CHAP4
Approches basées sur les Observateurs

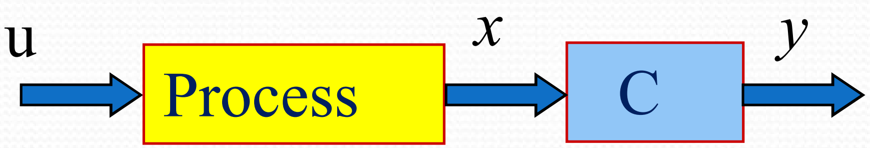
Introduction

- Principe des méthodes FDI par observateur
  - Reconstruction de la sortie du procédé à partir des observations issues des capteurs puis comparer cette estimation à la valeur réelle de cette sortie
  - En fonction de la nature du système on a:
    - **Cas déterministe : l'estimation à l'aide des observateurs**
    - **Cas stochastique : filtre de Kalman**

- Un observateur ?
  - Reconstructeur qui a pour but à partir des variables mesurées de permettre une estimation du vecteur d'état

C'est quoi un observateur?

- Etant donné:



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases},$$

$$x \in \Re^n,\ \ y \in \Re^m,\ u \in \Re^p$$

- Comment construire l'observateur, en se basant sur les erreurs de sortie?

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right] \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

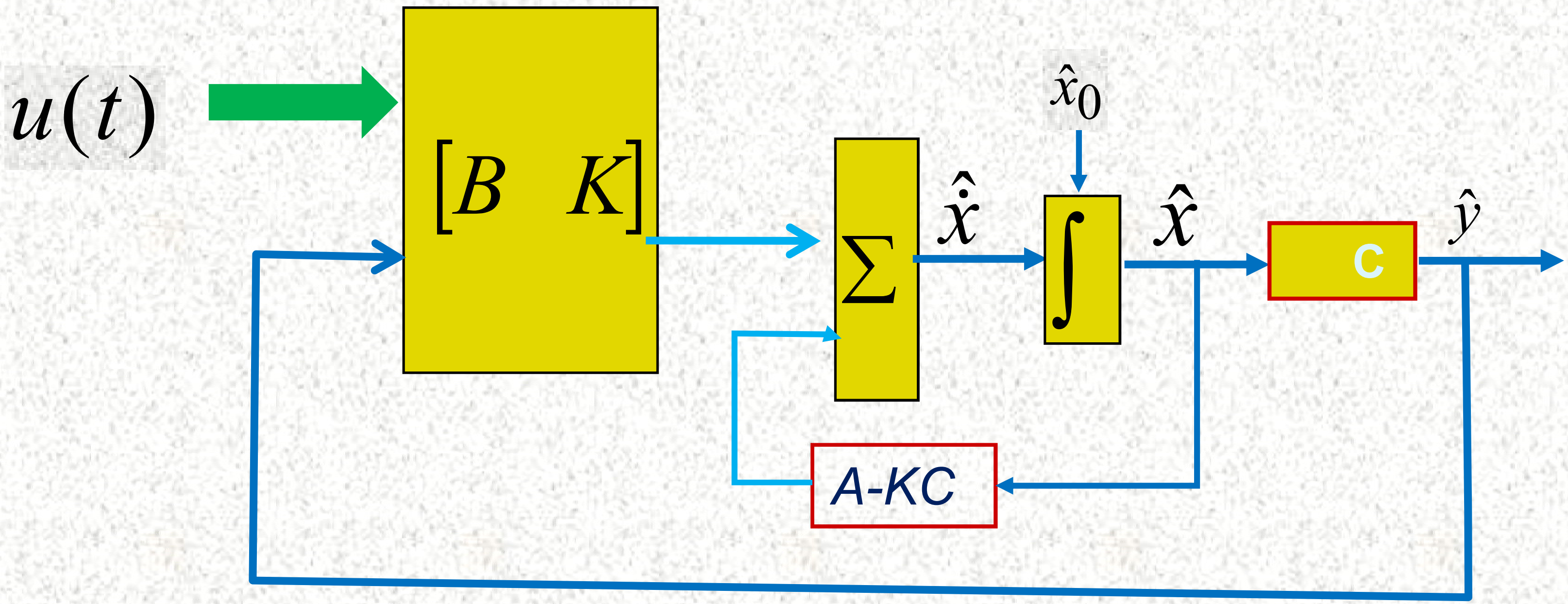
$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + [B \quad K]\begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

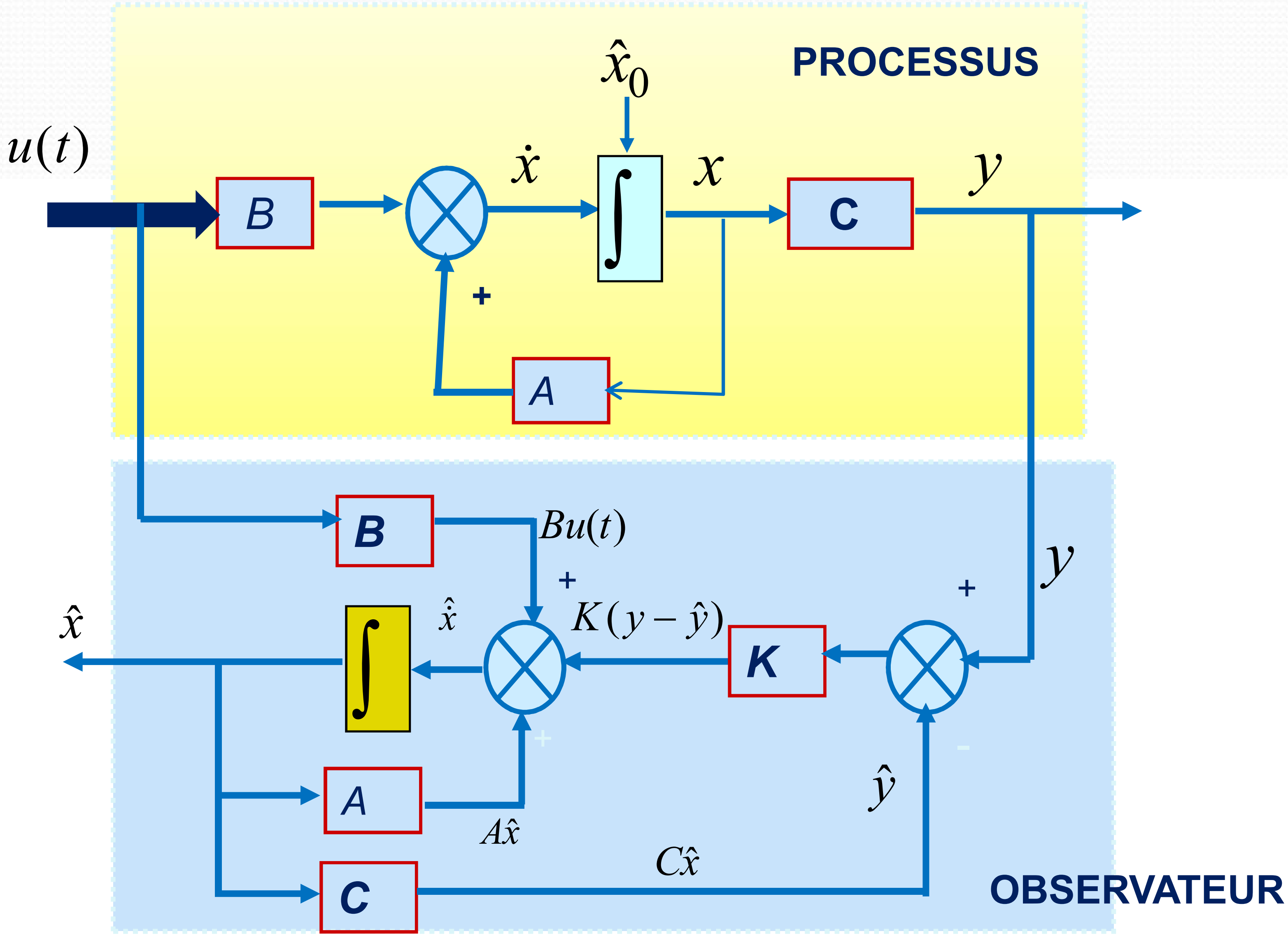
$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

Simulation de l'observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + \begin{bmatrix} B & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) \end{cases}$$



Observateur & processus



Convergence (1/2)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}, \ x \in \Re^n, \ y \in \Re^m, u \in \Re^p$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t)\right] \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\Rightarrow \dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \left(Ax + Bu\right) - \left(A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})\right) = A(x - \hat{x}) - KC(x - \hat{x})$$

Convergence (2/2)

$$\frac{d(x-\hat{x})}{dt} = \dot{\tilde{x}} = A(x-\hat{x}) - KC(x-\hat{x}) = \left(A-KC\right)\tilde{x}\right)$$

$$\tilde{x}(p) = \left(pI - A + KC\right)^{-1}\left(x_0 - \hat{x}_0\right)$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \left(A-KC\right).\varepsilon(t)$$

ε s'annule exponentiellement si (A-KC) est asymptotiquement stable i.e. valeurs propres (modes) sont à partie réelles négatives :
Comment ? : Bien choisir K

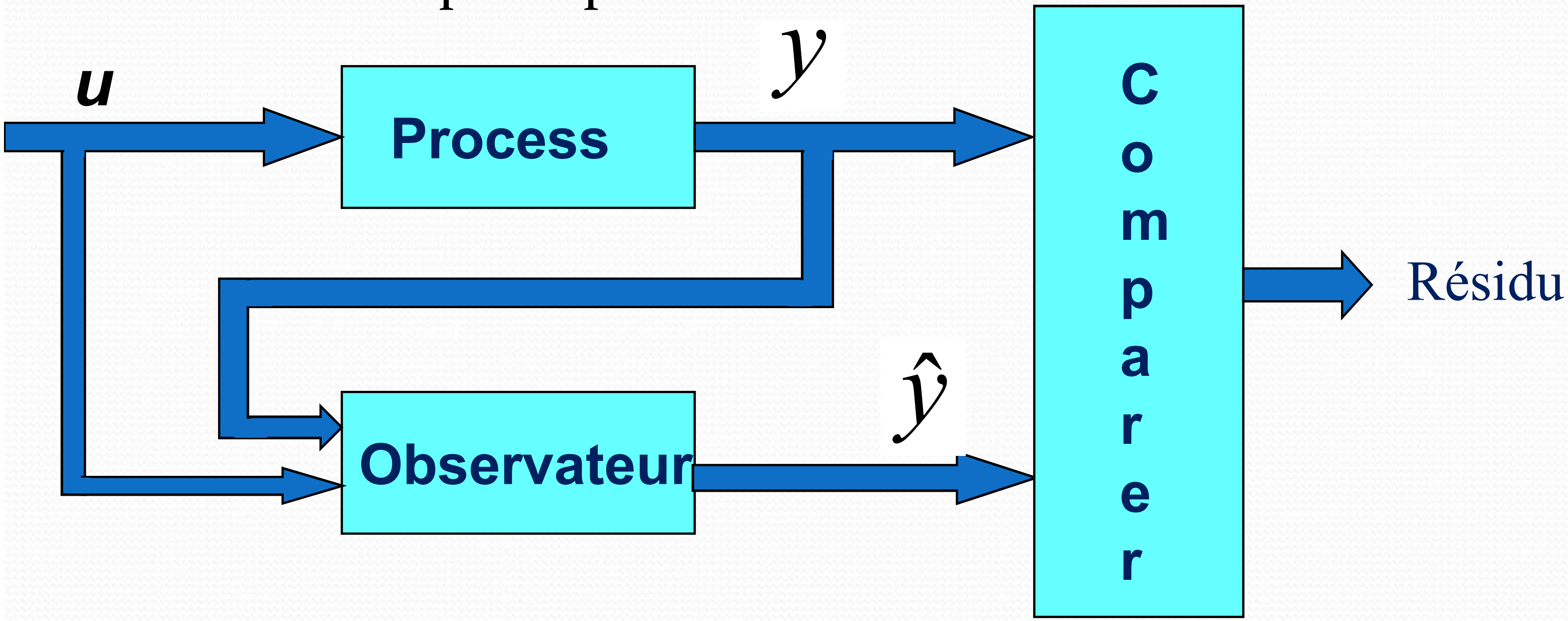
Remarques

- **Conclusion**
  - **L'erreur de reconstruction n'est pas nulle:** car les CI de l'observateur sont choisies arbitrairement et celui du système inconnu
  - **Comment annuler l'erreur** : On ne peut agit que sur K : choisir alors K pour stabiliser la matrice A-KC assurant la convergence vers zéro de l'erreur
  - **Techniques utilisées :** Placement de pôles permet de fixer la vitesse de convergence en ajustant les coefficient de K (voir sur Matlab les instructions *place* et *acker*)

Idée du diagnostic par observateur

- Impossible de générer l'erreur d'estimation : car état réel n'existe pas (car non mesuré)
- L'erreur de reconstruction de la sortie *y* peut être calculée car on suppose qu'elle est mesurée

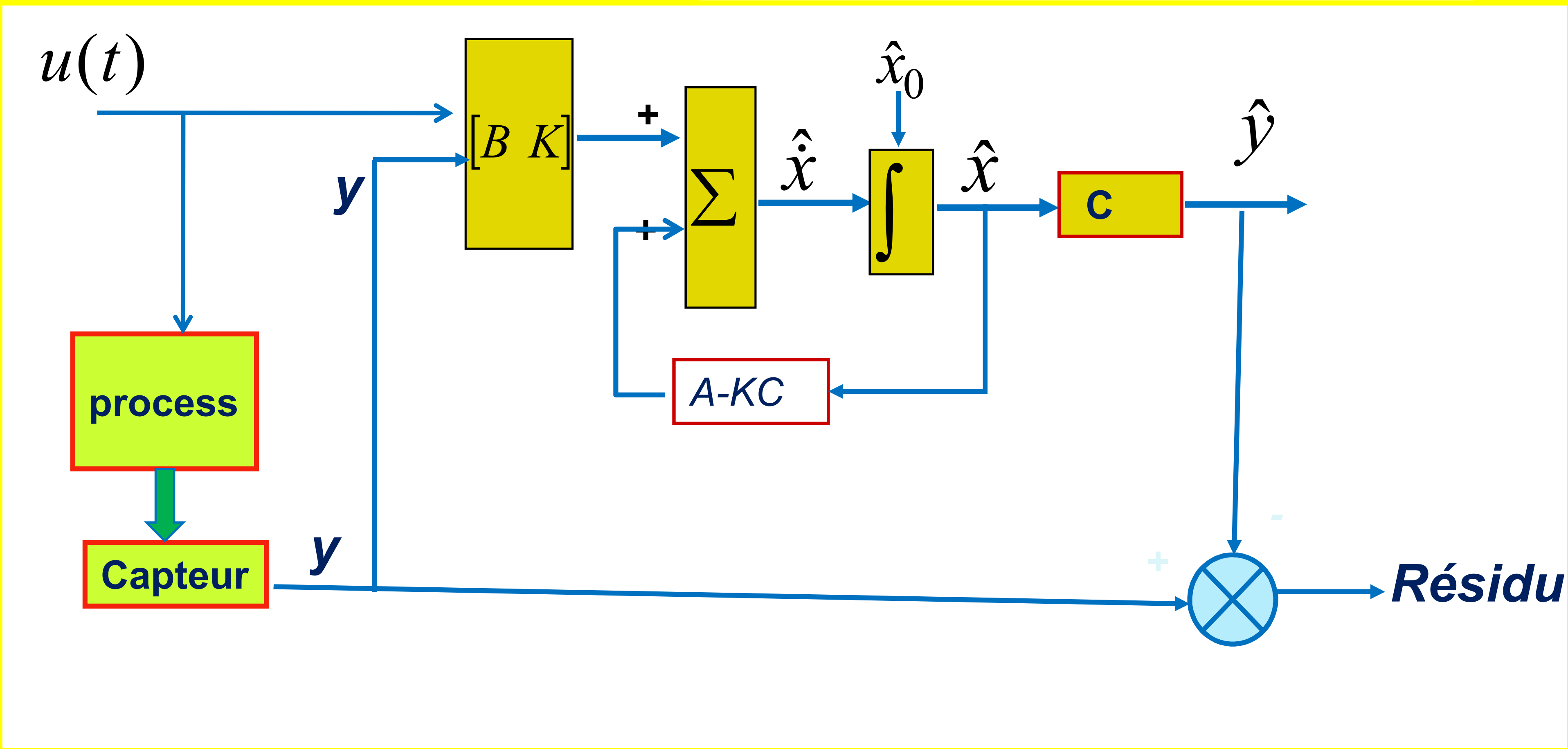
- Schéma de principe :



Comment générer les résidus ?

- **1. Par simulation**

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + [B \quad K]\begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) \end{cases}$$



Calcul du résidu en *p*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) \end{cases} \quad t = 0 \Rightarrow x(0) = x_0 \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} X(p)[pI - A] = BU(p) + x_0 \\ Y(p) = CX(p) \end{cases}$$

$$Y(p) = C[pI - A]^{-1}(BU(p) + x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

Calculde $\hat{Y}(p)$?

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\hat{Y}(p) = C[pI - A + KC]^{-1}(BU(p) + KY(p) + \hat{x}_0) \qquad \textbf{(2)}$$

Calcul du résidu en *p*

(1)-(2) : Résidu

$$Y(p) - \hat{Y}(p) = \tilde{Y}(p) = r(p)$$

$$\left[I - C(pI - A + KC)^{-1} K\right]^{-1} \left[C(pI - A)^{-1}.(BU(p) + x_0)\right] - \left[C(pI - A + KC)^{-1}\right]\left[BU(p) + \hat{x}_0\right]$$

Aprés quelques simplifications

$$r(p) = \left(I - C(pI - A + KC)^{-1}.K\right)C(pI - A)^{-1} x_0 - C(pI - A + KC)^{-1} \hat{x}_0$$

Lemme d'inversion de matrice : $(P + UV)^{-1} = P^{-1} - P^{-1}U\left(I + VP^{-1}U\right)^{-1} VP^{-1}$

Résidu

$$r(p) = C(pI - A + KC)^{-1}(\mathbf{x_0} - \hat{\mathbf{x}}_0)$$

Convergence de l'observateur et sensibilité du résidu aux bruits

- Analyse de r(p)
  - 1. L'erreur de reconstruction de la sortie dépend de l'erreur d'estimation des CI
  - 2. Dilemme convergence de l'observateur et sensibilité du résidu aux bruits
  - Choisir le gain K de façon que l'erreur converge rapidement (en imposant des valeurs propres de la matrice trés faible)
  - Mais si K augmente trop, le résidu sensible aux bruits aléatoires

Observateur de Luenberger Généralisé

- Etant donné le système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x d(t) + E_x e(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) + F_y d(t) + E_y e(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

X(t) : état,
u(t) : entrée
d(t) : défauts
e(t) : perturbations ou bruits

$x \in \Re^n,\ \ y \in \Re^m,\ u \in \Re^p,$

A, B, C, D, F, E : matrice de dimensions appropriées

1. On veut estimer la sortie y(t)

   - On utilise alors un observateur de gain K

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K\left[y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\right] \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) + Du(t) \\ \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Erreurs d'estimation

- 2. Equations dynamiques des erreurs d'estimation

- (1)- (2) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{d(x-\hat{x})}{dt} = \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = (A-KC)\tilde{x}(t) + F_x d(t) + E_x e(t) \\ \tilde{y} = y - \hat{y} = C.\tilde{x}(t) + F_y d(t) + E_y e(t) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases} \qquad (3)$$

- 3. Transformée de Laplace de l'erreur de sortie

$$\tilde{y}(p) = G_d(p).d(p) + G_e(p).e(p) + G_0(p).\tilde{x}(p) \qquad (4)$$

$$G_d(p) = C[pI - A + KC]^{-1}(F_x - KF_y) + F_y$$

$$G_e(p) = C[pI - A + KC]^{-1}(E_x - KE_y) + E_y$$

$$G_0(p) = C[pI - A + KC]^{-1}$$

Remarque sur le résidu

$$\tilde{y}(p) = G_d(p).d(p) + G_e(p).e(p) + G_0(p).\tilde{x}(p) \qquad (4)$$

1. Le résidu est sensible aux défauts d(p), aux perturbations et bruits e(p), mais aussi aux CI. L'observation converge vers 0 pour $t \to \infty$, on peut négliger les transitoires dues aux CI.

2. si d=0, e=0, on obtient l'expression obtenue précédemment.

3. Le gain K de l'observateur influe de façon semblable sur d et e : Alors il est difficile de générer un résidu sensible aux défauts à détecter mais insensible aux perturbations

4. L'analyse des matrices G permet de savoir si les composants de d sont isolables des autres

Différentes influences sur le résidu

- 1. Influence du bruit sur le résidu
  - Soit e(t) un bruit réalisation d'une variable aléatoire Esp(e(t)=0

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) + E_y e(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{Observateur} \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + K(y - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y} = C\hat{x}(t) + Du(t) + E_y e(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

  - Trouvons le résidu en fréquentiel r(p)
    - En utilisant les équations ci-dessus on obtient les expressions des erreurs de reconstruction (en posant E_y=1 D=0)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - KC)\tilde{x}(t) - Ke(t) \xrightarrow{\text{Fréquentiel}} \tilde{x}(p) = (pI - A + KC)^{-1}(x_0 - \hat{x}_0 - Ke(p))$$

$$\tilde{y}(t) = r(t) = C\tilde{x}(t) + e(t)$$

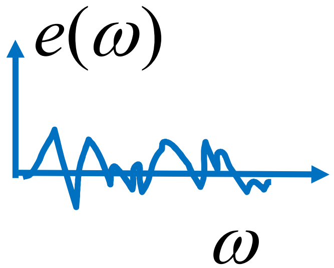
$$\tilde{y}(p) = r(p) = C(pI - A + KC)^{-1}(x_0 - \hat{x}_0) + \left[I - C\left(pI - A + KC^{-1}\right)K\right]e(p)$$

Influence du bruit sur le résidu

- Négligeons d'abord l'influence des CI

$$r(p) = \left[I - C\left(pI - A + KC\right)^{-1}.K\right]e(p)$$

- Etude de l'influence du point de vue fréquentiel de *e* sur *r(p)*



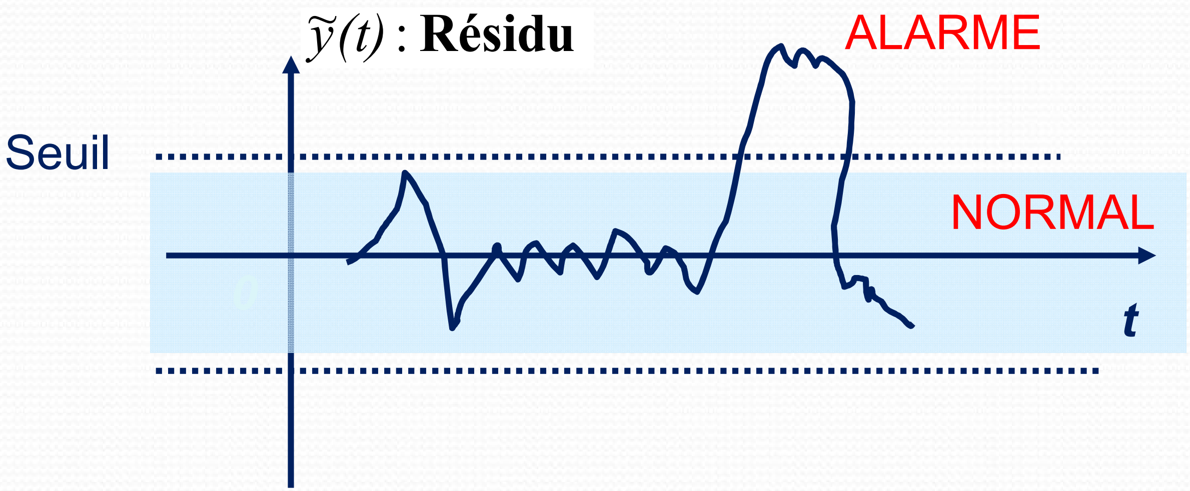
$$r(p) = \left(I - C(pI - A + KC\right)^{-1}$$

$r(\omega)$

- <u>Réduction du bruit *e(jω)* sur *r(jω)*</u> : chercher un gain de réglage K, en plaçant la pulsation de coupure du filtre telle que l'influence du bruit soit réduite

Calcul des seuils d'alarme du résidu

- Calcul en régime stationnaire des seuils d'alarme
  - Déterminer un seuil dans la procédure de décision de la présence de fautes en fonction de la variance de y au delà duquel le résidu pourra être considéré nul (il y a réellement alarme)

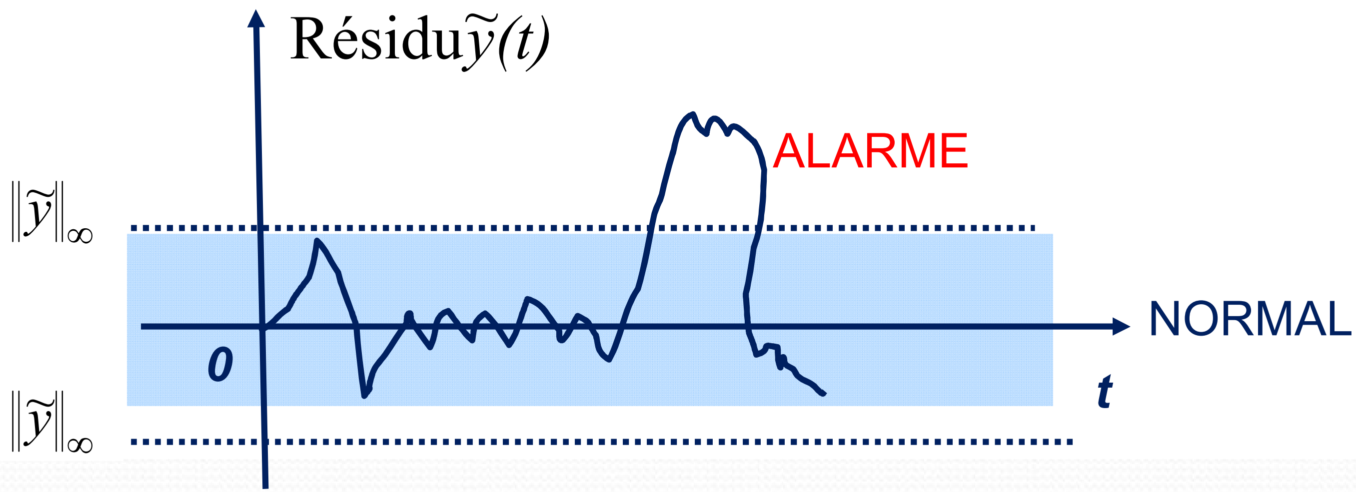


2.Influence d'une erreur de modélisation

- **Problématique**
  - En pratique il existe toujours une erreur de modélisation
  - L'Observateur est construit à partir du modèle alors la sortie reconstruite est sensible aux erreurs de modélisation
  - Le diagnostic se base sur l'écart entre sortie reconstruite et celle réelle
    - **Difficile de séparer entre les erreurs dues à la modélisation et celles dues aux fautes**
- **But**
  - Construire un observateur sensible aux défauts et peu sensible aux erreurs de modélisation

Décision

1. Si la valeur du résidu est dans le seuil : alors diagnostic réservé car l'erreur est peut être due aux incertitudes
2. Au-delà de ce seuil l'amplitude du résidu témoigne de la présence d'une faute distincte des erreurs du modèle



Observateurs à entrées inconnues

- **Problématique**
  - Modèles où la sortie des actionneurs n'est pas mesurées
  - L'évaluation des RRAs nécessite la connaissance des mesures et des entrées
  - Alors : on utilise des observateurs à entrées inconnues (UIO : Unknown Input Observers)

- **Principe**
  - Soit un système avec des entrées connues $u(t)$

  et entrées inconnues $\overline{u}(t)$

Observateurs à entrées inconnues

- Soit le système à entrée inconnue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F\overline{u}(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}$$

u:Connu, $\overline{u}$: inconnu

soit une variable intermédiaire :

$$z(t) = T\hat{x}(t)$$

- Considérons alors l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nx(t) + Gu(t) + Ky(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

- L'erreur de reconstruction sera alors :

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) = x(t) - z(t) + Ey(t) = x(t) - z(t) + ECx(t)$$

$$\tilde{x}(t) = (I + EC)x(t) - z(t)$$

- En dérivant puis en remplaçant x(t) et z(t) on obtient:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (I + EC)\left(Ax(t) + Bu(t) + F\overline{u}(t)\right) - Nz(t) + Gu(t) + Ky(t)$$

Posons : P = I+EC

$$\dot{\tilde{x}}(t) = N\tilde{x}(t) + (PA - NP - KC)x(t) + (PB - G)u(t) + PF\overline{u}(t)$$

L'erreur de reconstruction de l'état du UIO

$$\dot{\tilde{x}}(t) = N\tilde{x}(t) + (PA - NP - KC)x(t) + (PB - G)u(t) + PF\bar{u}(t)$$

- L'entrée étant inconnue , on tente d'avoir : $\begin{array}{l}\dot{\tilde{x}}(t) = N\tilde{x}(t)\\ \tilde{y} = C\tilde{x}(t)\end{array}$

- Cette reconstruction tend alors asymptotiquement vers zéro ssi:

$$\begin{cases} P = I + EC \\ KC = PA - NP \\ G = PB \\ PF = 0 \\ N \textbf{ stable} \end{cases} \Rightarrow F + ECF = 0 \Rightarrow E = -F(CF)^{-1} \Rightarrow \begin{cases} P = I - F(CF)^{-1}C \\ G = PB \\ N = PA - KC \\ L = K - NE \\ N \textbf{ stable} \end{cases}$$

- **Procédure de calcul du UIO**
  - Calcul de l'inverse généralisée de CF
  - Déduire P, puis G
  - On fixe les pôles de N, on déduit K puis N
  - On calcule L

L'entrée inconnue n'intervient pas dans l'expression du résidu.

Estimation de l'entrée inconnue

- L'équation du système initial :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F\overline{u}(t) \\ y = Cx(t) \end{cases}$$

u:Connu

$\overline{u}$: inconnu

- Si (CF)⁻¹ existe, on aura

$$\overline{u}(t) = (CF)^{-1}\left(\frac{dy(t)}{dt} - CAx(t) - CBu(t)\right)$$