Série de TD N°2 :
Calcul de la réponse dynamique des SPDDL par superposition modale

Résumé du calcul de la réponse dynamique par la méthode de superposition modale

1. Discrétisation

2.Calcul des matrices de masse M et de rigidité K. Estimation du facteur d'amortissement modale ξ_i(au moins pour deux modes)

3. Analyse modale : calcul des pulsations propres $\omega_i$et modes propres ϕ_i :

$\det(K - \omega_i^2 M) = 0 \Rightarrow \quad \omega_i^2 \ (i = 1 \dots N) \qquad (\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_i < \cdots < \omega_N)$

$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i \ (i = 1 \dots N)$

4. Calcul du déplacement modal

4.1. Calcul des caractéristiques généralisées:

$M_i^* = \emptyset_i{}^T M \emptyset_i$ et $P(t)_i^* = \emptyset_i{}^T P(t)$.

4.2. Estimation de α et β à partir des deux amortissements modaux connus,

Calcul des autres valeurs d'amortissement modal par :$\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$

4.3. Résolution des équations différentielles:

$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}(t) + \omega_i{}^2 q_i(t) = \frac{P_i^*(t)}{M_i^*} \Rightarrow q_i(t) = q_{i_h}(t) + q_{i_p}(t) \qquad (i = 1 \dots N)$

La réponse homogène:

$q_{i_h}(t) = e^{-\xi_i\omega_i t}\left(A_i\cos(\omega_{di}t) + B_i\sin(\omega_{di}t)\right)$

La réponse particulière $q_{i_p}(t)$ dépend du chargement

Les conditions initiales en coordonnées modales sont exprimées à partir des conditions initiales en coordonnées géométriques par: $q_i(0) = \frac{\phi_i^T M u(0)}{\phi_i^T M \emptyset_i}$;$\dot{q}_i(0) = \frac{\phi_i^T M \dot{u}(0)}{\phi_i^T M \emptyset_i}$.

4.4.Calcul de la réponse pour chaque mode:

Déplacement: $u^{(i)}(t) = \phi_i\, q_i(t)\ (i = 1 \dots N)$

Force élastique dynamique: $F_s^{(i)}(t) = \omega_i^2 M \phi_i q_i(t)$.

5.Calcul de la réponse totale par superposition modale :

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i\, q_i(t)$$

$$F_s(t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 M \phi_i q_i(t)$$

Série de TD N°2 :
Calcul de la réponse dynamique des SPDDL par superposition modale

Exercice1 :

La figure 1. montre un modèle à 2 masses concentrées. Ce modèle est retenu pour l'étude d'une poutre en béton armé soumise à une force constante P(t) égale P_0. Seuls les déplacements horizontaux sont autorisés.

1/Calculer les modes propres de vibration. Et démontrer qu'ils vérifient la propriété d'orthogonalité.

2/Calculer les déplacements provoqués par la force P(t).

3/Calculer les forces élastiques.

4/Tracer les diagrammes des efforts internes à $t=T_2$

AN : L=4m ; m=8t, $EI=25.10^7 N.m^2$ et P_0=65kN.

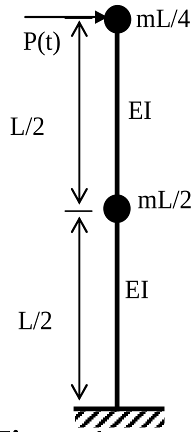

Figure 1.

Exercice2 :

La figure 2 montre le modèle d'un bâtiment de trois étages. Les planchers sont supposés infiniment rigides. Seuls les déplacements horizontaux sont autorisés.

1/ Calculer les pulsations et modes propres de vibration. On donne $\omega_1 = 11.62\,(rad/s)$

2/ Si la structure est mise en vibrations libres en déplaçant les planchers de $u_1 = 0.75\ cm$, $u_2 = -2\ cm$ et $u_3 = 0.75\ cm$ puis on les libère soudainement à l'instant t=0, qu'elle serait la déformée à l'instant $t = \frac{2\pi}{\omega_1}$. On considère dans ce cas que la structure est non amortie.

3/ On suppose que les facteurs d'amortissement du premier et troisième mode sont respectivement égaux à 5% et 15%. Calculer le facteur d'amortissement du deuxième mode.

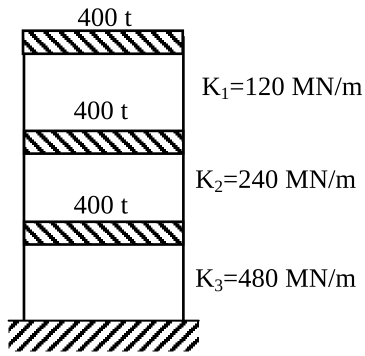

Figure2.

4/ Déterminer le déplacement en régime permanant au niveau des trois planchers si la structure est soumise à un chargement harmonique appliqué à l'étage supérieur $p(t) = 25 sin\bar{\omega}t$ avec $\bar{\omega} = 1.1\omega_1$. L'amortissement dans ce cas est pris en compte.

5/ En déduire les déplacements et les forces élastiques maxima ainsi que l'effort tranchant et le moment maxima générés à la base du bâtiment.

Exercice 3 :

Soit la structure illustrée par la figure 3soumise aux chargements $P_1(t)$ et $P_2(t)$ données par la figure 4. La section d'un poteau est de (25x25) cm^2. Le module de Young est égal à 2.10^4 MPa. Les planchers sont supposés infiniment rigides60. Leurs masse linéaire m=5t/m.

1/Déterminer la déformé de la structure à l'instant t=0.1s.

2/En déduire à cet instant le moment et l'effort tranchant développés à la base du portique.

3/Déterminer les déplacements maximums.

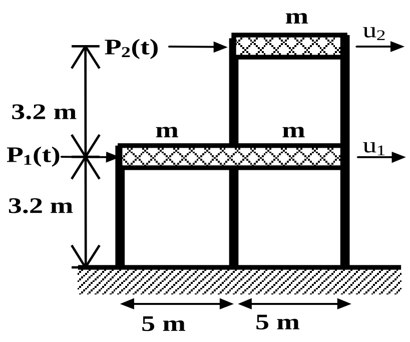

Figure 3.

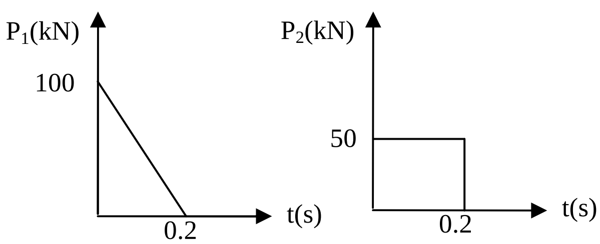

Figure 4.