Série de TD N°1 :

Equations de mouvements des systèmes à plusieurs degrés de liberté (PDDL)

RAPPEL DU COUR

L'équation de mouvement d'un SPDDL: $\boldsymbol{M\ddot{u}(t)} + \boldsymbol{C\dot{u}(t)} + \boldsymbol{Ku(t)} = \boldsymbol{P(t)}$.

Avec:
$\boldsymbol{u(t)}, \boldsymbol{\dot{u}(t)}$ et $\boldsymbol{\ddot{u}(t)}$ sont respectivement les vecteurs de déplacements, vitesses et accélérations.

$\boldsymbol{K}$**: matrice de rigidité.** Elle est symétrique, définie positive et a une structure bande.
K_{ij}: est la force (moment) engendrée suivant le DDL i par un déplacement (une rotation) unitaire imposé au DDL j, lorsque les autres DDL sont bloqués.

$K = f^{-1}$, $\boldsymbol{f}$ est la **matrice de flexibilité.** f_{ij} est le déplacement produit au DDL i par une force unitaire appliquée au DDL j lorsque les autres DDL sont bloqués.

$\boldsymbol{M}$**: matrice masse.**
m_{ij}: est la force d'inertie (moment d'inertie) engendrée suivant le DDL i par une accélération (une accélération rotationnelle) unitaire imposé au DDL j, lorsque les autres DDL sont bloqués.
La masse de la structure est généralement considérée concentrée en nœuds. Dans ce cas elle est diagonale.
Les masses nodales sont évaluées en considérant les règles de la statique en supposant l'élément entre deux nœuds simplement appuyé.
Pour les DDL de déplacements la masse est égale à la masse parcourue par ce DDL.
Pour les DDL de rotation, si l'étendue de la masse répartie est importante l'inertie massique rotationnelle I_0 doit être considérée dans les calculs. Si non on peut supposer une inertie rotationnelle I_0 nulle.
$\boldsymbol{C}$**: matrice d'amortissement.** Les caractéristiques d'amortissement sont difficiles à évaluer. En pratique l'amortissement est traité autrement on va le voir par la suite.
$\boldsymbol{P(t)}$**: vecteur des forces extérieures.**
Il est constitué par les efforts appliqués aux DDL. Si les efforts ne sont pas appliqués aux DDL on utilise les règles de la statique pour évaluer les forces nodales équivalentes, en supposant que l'élément entre deux nœuds est simplement appuyé.
Dans le cas d'excitation de support par un déplacement $u_g(t)$: $\boldsymbol{P(t)} = \boldsymbol{P_{effctive}(t)} = -\boldsymbol{M}\Delta\boldsymbol{\ddot{u}_g(t)}$.
Δ : est le vecteur donnant la direction de la sollicitation.
Le vecteur Δ a pour composantes 1 dans la direction du mouvement de translation, 0 pour les autres directions.

Exercice 1:

Ecrire l'équation de mouvement des deux systèmes à 3 degrés de liberté de la figure 1.

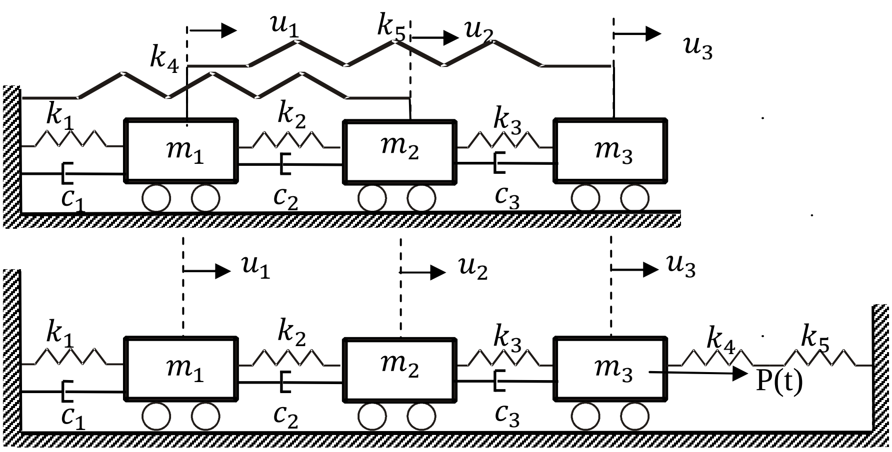

Figure 1.

Exercice 2:

La structure d'un bâtiment est formée de cinq (05) portiques identiques à celui représenté en figure 2. La section d'un poteau est de (30x30) cm^2. Le module de Young est égal à 3.10^7 KN/m^2. Les planchers sont supposés infiniment rigides. La masse du premier niveau est de 140 tonnes alors que celle du second est de 150 tonnes. La masse des poteaux est négligée. Ecrire l'équation de mouvement de ce système soumis aux chargements P_1et P_2en considérant les degrés de liberté u_1 et u_2 montrés par la figure2.

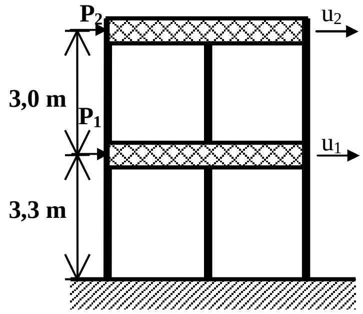

Figure2.

Exercice 3 :

Soit à étudier la structure montrée par la figure 3 où les deux masses sont considérées comme ponctuelles. Par ailleurs, les déformations axiales de la poutre et de la colonne sont négligeables ce qui permet de traiter cette structure comme un système à deux degrés de liberté, ceux indiqués sur la figure. Formuler l'équation de mouvement de cette structure. Pourr l'application numérique, on donne: M=600 kg ; E.I=2100 tf.m2; L=500 cm, P(t)=10 sin 20t.

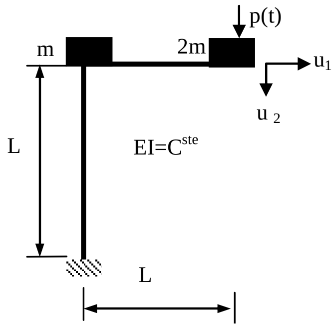

Figure3.

Exercice 4 :

La figure 4. montre un modèle à 2 masses concentrées. Ce modèle est retenu pour l'étude d'une poutre en béton armé de masse volumique γ, de longueur L, de section rectangulaire (axa) et de rigidité EI. Elle est soumise aux chargements $P_1(t)$ et $P_2(t)$.

1. Ecrire l'équation de mouvement dans le cas où seuls les déplacements horizontaux des masses sont considérés.
2. Réécrire l'équation de mouvement en considérant que les rotations des masses sont aussi libres.

Pour l'application numérique on donne :$\gamma = 2.5\ t/m^3$; $E=2x10^7 kN/m^2$; L=4m, la section de la poutre $30x30cm^2$

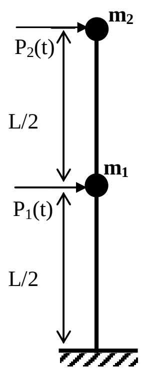

Figure 4

Exercice 5 :

Soit une barre infiniment rigide de masse totale m supportée par deux ressorts de rigidité k_1 et k_2 comme le montre la figure 5.

1. Formuler l'équation de mouvement en considérant que les déplacements verticaux des deux extrémités de la barre sont libres.
2. Formuler l'équation de mouvement en considérant que seuls le déplacement vertical et la rotation du centre de masse sont libres.

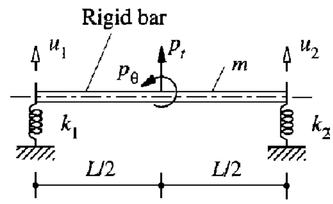

Figure5.

Exercice6 :

La figure 6 montre un plancher infiniment rigide de dimensions (6x6) $\mathbf{m^2}$ et de masse totale **m** de **60** tonnes reposant sur 4 poteaux de raideurs **variables** et de masse négligeable. La section d'un poteau est de **(30x30)** $\boldsymbol{cm^2}$ et la hauteur est égale à **3 m**. Le module de Young est égal à $\mathbf{3.10^7\ kN/m^2}$. La structure est non amortie. En considérant un modèle à trois degrés de liberté (les déplacements du centre de masse $\boldsymbol{u_x}$ et $\boldsymbol{u_y}$ et sa rotation autour de l'axe Z $\boldsymbol{u_\theta}$) on demande de formuler l'équation de mouvement. si cette structure

est soumise à un déplacement de support $\boldsymbol{u_g}$ appliqué dans le sens y de la structure.

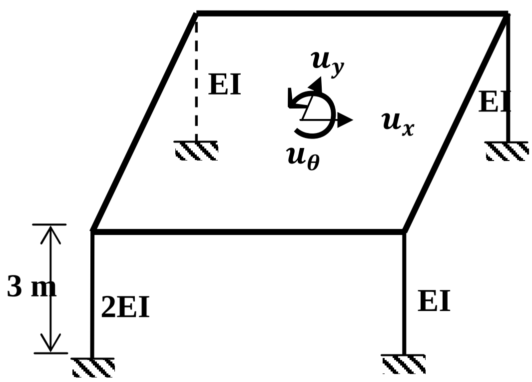

Figure6.