Exercice I

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

A est une matrice à diagonale strictement dominante par lignes $\Rightarrow$

$$\forall i \quad 1 \leq i \leq n \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

* Montrons que A est inversible.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Par l'absurde si $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ On suppose que $X \neq 0$

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max(|x_i|, 1 \leq i \leq n)$, alors

$$\begin{cases} \forall i, \ |x_i| \leq |x_{i_0}| \\ |x_{i_0}| \neq 0 \end{cases}$$

Donc $A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

par hypothèse

alors $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0 \Rightarrow |a_{i_0 i_0} \cancel{x_{i_0}}| = \left| - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} x_j \right| \leq \sum |a_{i_0 j}| |x_j|$

$\leq \left(\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \right) \times |\cancel{x_{i_0}}|$ or

$x_{i_0} \neq 0$ donc $|a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0}^{n} |a_{i_0 j}|$ d'où une contradiction avec l'hypothèse donc $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Caractérisation

Exercice 2 :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

(1) La solution de ce système peut être obtenue par l'une des méthodes directes.

La solution est : $x = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$

(2) Resolution en utilisant JACOBI avec $x^{(0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$k = 0$

$x_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}} = 1/4$

$x_2^{(1)} = \frac{b_2}{a_{22}} = 1/4$

$x_3^{(1)} = \frac{b_3}{a_{33}} = 1/4$

$x_4^{(1)} = \frac{b_4}{a_{44}} = 1/4$

$$x^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{Bmatrix}$$

$k = 1$

$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \left(a_{12} x_2^{(1)} + a_{13} x_3^{(1)} + a_{14} \cdot x_4^{(1)} \right) \right] = 3/8$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - \left(a_{21} x_1^{(1)} + a_{23} \cdot x_3^{(1)} + a_{24} \cdot x_4^{(1)} \right) \right] = 3/8$

$x_3^{(2)} = 1/a_{33} \left[b_3 - \left(a_{31} \cdot x_1^{(1)} + a_{32} \cdot x_2^{(1)} + a_{24} \cdot x_4^{(1)} \right) \right] = 3/8$

$x_4^{(2)} = 1/a_{44} \left[b_4 - \left(a_{41} \cdot x_1^{(1)} + a_{42} \cdot x_2^{(1)} + a_{43} \cdot x_3^{(1)} \right) \right] = 3/8$

$\underline{k=2}$

$x_1^{(3)} = 7/16$

$x_2^{(3)} = 7/16$

$x_3^{(3)} = 7/16$

$x_4^{(3)} = 7/16$

$\underline{k=3}$

$x_1^{(4)} = 15/32$

$x_2^{(4)} = 15/32$

$x_3^{(4)} = 15/32$

$x_4^{(4)} = 15/32$

$\underline{k=4}$

$x_1^{(5)} = 31/64$

$x_2^{(5)} = 31/64$

$x_3^{(5)} = 31/64$

$x_4^{(5)} = 31/64$

$\underline{k=5}$

$x_1^{(6)} = 63/128$

$x_2^{(6)} = 63/128$

$x_3^{(6)} = 63/128$

$x_4^{(6)} = 63/128$

$\underline{k=6}$

$x_1^{(7)} = 127/256$

$x_2^{(7)} = 127/256$

$x_3^{(7)} = 127/256$

$x_4^{(7)} = 127/256$

$\underline{k=7}$

$x_1^{(8)} = 255/512$

$x_2^{(8)} = 255/512$

$x_3^{(8)} = 255/512$

$x_4^{(8)} = 255/512$

$\underline{k=8}$

$x_1^{(9)} = 511/1024$

$x_2^{(9)} = 511/1024$

$x_3^{(9)} = 511/1024$

$x_4^{(9)} = 511/1024$

$\underline{k=9}$

$x_1^{(10)} = 1023/2048 = 0,$

$x_2^{(10)} = 1023/2048$

$x_3^{(10)} =$

$x_4^{(10)} =$

$\underline{k=10}$

$x_1^{(11)} = 2047/4096 = 0,4997$

$x_2^{(11)} = 2047/4096$

$x_3^{(11)} = 2047/4096$

$x_4^{(11)} = 2047/4096$

$\underline{k=11}$

$x_1^{(12} = \frac{4095}{8192} = 0,49$

$\underline{k=12}$

$x_1^{(13)} = \frac{8191}{16384} = 0,4999$

$x_2^{(13)}$

$x_3^{(13)}$

$x_4^{(13)}$

$\underline{k=13}$

$x_1^{(14)} = \frac{16383}{32768} = 0,49$

$x_2^{(14)}$

$x_3^{(14)}$

$x_4^{(14)}$

$\underline{k=14}$

$x_1^{(15)} = \frac{32767}{65536} = 0,4999$

$x_2^{(15)}$

$x_3^{(15)}$

$x_4^{(15}$

finallement
Après 15 itérations $x = \begin{pmatrix} 0,4999 \\ 0,4999 \\ 0,4999 \\ 0,4999 \end{pmatrix}$.

3 La méthode de relaxation

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] + (1-\omega)\, x_i$$

$$x_1^{(1)} = \frac{\omega}{4}\left[1 - \left(a_{12} \cdot x_2^{(0)} + a_{13}\, x_3^{(0)} + a_{14}\, x_4^{(0)}\right)\right] + (1-\omega) \cdot x_1^{(0)}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\omega}{4}\left[1 - \left(a_{21} \cdot x_1^{(1)}\right) - \left(a_{23} \cdot x_3^{(0)} + a_{24} \cdot x_4^{(0)}\right)\right] + (1-\omega) \cdot$$

$$x_3^{(1)} = \frac{\omega}{4}\left[1 - \left(a_{31}\, x_1^{(1)} + a_{32} \cdot x_2^{(1)}\right) - \left(a_{34} \cdot x_4^{(0)}\right)\right] + (1-\omega) \cdot$$

$$x_4^{(1)} = \frac{\omega}{4}\left[1 - \left(a_{41} \cdot x_1^{(1)} + a_{42} \cdot x_2^{(1)} + a_{43} \cdot x_3^{(1)}\right)\right] + (1-\omega) \cdot x$$

$$x_1^{(1)} = \frac{\omega}{4}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{\omega}{4}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{\omega}{4}\left[1 - \left((-1)\left(\frac{\omega}{4}\right) + (-1)\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)\right] = \frac{\omega}{8}(2+\omega)$$

$$x_4^{(1)} = \frac{\omega}{4}\left[1 - \left((-1)\left(\frac{\omega}{4}\right) + (-1)\left(\frac{\omega}{4}\right) + \cancel{0 \cdot \left(\frac{\omega}{8}\right)(2+\omega)}\right)\right] = \frac{\omega}{8}(2$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \omega/4 \\ \omega/4 \\ \frac{\omega}{8}(2+\omega) \\ \frac{\omega}{8}(2+\omega) \end{pmatrix}$$

Il faut faire plusieurs itérations et étudier la convergence de la relaxation, puis comparer avec la méthode de Jacobi. (Converg

Exercice 3

On considère une matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

① Les valeurs propres de A

$$\det \left| [A] - \lambda [I] \right| = 0 \iff \det \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Une valeur propre est évidente $\lambda = 3$.

$$(4-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - (-1)\left[-1\cancel{(2-\lambda)}(3-\lambda)\right]$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + (-3+\lambda) = 0 \quad + (3-\lambda)\left[(4-\lambda)(2-\lambda) -\right.$$

$$3 - \lambda = 0$$

$$(4-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \iff 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(7) = 36 - 28 = 8$$

$$\lambda_1 = \frac{+6 - \sqrt{8}}{2} = 1,5858$$

$$\lambda_2 = \frac{+6 + \sqrt{8}}{2} = 4,4142.$$

Les valeurs propres de A sont

$$VP = \begin{Bmatrix} 1,5858 \\ 4,4142 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Comme le polynome caractéristique admet 3 racines distinctes donc A est diagonalisable

Comme toutes ses valeurs propres sont posit[ives]
donc A est définie positive.

Résoudre $Ax = b$

$x^{(0)}$ donné $x^{(k+1)} = M \cdot x^{(k)} + C$.

(1) Methode de Jacobi $A = D + E$

$M = -D^{-1} \cdot E$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad E = \begin{bmatrix} 0 & - \\ -1 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} ; \quad -D^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$M = -D^{-1} \cdot E = \begin{bmatrix} 0 & +1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Methode de GAUSS-SEIDEL

$$A = DI + S \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{DI} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & - \\ 0 & \\ 0 & \end{bmatrix}}_{S}$$

$M = -DI^{-1} \cdot S$, Donc Inverser DI et effect[uer]
le produit matriciel.