CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONTRAINTES

4.1 CARACTERISTIQUES DE L'ELEMENT FINI :

Si les équations (8) et (12) sont valables sur le domaine entier alors elles sont aussi valables sur un élément fini. Donc

$$\int_{V^e} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V^e} \{\delta u\}^T \{b\} dV + \int_{S^e} \{\delta u\}^T \{s\} dS + \sum_{p=1}^{n} \{\delta u\}^T \{f_p\} \tag{13}$$

Le vecteur déplacement est donné par :

$$\{u\} = [N]\{a^e\} \tag{14}$$

Le vecteur déformation est donné par :

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \tag{15}$$

où $[L]$ est un opérateur différentiel.

Substitution de (14) dans (15) donne :

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{a^e\} \tag{16}$$

Posons

$$[B] = [L][N] \tag{17}$$

Donc l'équation (16) s'écrit :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a^e\} \tag{18}$$

Puisque $[B]$ ne contient aucun des déplacements nodaux alors :

$$\{\delta\varepsilon\} = [B]\{\delta a^e\} \tag{19}$$

et

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \{\delta a^e\}^T [B]^T \tag{20}$$

De la même manière, nous avons

$$\{\delta u\} = [N]\{\delta a^e\} \tag{21}$$

$$\{\delta u\}^T = \{\delta a^e\}^T [N]^T \tag{22}$$

Substitution des équations (20) et (22) dans l'équation (13) donne :

$$\{\delta a^e\}^T \left\{ \int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV - \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV - \int_{S^e} [N]^T \{s\} dS - \sum_{p=1}^{n} [N]^T \{f_p\} \right\} = 0 \tag{23}$$

Puisque $\{\delta a^e\}^T$ est un vecteur arbitraire est n'est pas nécessairement nul, alors :

$$\int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV - \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV - \int_{S^e} [N]^T \{s\} dS - \sum_{p=1}^{n} [N]^T \{f_p\} = 0 \tag{24}$$

Substitution de l'équation (9) dans l'équation (24) donne :

$$\begin{aligned} \left[\int_{V^e} [B]^T [D][B] dV \right] \{a^e\} &= \int_{V^e} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV - \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV + \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV \\ &+ \int_{S^e} [N]^T \{s\} dS + \sum_{p=1}^{n} [N]^T \{f_p\} \end{aligned} \tag{25}$$

L'équation (25) est de la forme :

$$[K^e]\{a^e\} = \{f^e\} \tag{26}$$

où

$$\{f^e\} = \{f^e_{\varepsilon_0}\} - \{f^e_{\sigma_0}\} + \{f^e_b\} + \{f^e_s\} + \{f^e_{cp}\} \tag{27}$$

et où nous définissons la matrice de rigidité élémentaire par :

$$[K^e] = \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV \tag{28}$$

et les cinq vecteurs élémentaires des forces nodales par :

$$\{f^e_{\varepsilon_0}\} = \int_{V^e} [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV \tag{29}$$

$$\{f^e_{\sigma_0}\} = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV \tag{30}$$

$$\{f^e_b\} = \int_{V^e} [N]^T \{b\} dV \tag{31}$$

$$\{f^e_s\} = \int_{S^e} [N]^T \{s\} dS \tag{32}$$

$$\{f^e_{cp}\} = \sum [N]^T \{f_p\} \tag{33}$$