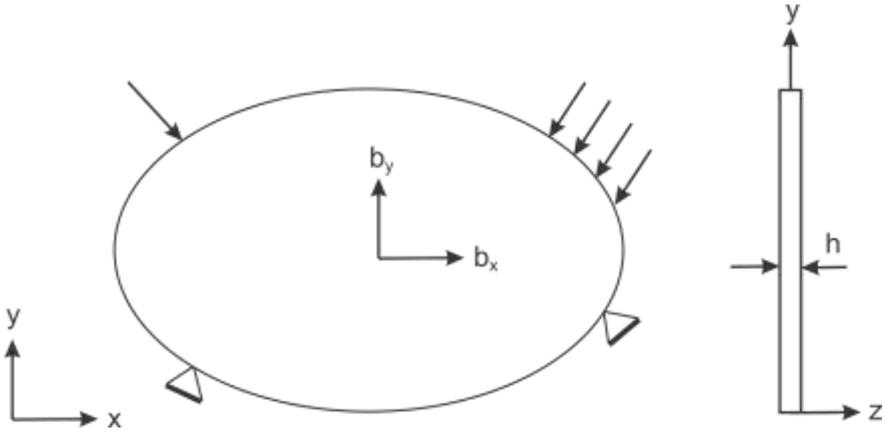
CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CONTRAINTES

4.1 CONTRAINTES BIDIMENSIONNELLES (ETAT DE CONTRAINTE PLANE) :

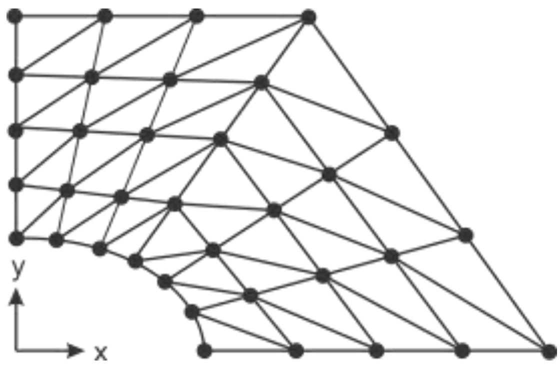
Un problème de contrainte plane est celui d'une plaque relativement mince chargée seulement dans son plan. La définition de contrainte plane dans le plan *x*-*y* implique que :

$$\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{52}$$



4.1.1 CARACTERISTIQUES DE L'ELEMENT FINI (ELEMENT TRIANGULAIRE) :

Une plaque d'épaisseur *h* constante est discrétisée en un nombre approprié d'éléments. Chaque nœud a deux degrés de liberté (composantes suivant *x* et *y* du vecteur déplacement).



Puisque chaque élément a 3 nœuds et chaque nœud a 2 degrés de liberté, la matrice fonction de forme $[N]$ est donnée par

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \tag{53}$$

Les 3 fonctions de forme sont données par les équations (22) et (23) du Chapitre 3.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}\}^T \tag{54}$$

$$\{u\} = \{u \quad v\}^T \tag{55}$$

mais

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{56}$$

donc

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{57}$$

et

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 \\ 0 & m_{31} & 0 & m_{32} & 0 & m_{33} \\ m_{31} & m_{21} & m_{32} & m_{22} & m_{33} & m_{23} \end{bmatrix} \tag{59}$$

Les m_i sont donnés par les équations (23) du Chapitre 3.

Pour un matériau élastique linaire

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \tag{60}$$

où

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{61}$$

Si $\{\varepsilon_0\}$ est due à un changement de température ΔT , alors

$$\{\varepsilon_0\} = \{\alpha\Delta T \quad \alpha\Delta T \quad 0\}^T \tag{62}$$

ε_{zz} n'est pas nulle. Elle est donnée par

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) + \varepsilon_{zz0} \tag{63}$$

Dans le cas de déformation thermique

$$\varepsilon_{zz0} = \alpha \Delta T \tag{64}$$

$$\left[K^e\right] = \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV \tag{65}$$

Les éléments de $[B]$, $[D]$ et h sont constants et

$$dV = hdxdy \tag{66}$$

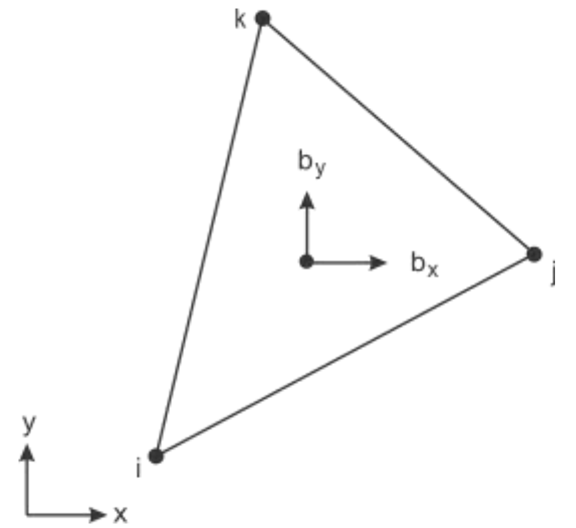
alors

$$\left[K^e\right] = [B]^T [D][B] hA^e \tag{67}$$

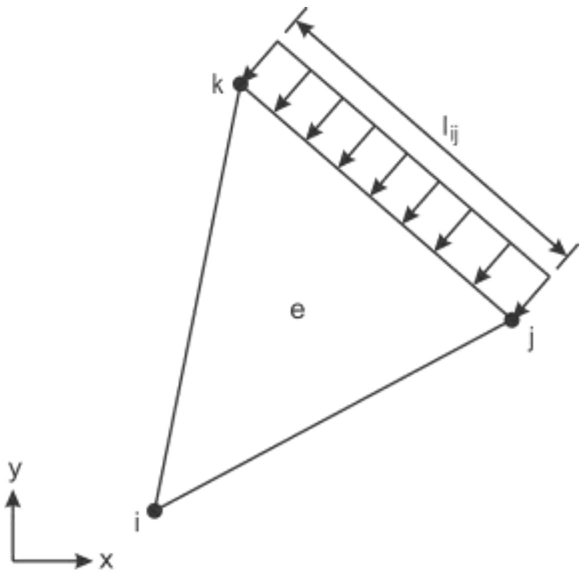
$$\left\{f^e_{\varepsilon_0}\right\} = [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} hA^e \tag{68}$$

$$\left\{f^e_{\sigma_0}\right\} = [B]^T \{\sigma_0\} hA^e \tag{69}$$

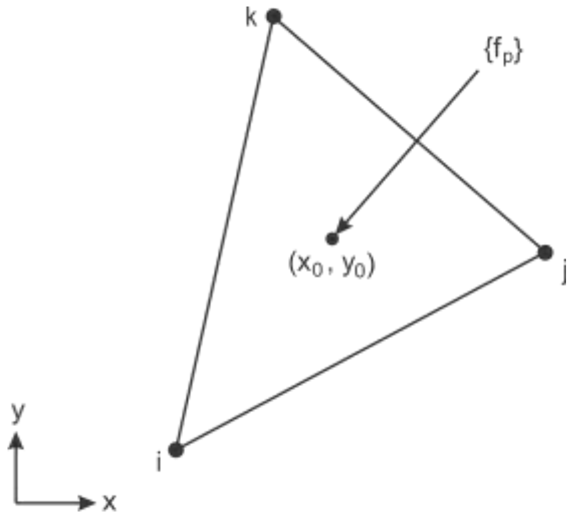
$$\left\{f^e_b\right\} = \frac{hA^e}{3}\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \tag{70}$$



$$\left\{f^e_s\right\} = \frac{hl_{ij}}{2}\begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_x \\ s_y \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{71}$$



$$\left\{f_{cp}^{e}\right\}=\begin{Bmatrix} N_i(x_0,y_0)f_{px} \\ N_i(x_0,y_0)f_{py} \\ N_j(x_0,y_0)f_{px} \\ N_j(x_0,y_0)f_{py} \\ N_k(x_0,y_0)f_{px} \\ N_k(x_0,y_0)f_{py} \end{Bmatrix} \qquad (72)$$



4.1.2 RESULTANTES ELEMENTAIRES :

$$\{\bar{\varepsilon}\}=[B]\{a^e\} \qquad (73)$$

$$\{\bar{\sigma}\}=[D](\{\bar{\varepsilon}\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\} \qquad (74)$$

$\{\bar{\varepsilon}\}$ et $\{\bar{\sigma}\}$ sont respectivement les déformations moyennes et les contraintes moyennes et sont généralement associées avec le centre de gravité de l'élément fini.