتطبيق قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية

$$\sum_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\Rightarrow \quad A^* = a(1+i)\ \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1}$$

$$\Rightarrow \quad A^* = a(1+i)\ \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

وهو القانون الأساسي الذي يعرف رياضيا القيمة المكتسبة لدفعات بداية المدة

ملاحظة:القيمة $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ متوفرة في الجدول المالي رقم 03

مثال :يودع مستثمر مطلع كل سنة 12500 ون بمعدل %12 ،ماهي القيمة التي سيسحبها بعد 9 سنوات.

$$A^* = a(1+i)\ \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12500\left(1 + \%12\right)\ \frac{\left(1+\%12\right)^9 - 1}{\%12}$$

باستخدام الجدول المالي 03 عند تقاطع %12 و9سنوات نجد القيمة14.775656 ونقوم بالتطبيق العددي كما يلي :

$$A^* = 12500 \times 1.12 \times 14.775656 = 206859.184$$ ون

2-القيمة الحالية لجملة دفعات بداية المدة:

لتكن القيمة الحالية لجملة الدفعات $V0^*$ ، عدد الدفعات n ، مبلغ الدفعة a

القيمة الحالية لسلسلة دفعات بداية المدة ما هي إلا مجموع القيم الحالية لهذه الدفعات في التاريخ صفر و القيم الحالية لكل دفعة على حدى في التاريخ صفر ستكون بالشكل الموالي:

*القيمة الحالية عن الدفعة الأولى : a

*القيمة الحالية عن الدفعة الثانية : $a\,(1+i)^{-1}$

*القيمة الحالية عن الدفعة الثالثة : $a\,(1+i)^{-2}$

*القيمة الحالية عن الدفعة الرابعة : $a(1+i)^{-3}$

.

.

*القيمة الحالية عن الدفعة الأخيرة n : $a\,(1+i)^{-(n-1)}$

القيمة الحالية لجميع الدفعات الفورية V_0^* هي مجموع القيم الحالية الناتجة عن توظيف كل دفعة بفائدة مركبة على حدى كما يلي:

$$V_0^* = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a\,(1+i)^{-(n-1)}$$

كما نلاحظ فإن القيمة الحالية لمجموع الدفعات الفورية V_0^* هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول a أساسها $(1+i)^{-1}$ وعدد حدودها n

وبتطبيق قانون مجموع حدود المتتالية الهندسية ينتج :

$$V_0^* = a\,\frac{[(1+i)^{-1}]^{n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

بضرب كل من البسط والمقام في المقدار $-(1+i)$ يصبح لدينا

$$V_0^* = a(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{-(1+i)(1+i)^{-1}+(1+i)}$$

بعد الاختزال نجد

$$V_0^* = a(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

وهو القانون الأساسي الذي يعرف رياضيا القيمة الحالية لمجموع دفعات بداية المدة

ملاحظة: باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ عند تقاطع i و n المرافقتين

مثال : أحسب القيمة الحالية ل8 دفعات استثمار قيمة كل منها 10000 ون بمعدل فائدة5%

$$V_0^* = a(1+i)\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10000(1+5\%)\,\frac{1-(1+5\%)^{-8}}{5\%}$$

باستخدام الجدول المالي رقم 4 نجد القيمة 6.463213 عند تقاطع 5% و 8

بعد التطبيق العددي نجد : $V_0^* = 67863,73$

علاقة الدفعات المتساوية العادية مع الدفعات المتساوية غير العادية بفائدة مركبة :

1-علاقة القيم المكتسبة للدفعات العادية مع الدفعات غير العادية :

وثقنا في الجزئيات السابقة القانونين الأساسيين المواليين لقيمتي الجملة المكتسبة لدفعات نهاية المدة (العادية) ودفعات بداية المدة (غير العادية) على التوالي:

$$A= a\ \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

$$A^{*}= a(1+i)\ \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

ومنه نستنتج العلاقة الموالية:

$$A^{*}= a(1+i)A$$

2-علاقة القيم الحالية للدفعات العادية مع الدفعات غير العادية :

وثقنا في الجزئيات السابقة القانونين الأساسيين المواليين للقيمتين الحاليتين لدفعات نهاية المدة (العادية) ودفعات بداية المدة (غير العادية) على التوالي:

$$V_0 = a\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$V_0^{*}= a(1+i)\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ومنه نستنتج العلاقة الموالية:

$$V_0^* = a(1+i)V_0$$

مثال :تودع مؤسسة من أرباحها سنويا قيمة 4000 ون بمعدل فائدة معين .فبلغت القيمة الحالية لعدد منها 10125.18 ون في حالة اعتبارها دفعات سداد (عادية) ،أما في حالة اعتبارها دفعات استثمار (فورية) فقد بلغت قيمتها الحالية 11036.4462 ون

أحسب معدل الفائدة المطبق على هذه الدفعات.

$$V_0^* = a(1+i)V_0$$

$$11036.4462 = 4000(1+i)10125.8$$

بعد الحساب نجد : $i=9\%$