Travaux Dirigés N°2 : Les méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

(convergence pour les matrices à diagonale strictement dominante).

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :

$$\forall i,\quad 1 \leq i \leq n,\qquad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

- Montrer alors que la matrice A est inversible, et que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel utilisées pour la résolution du système $Ax = b$, convergent.

Exercice 2

On considère le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

1/ Quelle est la solution de ce système ?

2/ Ecrire la méthode de Jacobi pour ce système quand $x_0 = 0$ (donnée initiale nulle).

3/ Ecrire la méthode de relaxation pour ce système quand $x_0 = 0$ (donnée initiale nulle).

4/ Comparer la convergence de ces deux méthodes.

Exercice 3

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1/ Trouver les valeurs propres de A.

2/ Est-elle diagonalisable ? Est-elle définie positive ?

On cherche à résoudre un système linéaire de la forme $Ax = b$

Avec une méthode itérative : $x^{(0)}$ *donné* , $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + C$

3/ Donner l'expression de la matrice M quand on utilise :

a/ la méthode de Jacobi
b/ la méthode de Gauss-Seidel
c/ la méthode de relaxation (dépendant du paramètre usuel ω).

4/ Ces méthodes sont-elles convergentes ? si oui comparer leur convergence (on considèrera uniquement le cas $\omega = 1/2$ pour la méthode de relaxation.

Rappels

Jacobi	Gauss-Seidel	Relaxation
$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$	$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$	$x_i^{(k+1)} = \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}$ $, i = 1, \dots, n$