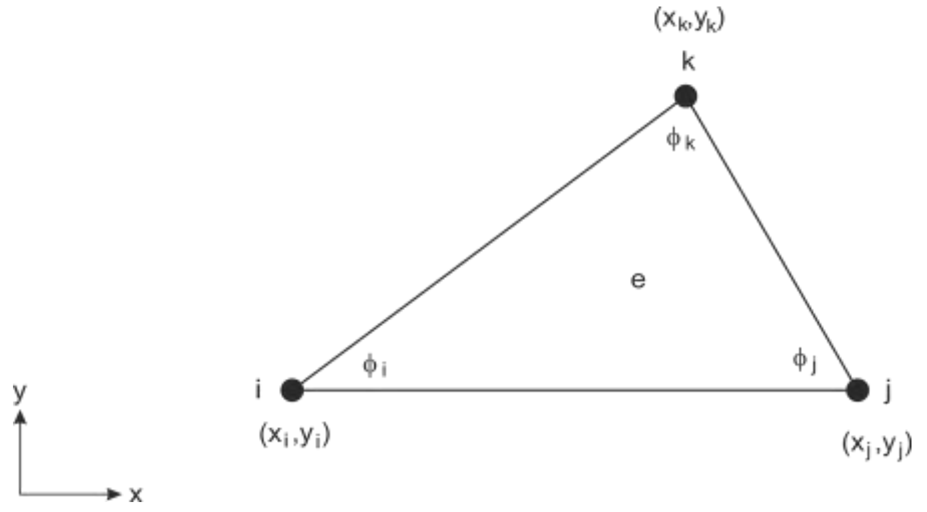
CHAPITRE 3 : FONCTIONS PARAMETRES ET FONCTIONS DE FORME

3. ELEMENTS BIDIMENSIONNELS :

3.1. ELEMENT TRIANGULAIRE A TROIS NOEUDS :

$\phi = \phi(x, y)$ = fonction paramètre



3.1.1. COORDONNEES GLOBALES :

$$\phi = c_1 + c_2 x + c_3 y \tag{121}$$

L'équation (121) peut s'écrire :

$$\phi = [1 \quad x \quad y]\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{122}$$

En $x = x_i$ et $y = y_i$ (nœud i), nous avons $\phi = \phi_i$; en $x = x_j$ et $y = y_j$ (nœud j), nous avons $\phi = \phi_j$; et en $x = x_k$ et $y = y_k$ (nœud k), nous avons $\phi = \phi_k$. Donc :

$$\begin{aligned} \phi_i &= c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i \\ \phi_j &= c_1 + c_2 x_j + c_3 y_j \\ \phi_k &= c_1 + c_2 x_k + c_3 y_k \end{aligned} \tag{123}$$

Le système d'équations (123) peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \tag{124}$$

L'équation (124) donne :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} \tag{125}$$

Substitution de l'équation (125) dans l'équation (122) donne :

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} \tag{126}$$

L'équation (126) est de la forme :

$$\phi = N_i(x,y)\phi_i + N_j(x,y)\phi_j + + N_k(x,y)\phi_k \tag{127}$$

Les fonctions de forme sont données par :

$$N_i(x,y) = m_{11} + m_{21}x + m_{31}y \;\; ; \;\; N_j(x,y) = m_{12} + m_{22}x + m_{32}y \;\; ; \;\; N_k(x,y) = m_{13} + m_{23}x + m_{33}y \tag{128}$$

où

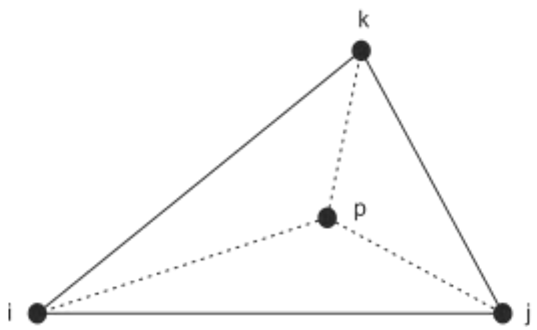
$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2A} \;\; ; \;\; m_{21} = \frac{y_j - y_k}{2A} \;\; ; \;\; m_{31} = \frac{x_k - x_j}{2A} \\ m_{12} &= \frac{x_k y_i - x_i y_k}{2A} \;\; ; \;\; m_{22} = \frac{y_k - y_i}{2A} \;\; ; \;\; m_{32} = \frac{x_i - x_k}{2A} \\ m_{13} &= \frac{x_i y_j - x_j y_i}{2A} \;\; ; \;\; m_{23} = \frac{y_i - y_j}{2A} \;\; ; \;\; m_{31} = \frac{x_j - x_i}{2A} \end{aligned} \tag{129}$$

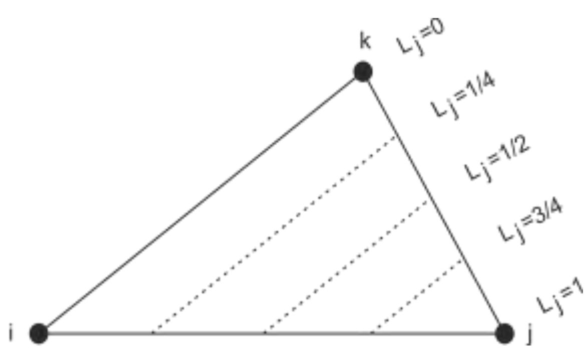
et

$$A = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = \text{aire du triangle ijk} \tag{130}$$

3.1.2. <u>COORDONNEES D'AIRE :</u>

p = point (pas un nœud)





Les coordonnées d'aire sont définies comme suit :

$$L_i = \frac{\text{aire} \quad \text{pjk}}{\text{aire} \quad \text{ijk}} \quad ; \quad L_j = \frac{\text{aire} \quad \text{pki}}{\text{aire} \quad \text{ijk}} \quad ; \quad L_j = \frac{\text{aire} \quad \text{pij}}{\text{aire} \quad \text{ijk}} \tag{131}$$

Nous avons :

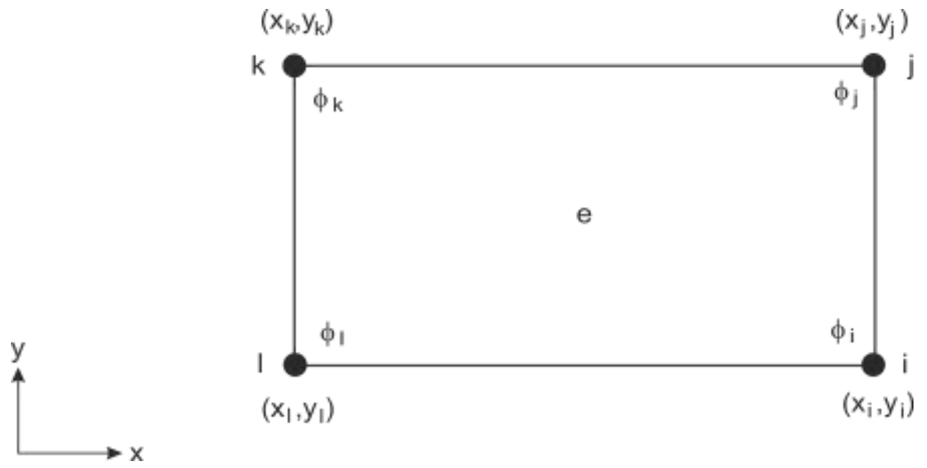
$$0 \le L_i \le 1 \quad ; \quad 0 \le L_j \le 1 \quad ; \quad 0 \le L_k \le 1; \quad L_i + L_j + L_k = 1 \tag{132}$$

Les fonctions de forme sont reliées aux coordonnées d'aire par :

$$L_i = N_i \quad ; \quad L_j = N_j \quad ; \quad L_k = N_k \tag{133}$$

3.2. ELEMENT RECTANGULAIRE A QUATRE NOEUDS :

$\phi = \phi(x, y)$ = fonction paramètre



3.2.1. COORDONNEES GLOBALES :

$$\phi = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 xy \tag{134}$$

L'équation (134) peut s'écrire :

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \tag{135}$$

En $x = x_i$ et $y = y_i$ (nœud i) , nous avons $\phi = \phi_i$; en $x = x_j$ et $y = y_j$ (nœud j) , nous avons $\phi = \phi_j$; en $x = x_k$ et $y = y_k$ (nœud k), nous avons $\phi = \phi_k$; et en $x = x_l$ et $y = y_l$ (nœud l), nous avons $\phi = \phi_l$. Donc :

$$\begin{aligned} \phi_i &= c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i + c_4 x_i y_i \\ \phi_j &= c_1 + c_2 x_j + c_3 y_j + c_4 x_j y_j \\ \phi_k &= c_1 + c_2 x_k + c_3 y_k + c_4 x_k y_k \\ \phi_l &= c_1 + c_2 x_l + c_3 y_l + c_4 x_l y_l \end{aligned} \tag{136}$$

Le système d'équations (136) peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \tag{137}$$

L'équation (137) donne :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{Bmatrix} \tag{138}$$

Substitution de l'équation (138) dans l'équation (135) donne :

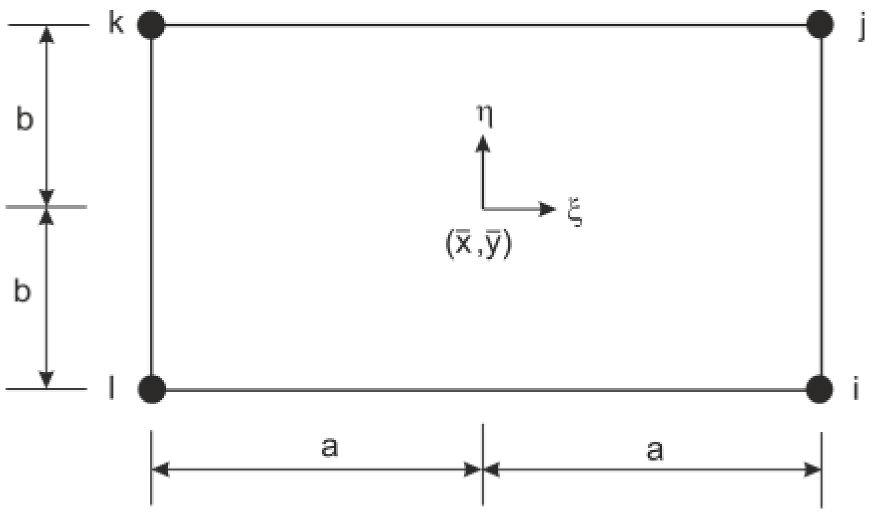
$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{Bmatrix} \tag{139}$$

L'équation (139) est de la forme :

$$\phi = N_i(x,y)\phi_i + N_j(x,y)\phi_j + N_k(x,y)\phi_k + N_l(x,y)\phi_l \tag{140}$$

Les formes explicites des fonctions de forme sont rarement données en fonction des coordonnées globales (x ,y). Elles sont souvent données en fonction des coordonnées locales.

3.2.2. COORDONNEES LOCALES :



Les coordonnées $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont données par :

$$\bar{x} = \frac{x_j + x_k}{2} = \frac{x_i + x_l}{2} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{y_i + y_j}{2} = \frac{y_l + y_k}{2} \tag{141}$$

Les coordonnées locales ξ et η sont normalisées comme suit :

$$\xi = \frac{x - \bar{x}}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y - \bar{y}}{b} \tag{142}$$

où

$$-1 \leq \xi \leq 1 \quad ; \quad -1 \leq \eta \leq 1 \tag{143}$$

Les fonctions de forme peuvent être obtenues à partir des équations (34), (35), et (36). Elles sont données par :

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad ; \quad N_j = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_k &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad ; \quad N_l = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \end{aligned} \tag{144}$$