REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

---

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion.

Cours de mathématiques 2

Conformément aux programmes des premières année LMD tronc commun

Sciences Economiques
Sciences Commerciales
Sciences de Gestion
Comptabilité et Finance

Présentée par

Mme Rahou née Fekih Sihem.

Année universitaire: 2019-2020

Programme mathématiques 2 du deuxième Semestre

Chapitre I:

Matrices - calcul du déterminant - inverse d'une matrice.

Chapitre II:

Généralités

Résolution des systèmes d'équations linéaires Cramériens par la méthode de la matrice inverse- la méthode de Cramer et la méthode de Gauss.

Résolution des systèmes d'équations linéaires non Cramériens.

Chapitre III:

La diagonalisation des matrices carrées.

Chapitre 1

Les matrices

Définition 1.1 *Une matrice A de $n \times p$ éléments; est un tableau de nombres à n* ***lignes*** *et p* ***colonnes.***

Une telle matrice est dite de dimension (n,p) ,de format (n,p) ou même d'ordre (n,p) . Format =(nombre de lignes, nombre de colonnes)

On écrit $A \in M_{(n,p)}$. $M_{(n,p)}$ désigne l'ensemble de matrices à n lignes et p colonnes.

Remarque 1.1 *On note a_{ij} l'élément de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne* ***et*** *la $j^{ième}$ colonne*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1/2 & 0 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Donner la dimension de chaque matrice.
2. Determiner a_{12}, a_{34}, b_{22}, b_{33} .

1.1 Matrices particulières

1.1.1 Matrice nulle

C'est une matrice notée $O_{(n,p)} \in M_{(n,p)}$, dont tous ses éléments sont nuls.

$$O_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Matrice colonne

C'est une matrice de dimension $(n;1)$. Elle ne contient qu'une seule colonne.

Exemple 1

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{(3,1)}.$$

1.1.3 Matrice ligne

C'est une matrice de dimension $(1;p)$. Elle ne contient qu'une seule ligne.

Exemple 2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{(1,4)}.$$

1.1.4 Matrice carrée

C'est une matrice de dimension $(n;n)$ .Nombre de lignes est égale au nombre de colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2 *On appelle* ***la diagonale*** *ou* ***les éléments diagonaux****, les éléments* a_{ii} ***d'une matrice carrée****. On écrit*

$$diago(A) = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}).$$

Exemple 3 *Reprenons les exemples précédents des matrices carrées*

$$diago(A) = (2, 0).$$
$$diago(B) = (1, 5, 3).$$

1.1.5 La matrice diagonale

C'est une matrice carrée dont tous ses éléments NON DIAGONAUX sont nuls.

$$D_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2 ***Attention:*** *Ne pas confondre la diagonale d'une matrice carrée avec la matrice carrée diagonale !*

1.1.6 La matrice identité (très importante)

Elle est notée Id, c'est une **matrice carrée diagonale**, dont tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1.

Exemple 4

$$Id_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Id_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.7 La matrice triangulaire superieure

C'est une **matrice carrée**, dont tous ses éléments au dessous de la diagonale sont nuls.

1.1.8 La matrice triangulaire inférieure

C'est une **matrice carrée**, dont tous ses éléments au dessus de la diagonale sont nuls.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{triangulaire superieure}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Triangulaire inferieure}$$

1.1.9 Matrice symétrique

C'est une **matrice carrée,** telle que $\forall i \neq j \qquad a_{ij} = a_{ji}$

1.1.10 Matrice antisymétrique

C'est une **matrice carrée,** telle que $\forall i \neq j \qquad a_{ij} = -a_{ji}$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{matrice symétrique}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 8 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice antisymétrique}$$

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Transposition

- La transposée d'une matrice A est une matrice notée A^T ou A' obtenue en échangeant les lignes de A en colonnes.

  - Si $A \in \mathcal{M}(n,p)$ alors $A^T \in \mathcal{M}(p,n)$.

Remarque 1.3 $(AB)^t = B^t A^t$ *attention au changement de l'ordre.*

Exercice 1 *Déterminer les matrices transposées des matrices suivantes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Égalité - Addition et soustraction

Pour pouvoir effectuer les opérations égalité $(=)$, addition $(+)$ et la soustraction $(-)$ entre les matrices il faut que:

1. les matrices soient de mêmes dimensions.
2. L'opération (=, +, -) se fait terme à terme.

1.2.3 Multiplication d'une matrice par un nombre réel k.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n,p)$ alors $kA = (ka_{ij}) \in \mathcal{M}(n,p)$
Chaque terme de la matrice est multiplié par le nombre k.

$$\text{A=}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{B=}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{C=}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer si c'est possible: $A - 2B,\ A + C,\ 3Id_3 - C$.

1.2.4 Produit matriciel

Produit vectoriel (Produit ligne par colonne)

On définit le produit ligne par colonne appelé **produit vectoriel par:**

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ... \ + x_ny_n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (14)$$

Produit Matriciel

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n,p)$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(p,q)$.,alors $A \times B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}(n,q)$. Chaque élément c_{ij} de la matrice produit C est obtenu en multipliant

la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B. Pour effectuer le produit $A \times B$ il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.

$$A_{(n,p)} \times B_{(p,q)} = C_{(n,q)}$$

Exercice 2 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer $A \times B$ puis $B \times A$*
2. *Que remarquez vous?*

Corrigé

- **Calcul de** $A \times B$

A est de format (2,2) et B est de format (2,3), donc A×B est possible.

$$A_{(2,2)} \times B_{(2,3)} = C_{(2,3)}$$

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}_{(2,3)}$ où

$$\begin{cases} c_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 0.1 + 1.(-5) = -5 \\ c_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.2 + 1.0 = 0 \qquad \text{et} \\ c_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.3 + 1.(-1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{21} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = -4.1 + (-1).(-5) = 1 \\ c_{22} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4.2 + (-1).0 = -8 \\ c_{23} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -4.3 + (-1).(-1) = -11 \end{cases}$$

Ainsi : $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & -11 \end{pmatrix}$.

- **Calcul de** $A \times B$

$B_{(2,3)} \times A_{(2,2)}$ n'est pas possible car le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A.

Donc le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exercice 3 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A \times B$ et $A \times C$, Que remarquez-vous?

Corrigé

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
A \times C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

On remarque

1. $A \times B = A \times C = 0$ mais aucune matrice n'est nulle. Donc un produit de matrices est nul ne veut pas dire que forcément l'une des deux matrices est nulle.
2. $A \times B = A \times C \nRightarrow (B = C)$

- $A \times B \neq B \times A$ le produit matriciel n'est pas commutatif.
- $(A \times B = O) \nRightarrow (A = O) \vee (B = O)$
- $A \times B = A \times C \nRightarrow B = C.$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(A \times B)^t = B^t \times A^t$ attention au changement de l'ordre.
- $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq \left(A^2 + 2AB + B^2\right)$. (car $AB \neq BA$)
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$

1.2.5 Puissances successives d'une matrice

$A^2 = A \times A$

$A^3 = A \times A \times A,$

$A^n = \underbrace{A \times A \times .... \times A}_{n\ fois.}$

On ne peut calculer la puissance d'une martice que si elle est carrée.

Remarque 1.4 ***Attention*** *pour calculer A^n, il ne faut pas élever les éléments de A à la puissance n, cela n'a aucun sens mathématique.*

Définition 1.3 *On dit que A est* ***Nilpotente d'ordre n s'il existe*** *un entier naturel n tel.que $A^n = 0$.*

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

On vérifie facilement que $A^2 = 0$. Donc A est **nilpotente** d'ordre 2.

Puissances d'une matrice diagonale

Si D est une matrice **diagonale** alors D^n est diagonale avec $diagoD^n = [(a_{11})^n, (a_{22})^n, (a_{33})^n]$.

Plus précisement

si $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ alors $D^n = \begin{pmatrix} (a_{11})^n & 0 & 0 \\ 0 & (a_{22})^n & 0 \\ 0 & 0 & (a_{33})^n \end{pmatrix}$.

1.3 Inverse d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n. L'inverse de A (notée A^{-1}),si elle existe,est la matrice qui satisfait

$$AA^{-1} = A^{-1}A = Id_n$$

Avec Id_n c'est la matice identité d'ordre n.

1.3.1 Propriétés

1. Si A est inversible, alors $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

2. Si A et B sont 2 matrices carrées inversibles de même dimension, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (attention au changementde l'ordre).

3. Si A **est diagonale** avec *diago* $[a_{11}, a_{22}, a_{33}]$ alors A^{-1} est diagonale avec $diagoA^{-1} = \left[\left(\frac{1}{a_{11}}\right), \left(\frac{1}{a_{22}}\right), \left(\frac{1}{a_{33}}\right)\right]$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{a_{11}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{a_{22}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{a_{33}}\right) \end{pmatrix}$$

1. Soient M et N deux matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient:

$$MN = NM = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice inverse de M.

2. Soit A une matrice carée d'ordre n qui satisfait: $A^2 + 6A - 3Id_n = 0$.

   Déterminer la matrice inverse de A.

Définition 1.4 *Le déterminant est un nombre que l'on associe à chaque matrice carrée A, et qui permet de savoir si elle est inversible ou non.*

On le note $\det(A)$ *ou* $|A|$

Si $\det(A) \neq 0$*, alors A est inversible.*

1.4 Calcul du déterminant

1.4.1 Déterminants d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$

$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,alors $\det(M) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$

$\det(M) \neq 0$ donc M est inversible.

1.4.2 Règle générale du calcul des déterminants (méthode des cofacteurs)

Considérons A une matrice carrée d'ordre 3.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Définition 1.5 *1) Le **cofacteur** $\mathbf{C_{ij}}$ du terme $\mathbf{a_{ij}}$ est donné par la formule:*

$$\mathbf{C_{ij}} = (-1)^{i+j}\ \mathbf{M_{ij}}.$$

*Où $\mathbf{M_{ij}}$ (**mineur de** $\mathbf{a_{ij}}$) est le déterminant de la sous matrice obtenue en supprimant la ième ligne et la jème colonne de A*

*2) Le déterminant est égal à **la somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque par leur cofacteurs respectifs***

- Ainsi en développant suivant la deuxième ligne:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} - a_{23}C_{23}$$

Remarque 1.5 *1) Les signes de $(-1)^{i+j}$ sont alternés à partir du signe $+$ de a_{11}.*

$$\textit{signe de } (-1)^{i+j} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

2) Pour calculer le déterminant, la ligne ou la colonne suivant laquelle nous développons est laissée à notre choix. Nous pouvons donc choisir celle qui contient le plus d'éléments nuls (s'il y en a) pour faciliter les calculs.

Exemple 5 $det\ A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

- ***En développant selon la premire ligne:***

$$\text{det A} = +(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Exemple 6 • ***En développant selon la 3^{ième} colonne***

$$detA = +0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

1.4.3 Règle de Sarrus.

La règle de Sarrus est une méthode simple est rapide pour calculer un déterminant $3\times 3. Elleconsiste$

1. Recopier sous le déterminant les deux premières lignes de A, puis on trace des 6 diagonales
2. Multiplier ensuite les produits des nombres sur ces six diagonales.
3. Additionner les produits des diagonales qui «déscendent» et soustrait les produits des diagonales qui «montent».

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$$

Exemple 7 *det A*= $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +3$

Remarque 1.6 ***Attention !*** *La règle de Sarrus ne marche que pour des déterminants d'ordre troi.*

1.4.4 Propriétés du déterminant

1. Si A possède une ligne (ou colonne) de « 0 », alors $|A| = 0$.
2. Si deux colonnes sont identiques ou multiples l'une de l'autre, alors $|A| = 0$
3. Si A est diagonale ou triangulaire (inf ou sup), alors $|A|$ est le produit de ses éléments diagonaux. En particulier, $|Id_n| = 1$.
4. Si A et B sont 2 matrices carrées de même dimension, alors$|AB| = |A||B|$.
5. $|A^t| = |A|$
6. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Exercice 4 *Calculer les déterminants suivants:*

$$|A1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}, |A2| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, |A3| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, |A4| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix},$$

$$|A5| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, |A6| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, |A7| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1.5 Calcul de la matrice inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A est inversible, (c'est-à-dire $\det A \neq 0$), alors sa matrice inverse est donnée par la formule suivante:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(coA)^t$$

Exercice 5 *Calculer la matrice inverse de* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- *det* $A = 3$ *et* $comM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
- $(comM)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$
- *Donc* $A^{-1} =$

Remarque 1.7

1. Pour vérifier le résultat, il suffit de multiplier A par son inverse A^{-1}. Il faut alors trouver la matrice identité.

   Pour notre exemple:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

2. $Id^{-1} = Id$.

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires.

2.1 Généralités

On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système du type:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1p}\ x_p & = & b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2p}\ x_p & = & b_2 \\ & & \\ & & \\ a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \cdots + a_{np}\ x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- Les nombres a_{ij} et b_i sont des réels donnés. Les x_i sont les inconnues (ou les variables) du système (S).
- Résoudre le système (S) revient à déterminer les valeurs $(x_1, x_2, ..., x_p)$ vérifiant (S).
- Le système est dit homogène si et seulement si $b_1 = ... = b_n = 0$.

Exemple 8 *Soit le système suivant*

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - \ x_2 + 5\ x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3 & = & 8 \\ -\ 2x_2 - 4x_1 + \ x_3 - 3x_4 + 6 & = & 0 \end{array}\right.$$

(S) est un système linéaire de 3 équations et à 4 inconnues.

Le système homogène associé au système précédent est le système :

$$(S)\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 + 5\ x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 & = & 0 \\ -\ 2x_2 - 4x_1 + \ x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Définition 2.1 *Le système (S) est dit* ***compatible*** *si et seulement si il admet au moins une solution $(x_1, x_2, ..., x_p)$, et* ***incompatible*** *(ou impossible)s'il n'admet pas de solution.*

Remarque 2.1 *Un système homogène est toujours compatible car $(x_1, x_2, ..., x_p) = (0, ..., 0)$ est toujours solution d'un système homogène.*

2.2 Opérations élémentaires

l'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si on effectue sur les équations **les opérations élémentaires** suivantes :

Changer l'ordre des équations

Multiplier une équation par une constante non nulle

Ajouter à une équation un multiple d'une autre équation

Changer l'ordre des variables

2.3 Représentation matricielle

Tout système d'équations linéaires s'écrit sous **la forme matricielle** suivante:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$A_{(n,p)} \quad X_{(p,1)} \quad = \quad B_{(n,1)}$$

avec: La matrice $A_{(n,p)} = (aij)$c'est la matrice des coéfficients.

$X_{(p,1)}$ le vecteur des inconnues du système

$B_{(n,1)}$ le vecteur du second membre (des termes constants) .

Exemple 9 *La* ***forme matricielle*** *du système suivant*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccc} 8 & = & 2x- & y & \\ 0 & = & 3x+ & z- & 10 \\ y- & z & = & 13 & \end{array}\right. \text{ est}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$A_{(3,3)} \ X_{(3,1)} = B_{(3,1)}$$

2.4 Résolution des systèmes d'équations linéaires Cramériens

Définition 2.2 ***Système de Cramer***

Un système ***AX=B*** *est dit de Cramer si:*

1- Le système est **carré** *(nombre d'équations=nombre d'inconnues)*

2- $\mathbf{detA} \neq \mathbf{0}$

Théorème 2.1 ***Tout système de Cramer AX=B admet une solution unique.***

2.4.1 Résolution par inversion de la matrice.

Considérons le système de Cramer . AX=B

Puique $\mathbf{detA} \neq \mathbf{0}$ donc la matrice inverse A^{-1} existe $\left(A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{detA}}{}^t\,(cofA)\right)$

$$\begin{aligned} AX &= B \overset{multiplions\ A^{-1} \text{ à gauche}}{\Longrightarrow} \underbrace{A^{-1}A}_{Id}\ X = A^{-1}B \\ &\Longrightarrow X = A^{-1}B \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Attention* $X = A^{-1}B$ *et non pas* BA^{-1} (*le produit n'est pas commutatif*)

Exercice 6 *Soit le système* (S_2) : $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 8 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

1. Le système (S_2) est il de Cramer?
2. Résoudre (S_2) par la méthode de la matrice inverse.

Corrigé.

1. La forme matricielle de (S_2) est donnée par

   $(S_2) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$ AX=B

   $det\ A = 2$

   Le système (S_2) est carré avec $det\ A$ non nul, donc le système est de Cramer.

2. $det\ A = 2 \Longrightarrow A^{-1}$ existe $A^{-1} = \frac{1}{\mathbf{detA}}{}^{t}(cofA)$,

   Le calcul de A^{-1} donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AX &= B \overset{multiplions\ A^{-1} \text{ à gauche}}{\Longrightarrow} \underbrace{A^{-1}A}_{Id}\ X = A^{-1}B \\ \text{Donc} \qquad X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.4.2 Méthode de Cramer

Principe de résolution.

1. Calculer $\Delta = \mathbf{detA}$.

   - si $\mathbf{detA} = \mathbf{0}$ le système n'est pas de Cramer, on ne peut pas utiliser cette méthode.
   - Si $\mathbf{detA} \neq \mathbf{0}$

2. Calculer Δ_{x_i} (c'est le déterminant obtenu en rempaçant la colonnes i de la variable x_i par le second membre B).

3. $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$ $\quad \left[x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}\right]$.

Exercice 7 *Résolution du système précédent* (S_2) *par la méthode de Cramer.*

$$(S_2) : \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 8 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

- $\Delta = detA = 2$

- $\Delta_x = \det \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -2x \Longrightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1.$

- $\Delta_y = \det \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1.$

- $\Delta_z = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \Longrightarrow z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2.$

2.4.3 La méthode de Gauss

Definition 1 *On appelle matrice augmentée d'un système linéaire, sa matrice augmentée de son second membre B*

On la note $[A|B]$.

Principe de la méthode

La méthode de Gauss consiste à:

- **(1)** Écrire la matrice augmentée du système.

- **(2)** Effectuer sur cette matrice des opérations élémentaires entre les lignes, dans un ordre bien déterminé, de façon à transformer la matrice A du système en une matrice triangulaire superieure.$\acute{A}$, c.à.d faire apparaitre que des zéros sous la diagonale de A (En général, si la matrice A est d'ordre 3, alors l'ordre de ces opérations est : (L2 avec L1) , (L3 avec L1) puis (L3 avec L2).)

- **(3)** Résoudre le système échelonné obtenu $\acute{A}X = \acute{B}$ par substitution, et en remontant de la dernière équation jusqu'à la première équation.

Exemple 10 *Résolution du système* (S) *par la méthode de Gauss.*

$$(S):\begin{cases} x+y-z=8\\ x+2y-3z=5\\ 3x-3y-z=2\end{cases}$$

On appelle L_i la ligne i du système linéaire.

La matrice Augmentée est $[A|\,B]$

$$\begin{array}{c} L_1\rightarrow\\ L_2\rightarrow\\ L_3\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8\\ 1 & 2 & -3 & 5\\ 3 & -3 & -1 & 2\end{array}\right]$$

Pour transformer la matrice A en une matrice triangulaire superieure, on a besoin de trois 0 **sous** la diagonale. On fera donc trois étapes pour apparaitre un 0 par étape:

- $1^{ère}$ étape, à faire entre L_1 et L_2 :

  Pour notre exemple on fait: $L'_2=(L_2-L_1)$

$$\begin{array}{cccccc} L_2 & 1 & 2 & -3 & 5 & \\ L_1 & 1 & 1 & -1 & 8 & \Rightarrow\\ L'_2=L_2-L_1 & 0 & 1 & -2 & -3 & \end{array}\quad \begin{array}{c} L_1\rightarrow\\ L'_2\rightarrow\\ L_3\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 3 & -3 & -1 & 2\end{array}\right]$$

- $2^{ème}$ étape, à faire entre L_1 et L_3 :

  Pour notre exemple on fait: $L'_3=(L_3-3.L_1)$

$$\begin{array}{cccccc} L_3 & 3 & -3 & -1 & 2 & \\ 3.L_1 & 3 & 3 & -3 & 24 & \Rightarrow\\ L'_3=L_3-3.L_1 & 0 & -6 & 2 & -22 & \end{array}\quad \begin{array}{c} L_1\rightarrow\\ L'_2\rightarrow\\ L'_3\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & -6 & 2 & -22\end{array}\right]$$

- $3^{ème}$ étape, à faire entre L'_3 et L'_2:

  Pour notre exemple on fait: $L''_3=(L'_3+6.L'_2)$

$$\begin{array}{cccccc} L'_3 & 0 & -6 & 2 & -22 & \\ 6.L'_2 & 0 & 6 & -12 & -18 & \Rightarrow\\ L''_3=L'_3+6.L'_2 & 0 & 0 & -10 & -40 & \end{array}\quad \begin{array}{c} L_1\rightarrow\\ L'_2\rightarrow\\ L''_3\rightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 8\\ 0 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -10 & -40\end{array}\right]$$

Après ces trois étapes, on revient à la forme du système avec la nouvelle matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 8 & ...(1) \\ \quad y - 2z = -3 & ...(2) \\ \quad\quad - 10z = -40 & ...(3) \end{cases}$$

Et on résout par remontée:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3) \Leftrightarrow z = 4 \\ (2) \Leftrightarrow y = -3 + 2(4) = 5 \\ (1) \Leftrightarrow x = 8 + (4) - (5) = 7 \end{cases}$$

Remarque 2.3 ***Attention***

1. Les opérations que nous faisons doivent être **linéaires**, c'est-à-dire, on ne peut pas multiplier ou diviser deux lignes entre elles, ni multiplier par 0.
2. Si $a_{11} = 0$ on fait une permutation entre l_1 et l_2 pour gagner une étape de calcul. Comme par exemple

$$\begin{array}{cc} L1 & \longrightarrow \\ L2 & \longrightarrow \\ L3 & \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{cc} L2 & \longrightarrow \\ L1 & \longrightarrow \\ L3 & \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Les systèmes de Cramer ont une solution **unique**, donc quelque soit la méthode utilisée,.on doit trouver le même résultat (la même solution).
4. Tout système de **Cramer Homogène** , admet la solution nulle dite triviale comme **unique** solution.

En effet, puisque tout système de cramer possède une solution unique, et puisque la solution nulle $(x_1, x_2, ..x_n) = (0, 0, .., 0)$ est une solution apparante donc elle sera l'unique solution cherchée.

2.5 Résolution des systèmes d'équations linéaires non Cramériens

Definition 2 *(Rappelons la loi de Morgan)*

Système de Cramer = (Syst carré: AX=B) $\wedge$ *(detA*$\neq 0$)

Système non Cramerien = (le syst n'est pas carré "debout ou couché") $\vee$ *(carré mais det A=0).*

2.5.1 Principe de résolution des systèmes non Cramerien

Étape 1 : De chaque système non Cramerien à n équations et p inconnues on extrait un sous-système Cramerien d'ordre maximum r. On le note (S_c)

Les équations et les inconnues qui forment le sous-système sont dites principales. Celles hors le sous-système sont dites auxiliaires ou non principales. Les équations non principales sont les équations de vérification.

Étape 2: La résolution

On résout le système formé des r équations principales, où les inconnues non principales (si elles existent) sont considérées comme des paramètres et sont reportées au second membre

Rappelons que le sous-système est Cramérien, on peut donc le résoudre soit par la matrice inverse, la méthode de Cramer ou la méthode de Gauss.

Étape 3. Conditions de compatibilité du système.

On remplace les solutions trouvées du sous-système dans les équations de vérification, on aura 2 cas possibles:

Cas 1: Si les équations de vérification sont vérifiées, le système principal possède soit une solution unique, soit une infinité de solutions (si les solutions sont paramétrées).

Cas 2: Si les équations de vérification présentent une contradiction, le système sera impossible (pas de solution), il est dit incompatible.

2.5.2 Système couché

Définition 2.3 *Un ystème couché est un système qui a* ***plus d'inconnues que d'équations.***

Exercice 8 *Résolution du système couché* $(S1)$

2.5.3 $(S1) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y - 7z = 4 \end{cases}$

Étape 1: Choisir un sous-système Cramérien (carré + déteminant de sa matrice des coéfficients non nul), par exemple

Le déterminant **principal** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. On en déduit ue:

- x et y sont les inconnues principales.
- z est l'**inconnue** non principale ($z = \alpha \in \mathbb{R}$ un paramétre)
- Pas d'équation de vérification.

Le sous système à résoudre est:

$$(S_c) \begin{cases} x + 2y = 4 - 3z \\ -x + 2y = 4 + 7z \end{cases} = \begin{cases} L1 & \longrightarrow & x + 2y = 4 - 3\alpha \\ L2 & \longrightarrow & -x + 2y = 4 + 7\alpha \end{cases}$$

Étape 2: La résolution

Remark 1 *On peut utiliser n'importe quelle méthode pour résoudre ce syst, mais celle la plus pratique, et pour ne pas calculer trop de déterminants, on utilise la méthode de Gauss.*

- $(S) \Longrightarrow \begin{cases} L1 & \longrightarrow x + 2y = 4 - 3\alpha \\ L1 + L2 & \longrightarrow 4y = 8 + 4\alpha \quad \Longrightarrow y = 2 + \alpha \end{cases}$
- $L1 \Longrightarrow x = -5\alpha$

Nous avons une infinité de solutions de la forme: $S = \{(x, y, z) = (-5\alpha, 2 + \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

- Dans le cas des systèmes couchés, on a toujours une infinité de solutions, (à cause du paramètre), on dit qu.on a un "espace" de solutions.
- On peut avoir même deux paramètres dans la résolution d'un système, par exemple, pour résoudre le système

  $(S_3) : \{x - y + 2z = 1$

avec une équation et 3 inconnues, il suffit de considérer y et z comme paramètres, notre équation devient $x = y - 2z + 1$,

on pose y et z sont des paramètres; $y = \alpha$ et $z = \beta$

(S_3) a une infinité de solutions $\quad S = \{(x, y, z) = (\alpha - 2\beta + 1, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

2.5.4 1- Système debout

Définition 2.4 *Un système debout est un système qui a* ***plus d'équations que d'inconnues.***

Exercice 9 *Résolution du système debout* $(S2) : \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

Étape 1: Choisir un sous-syst Cramérien

Le déterminant **principal** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$. On en déduit :

- Les 2 premières équations sont principales
- L3 est l'équation de vérification.

Étape 2: La résolution

Le nouveau système à résoudre est

- $(S_c) : \begin{cases} L1 & \longrightarrow & x - 2y = 5 \\ L2 & \longrightarrow & 2x + 3y = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L1 & \longrightarrow x - 2y = 5 \\ 2L1 - L2 & \longrightarrow -7y = 7 \Longrightarrow y = -1 \end{cases}$

- $L1 \Longrightarrow x = 3$

la solution trouvée est $(x, y) = (3, -1)$

Étape 3: Remplaçons cette solution $(3, -1)$ **dans l'équation de vérification**

$L3 : 3x + 2y = 7 \Longrightarrow 3\,(3) + 2\,(-1) = 7$ c'est bien vérifiée, Donc le système $(S2)$ possède une solution unique

S=$\{(x, y) = (3, -1)\}$

1.Prenons le même système avec une autre équation de vérification:

$L3 : 3x+2y = 2$, alors là en remplaçant $(x, y) = (3, -1)$ on aura une contradiction 7=2; donc le système est impossible , pas de solution.

2. Dans le cas **des systèmes debout**, on peut avoir soit **UNE SEULE** solution (si l'équation de vérification est satisfaite), soit **AUCUNE** solution (si l'équation de vérification n'est pas satisfaite).

2.5.5 Système carré avec dét**A**$\neq 0$

$$(S_3) : \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 7 \\ 3x - 4y + 13z = 8 \end{cases}$$

Le système(S_3) n'est pas Cramérien puisque le déterminant de sa matrice des coéfficients est nul.

Étape 1: Choisir un sous-syst Cramérien

Le déterminant **principal** $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. On en déduit :

- x et y sont les inconnues principales.
- z est l'**inconnue** non principale ($z = \alpha \in \mathbb{R}$ un paramétre)
- L3 est une équation de vérification.

Étape 2: La résolution

Le nouveau système à résoudre est

- $(S_c) : \begin{cases} x-2y=2-3z \\ 2x-3y=7-8z \end{cases} = \begin{cases} L1 & \longrightarrow & x-2y=2-3\alpha \\ L2 & \longrightarrow & 2x-3y=7-8\alpha \end{cases}$

- $(S_c) \Longrightarrow \begin{cases} L1 & \longrightarrow & x-2y=5 \\ 2L1-L2 & \longrightarrow & -y=-3+2\alpha \Longrightarrow y=3-2\alpha \end{cases}$

- $L1 \Longrightarrow x=8-7\alpha$

La solution trouvée est donc $(x,y,z)=(8-7\alpha,3-2\alpha,\alpha)\,,\alpha\in\mathbb{R}$.

Étape 3: Remplaçons la solution $(x,y,z)=(8-7\alpha,3-2\alpha,\alpha)$ dans l'équation de vérification

L3: $3(8-7\alpha)-4(3-2\alpha)+13\alpha=12\neq 8$ contradiction, donc le système (S_2) n'admet pas de solution.

Chapitre 3

Diagonalisation des matrices carrées

Définition 3.1 *Diagonaliser une matrice carrée A revient à trouver une matrice de passage P qui soit inversible et une matrice diagonale D telles que: $A = PDP^{-1}$.*

Attention, les matrices carrées ne sont pas toutes diagonalisables. Pour savoir si une matrice carrée donnée est diagonalisable ou pas, on doit passer par trois étapes:

1. Calculer ses valeurs propres de la matrice A.
2. Calculer ses vecteurs propres associés aux valeurs propres
3. Appliquer un théorème de diagonalisation (voir les paragraphes ci dessous).

3.1 valeurs propres

Définition 3.2 *1) Soit A une matrice carrée d'ordre n, $\lambda \in \mathbb{R}$ et X un vecteur non nul de dimension n.*

Si la relation $AX = \lambda X$ est satisfaite alors λ est appelée ***valeur propre*** *de A et* **X** ***un vecteur propre correspondant à $\boldsymbol{\lambda}$.***

3.1.1 Polynôme caractéristique

On appelle Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A et on note $P(\lambda)$, le déterminant de la matrice $(A - \lambda Id)$, c'est-à-dire $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$.

3.1.2 Les valeurs propres

Les valeurs propres d'une matrice carrée A sont les racines de son polynôme caractéristique, c'est-à-dire les solutions de l'équation $P(\lambda) = 0$.

Une polynôme de degré n a généralement n solutions. mais elles ne sont pas forcement toutes distinctes.

Multiplicité de la valeur propre

Lorsque la valeur propre λ apparaît une seule fois dans le polynôme caractéristique, on dit qu'elle est **simple** et si elle apparaît k fois dans, on qu'elle **est de multiplicité k.**

Exercice 10 *Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes:*

Exemple 11 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Valeurs propres de A:** $P(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = 0 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0. \end{aligned}$$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(-10) = 49$, les racines de $P(\lambda)$ sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 5$.
Donc $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 5$ sont des valeurs propres simples de A.

- **Valeurs propres de B:** $P(\lambda) = \det(B - \lambda Id) = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(B - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= (1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 1$ de multiplicité 2 (ou valeur propre double), et $\lambda_2 = 2$ valeur propre simple.

- **Valeurs propres de C:** $P(\lambda) = \det(C - \lambda Id) = 0$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(C - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 6-\lambda & -3 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= -\left(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12\right) = 0. \end{aligned}$$

Rappelons que pour résoudre la dernière équation il faut chercher une solution apparante dans l'ensemble$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Dans notre cas $\lambda_1 = 2$ est une racine apparente, on fait donc une division Euclidienne par $\lambda - \lambda_1$ pour trouver les deux autres racines.

$$\begin{array}{r|l}
\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 & \lambda - 2 \\ \hline
-2\lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \cline{1-1}
-5\lambda^2 + 16\lambda - 12 & \\
10\lambda & \\ \cline{1-1}
6\lambda - 12 & \\
0 &
\end{array}$$

$$P(\lambda) = -(\lambda - 2)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right).$$

Reste à factoriser $\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right)$ par le calcul du discriminant Δ.

$\Delta = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

$P(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$

Ainsi $\lambda_1 = 2$ est valeur propre double, et $\lambda_2 = 3$ valeur propre simple de C

3.2 Les vecteurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n , λ_i les valeurs propres de A

- **Rappel:** Rappelons que **par définition chaque valeur propre** λ_i annulle le déterminant de $(A - \lambda_i Id)$,et par suite les systèmes $(A - \lambda_i Id)\,X = 0$ ne sont pas Cramériens, et leurs solutions sont paramétrés (avec des paramètres) "Chapitre précédent".

Ainsi chaque système homogène $(A - \lambda_i Id)\,X = 0$ admet un espace de solutions appelé espace propre.

Définitions 3.1

- L'**espace propre** associé à une valeur propre λ_i, est l'**espace de solutions** du système non Cramérien $(A - \lambda_i Id)\, X = 0$. Il est noté $E(\lambda_i)$.

$$E(\lambda_i) = \{X \in \mathbb{R}^n \diagup (A - \lambda_i Id)\, X = 0\}\; Avec X \neq \mathbf{0}.$$

- **Le vecteur propre associé à la valeur propre** λ_i est la solution (non-nulle) du système $(A - \lambda_i Id)\, X = 0$. se sont les vecteurs qui engendrent l'espace propre E_{λ_i}.

- On appelle **dimension de l'espace propre** le nombre de vecteurs engendrant l'espace E_{λ_i}. On note $dim E_{\lambda_i}$.

(**Astuce**: $dim E_{\lambda_i}$ c'est exactement le nombre de paramètres dans l'espace propre E_{λ_i})

Exemple 12 *Déterminer les vecteurs propres associées aux valeurs propres des matrices A, B et C précédentes.*

Remarque 3.1 *Pour chercher les vecteurs propres associées à λ_i, il suffit de résoudre $(A - \lambda_i Id)\, X = 0$ (pour chaque λ_i)*

- **Les vecteurs propres de A**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = -2 \text{ et } \lambda_2 = 5.$$

Pour $\lambda_1 = -2$

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_1 Id)\,X=0 &\Leftrightarrow (A-(-2)Id)\,X=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y=0\\ 4x+3y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-3}{4}y\\ y=\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}\\
X=\begin{pmatrix} \frac{-3}{4}\alpha\\ \alpha\end{pmatrix} &= \alpha\begin{pmatrix} \frac{-3}{4}\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le vecteur engendrant l'espace propre est $V_1 \begin{pmatrix} \frac{-3}{4}\\ 1\end{pmatrix}$, donc $dimE_{\lambda_1} = 1$.

Pour $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda_2 Id)\,X=0 &\Leftrightarrow (A-(5)Id)\,X=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+3y=0\\ 4x-4y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=y\\ y=\alpha\in\mathbb{R}\end{cases}
\end{aligned}$$

ou bien: $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} = \alpha\in\mathbb{R}$

Le vecteur engendrant l'espace propre est $V_2 \begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$, donc $dimE_{\lambda_2} = 1$.

Vecteurs propres de B

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$ valeur propre double, et $\lambda_2 = 2$ valeur propre simple.

Pour $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned}
(B-\lambda_1 Id)\,X=0 &\Leftrightarrow (B-(1)Id)\,X=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0\\ 0=0\\ x-y+z=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z\\ y\in\mathbb{R}\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$X=\begin{pmatrix} \alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}.$$

Les vecteurs engendrant l'espace propre sont $V_1\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$,$V_2\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ donc $dimE_{\lambda_1} =$

2.

Pour $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned}
(B-\lambda_2 Id)\,X=0 &\Leftrightarrow (B-(2)Id)\,X=0\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x=0\\ -y=0\\ x-y=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z\in\mathbb{R}\end{cases}
\end{aligned}$$

ou bien

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur engendrant l'espace propre est $V_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $dimE_{\lambda_2} = 1$.

- **Vecteurs propres de C**

$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$ est valeur propre double, et $\lambda_2 = 3$ valeur propre simple de C

Pour $\lambda_1 = 3$

$$\begin{aligned}
(C - \lambda_1 Id)\, X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (C - (3)Id)\, X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 & (1) \\ 3y - 3z = 0 & (2) \\ -x + 4y - 3z = 0 & (3) \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$

La variable $z = \alpha \in \mathbb{R}$, et on garde l'équation (3) comme équation de vérification: (2) $\Leftrightarrow y = z$ on remplace dans (1) $\Leftrightarrow -2x + 4\,(z) - 2z = 0 \Leftrightarrow x = z$.

(3) $\Leftrightarrow -(z) + 4(z) - 3z = 0$, vérifiée.

Finalement

$$\begin{cases} x = z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur engendrant l'espace propre est $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $dimE_{\lambda_1} = 1$.

Pour $\lambda_2 = 2$

$$\begin{aligned}
(C - \lambda_2 Id)\, X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (C - (2)Id)\, X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y - 2z = 0 & (1) \\ 4y - 3z = 0 & (2) \\ -x + 4y - 2z = 0 & (3) \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

La variable $z = \alpha \in \mathbb{R}$, et on garde l'équation (3) comme équation de vérification: (2) $\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}z$ on remplace dans (1) $\Leftrightarrow -x + 4\left(\frac{3}{4}z\right) - 2z = 0 \Leftrightarrow x = z$.
(3) $\Leftrightarrow -(z) + 4\left(\frac{3}{4}z\right) - 2z = 0$, vérifiée.

Finalement

$$\begin{cases} x = z \\ y = \frac{3}{4}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{3}{4}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur engendrant l'espace propre est $V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $dimE_{\lambda_2} = 1$.

3.3 Théorèmes de Diagonalisation

Théorème 3.1 *Soit A une matrice carrée d'ordre n, Si A possède n valeurs propres simples distinctes, alors A est diagonalisable.*

Theorem 1

Théorème 3.2 *Si chaque valeur propre de A a un espace propre de dimension égale à sa multiplicité, alors, A est diagonalisable.*

Théorème 3.3 *Si A est une matrice carrée diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$, où D est la matrice carrée* ***diagonale*** *formée de toutes les valeurs propres de A et P est la matrice* ***de passage*** *formée par les vecteurs propres associés à λ_i de manière ordonnée.*

Théorème 3.4 *Si A est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$, non diagonale, qui possède une seule valeur propre réelle de multiplicité n, alors A n'est pas diagonalisable dans ($\mathcal{M}(\mathbb{R})$).*

3.3.1 Proprietés

1. $dét\ A = dét\ D = (\lambda_1)(\lambda_2)...(\lambda_n)$.
2. **La trace** de A est définie par:$tr(A) = tr(D) = (\lambda_1) + (\lambda_2) + ... + (\lambda_n)$.
3. Le calcul des puissances d'une matrice diagonalisable est grâce à la formule

$$A^m = PD^mP^{-1}$$

Reprenons donc nos exemples.

Exemple 1:

Pour la matrice A, on a:

Les valeurs propres	*multiplicité*	dim E_λ
$\lambda_1 = -2$	$1(simple)$	1
$\lambda_2 = 5$	$1(simple)$	1

A est d'ordre 2 et elle a 2 valeurs propres **simples**, alors A est diagonalisable, (par le théorème 1).

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

Pour la matrice B, on a:

Les valeurs propres	*multiplicité*	$\dim E_\lambda$
$\lambda_1 = 1$	$2(double)$	2
$\lambda_2 = 2$	$1(simple)$	1

Donc B est diagonalisable, (par le théorème 2: la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre).

$$B = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 3 :

Pour la matrice C, on a:

Les valeurs propres	*multiplicité*	$\dim E_\lambda$
$\lambda_1 = 3$	$2(double)$	1
$\lambda_2 = 2$	$1(simple)$	1

Donc C n'est **pas** diagonalisable.

3.3.2 Utilité de la diagonalisation

En diagonalisant une matrice M, on trouve P et D qui vérifient $M = PDP^{-1}$, On peut alors calculer les puissances énièmes de M facilement, puisque:

$M = PDP^{-1}$

$M^2 = M.M = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^2P^{-1}$ $\qquad (P^{-1}P = Id).$

$M^3 = M^2.M = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}...$

Ainsi $M^n = PD^nP^{-1}$.

$$\begin{aligned} M = PDP^{-1} &\implies MP = PD\overbrace{P^{-1}P}^{Id} \\ &\implies P^{-1}MP = D \end{aligned}$$