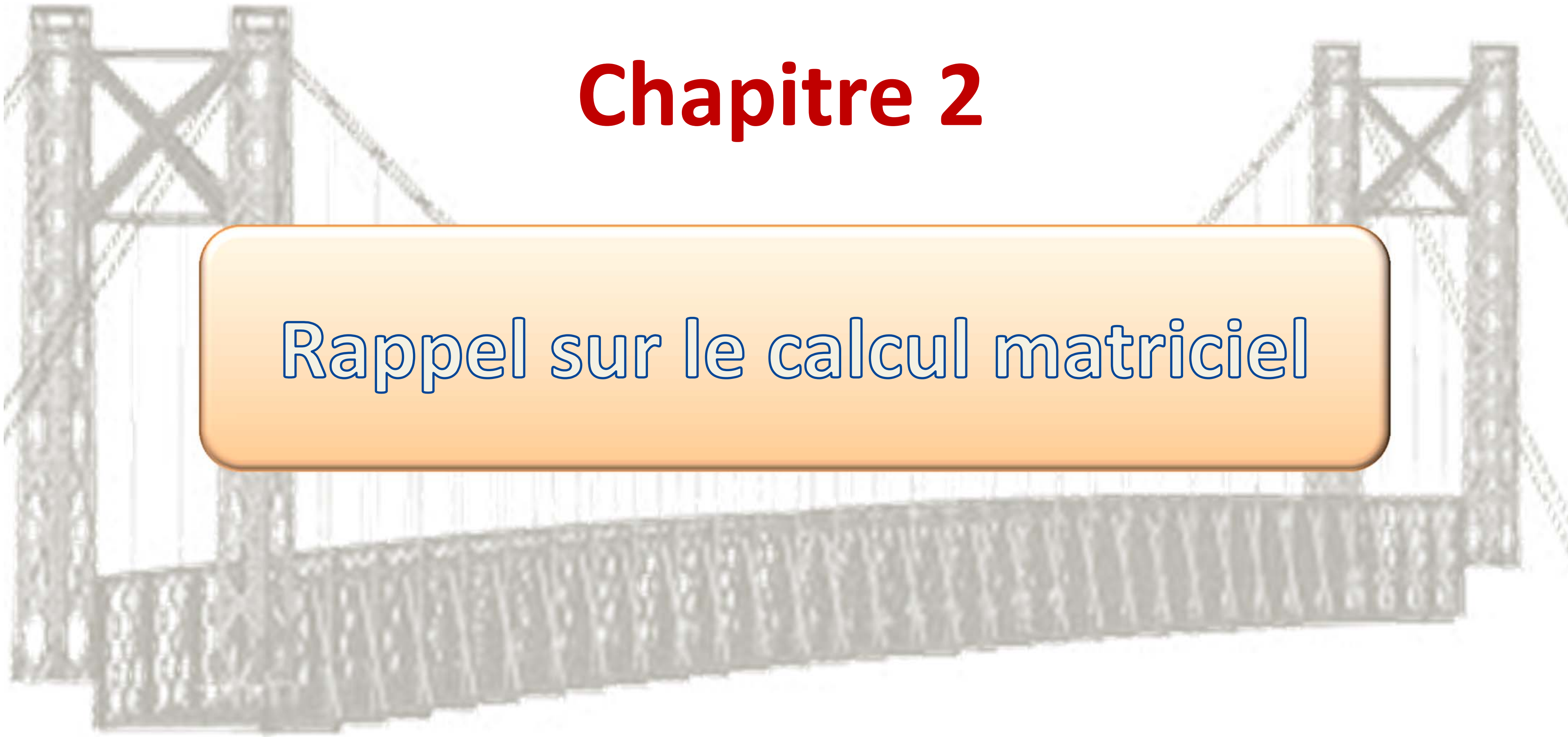
Université d'Abou bekr Belkaid
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Master 1 Voies et Ouvrages d'Art, Semestre 2
Cours de Méthode des éléments finis
2019-2020



Chapitre 2

Rappel sur le calcul matriciel

Chargée de la matière : Dr. Z.BENADLA
contact : zbenadla@gmail.com

1 / Notion de Matrice

Matrice de dimension (n x m)

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1j} & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2j} & . & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & a_{3j} & . & a_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & a_{ij} & . & a_{im} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & a_{nj} & . & a_{nm} \end{bmatrix}$$

a_{ij} caractérisant le terme des $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $[A]$.

Si n=m : La matrice est dite carrée, c'est le cas des matrices de rigidité

2/ Opérations de base

2.1/ Addition

Soit deux matrices $[A]$ et $[B]$ de dimensions $n \times m$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & . & c_{1j} & . & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & . & c_{2j} & . & c_{2m} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & . & c_{3j} & . & c_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & . & c_{ij} & . & c_{im} \end{bmatrix} =$$

chacun des termes c_{ij} est égal à $a_{ij} + b_{ij}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & . & a_{1j}+b_{1j} & . & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & . & a_{2j}+b_{2j} & . & a_{2m}+b_{2m} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & . & a_{3j}+b_{3j} & . & a_{3m}+b_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & a_{i3}+b_{i3} & . & a_{ij}+b_{ij} & . & a_{im}+b_{im} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & . & a_{nj}+b_{nj} & . & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix} = [A]+[B]$$

Dans le cas d'une différence des matrices $[A]$ et $[B]$, on posera de la même façon :

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

2/ Opérations de base…

Exemple 1 :

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 5\end{bmatrix} \text{ et } [B]=\begin{bmatrix}3 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$[C]=[A]+[B]=\begin{bmatrix}4 & 4 & 9 & 5\\ 4 & 7 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

$$[C]=[A]-[B]=\begin{bmatrix}-2 & -4 & -5 & 1\\ 2 & -5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

2.2/ Produit

i/ Produit par un scalaire λ

Soit une matrice $[A]$ de dimensions $n \times m$, la matrice $[C]$, produit de la matrice $[A]$ par le scalaire λ sera obtenue en multipliant chacun des termes de la matrice $[A]$ par λ. On aura donc :

$$c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Exemple 2 :

$$[C]=3\cdot[A]=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 6 & 9\\ 9 & 3 & 0 & 15\end{bmatrix}$$

2/ Opérations de base …

ii/ Produit de 2 matrices

Soit deux matrices $[A]$ et $[B]$ de dimensions respectives $n \times m$ et $m \times l$, la matrice $[C]$, produit des matrices $[A]$ et $[B]$[1], de dimensions $n \times l$, sera obtenue en posant que les termes c_{ij} sont égaux à :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} \times b_{kj}$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif. Généralement, $[A] \cdot [B] \neq [B] \cdot [A]$

Par exemple, on trouvera pour le premier terme :

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \ldots.. + a_{1m} \cdot b_{m1}$$

Cependant et pour que ce produit soit possible, il est important de noter que le nombre de colonnes de la matrice $[A]$ doit être égal au nombre de lignes de la matrice $[B]$.

Exemple 3 :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 1 \\ 1 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 & 1 \cdot 9 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 7 & 3 \cdot 9 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 6 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 36 \\ 50 & 53 \end{bmatrix}$$

2/ Opérations de base …

iii/ Produit de 3 matrices

Soit trois matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$ de dimensions respectives $n\times m$, $m\times l$ et $l\times p$, la matrice $[F]$, produit des matrices $[A]$, $[B]$ et $[C]$, de dimensions $n\times p$ sera obtenue en effectuant dans un premier temps soit le produit $[A]\cdot[B]$ soit celui de $[B]\cdot[C]$, les deux approches amenant au même résultat.

$$[F]=[A]\cdot[B]\cdot[C]=[A]\cdot\left(\overbrace{[B]\cdot[C]}^{[D]}\right)=[A]\cdot[D]=\left(\overbrace{[A]\cdot[\mathbf{B}]}^{[E]}\right)\cdot[C]=[E]\cdot[C]$$

Exemple 4 :

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 5\end{bmatrix},\ [B]=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 3 & 1\\ 1 & 6\\ 7 & 5\end{bmatrix}\ \text{et}\ [C]=\begin{bmatrix}27 & 36\\ 50 & 53\end{bmatrix}$$

$$([A]\cdot[B])\cdot[C]=\begin{bmatrix}27 & 36\\ 50 & 53\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}27 & 36\\ 50 & 53\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2529 & 2880\\ 4000 & 4609\end{bmatrix}$$

$$[A]\cdot([B]\cdot[C])=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}558 & 621\\ 131 & 161\\ 327 & 354\\ 439 & 317\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2529 & 2880\\ 4000 & 4609\end{bmatrix}$$

2/ Opérations de base …

iv/ Matrice Transposée

Soit la matrice $[A]$ de dimensions $n \times m$, la matrice $[B]$ de dimensions $m \times n$ transposée de $[A]$ (notée $[A]^T$) sera obtenue en posant pour chacun des termes de $[B]$ que $b_{ij} = a_{ji}$. Pratiquement, ce calcul revient à échanger les lignes et les colonnes de la matrice $[A]$.

Exemple 5 :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad [B] = [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$([A]\cdot[B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$$

3/ Matrices carrées

i/ Matrice Identité

La matrice identité, notée $[I]$, est une matrice carrée dont les termes diagonaux sont égaux à 1, tous les autres étant nuls. De ce fait, le produit de la matrice identité par une matrice $[A]$ quelconque (ou inversement) est égal à la matrice $[A]$ elle-même.

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [I]\cdot[A] = [A]\cdot[I] = [A]$$

ii/ Matrice inverse

La matrice inverse de $[A]$ notée $[A]^{-1}$ est définie telle que $[A]^{-1}\cdot[A] = [A]\cdot[A]^{-1}$ $= [I]$ et peut être calculée en posant :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]}\cdot Com[A]^T$$

où $Com[A]$ et $\det[A]$ sont respectivement la comatrice et le déterminant de la matrice $[A]$.

3/ Matrices carrées…

ii/ Matrice inverse…

La matrice $[A]$ sera donc inversible à condition que son déterminant soit différent de 0.

Calcul du déterminant

– 2 dimensions :

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

– 3 dimensions :

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

3/ Matrices carrées…

ii/ Matrice inverse…

Calcul de la comatrice et de la matrice inverse

La comatrice de $[A]$, notée $Com[A]$, correspond à la matrice des cofacteurs de $[A]$. Le cofacteur du terme i, j de la matrice $[A]$ est obtenu en multipliant par $(-1)^{i+j}$ le déterminant de la sous-matrice issue de la suppression des ligne i et colonne j.

– 1 dimension :

$$[A] = a_{11} \Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$$

– 2 dimensions :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow Com[A] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

3/ Matrices carrées…

ii/ Matrice inverse…

Calcul de la comatrice et de la matrice inverse

– 3 dimensions :

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow Com[A]=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]^{-1}=\frac{1}{\det[A]}\begin{bmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} \\ a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23} & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

4/ Méthodes de résolution des systèmes linéaires

$$\{F\} = [K]\{\Delta\}$$

4.1 Méthodes directes

a/ Méthode d'élimination de Gauss

1/ Triangulariser la matrice :

$$\begin{cases} K_{ij}^{P+1} = K_{ij}^{P} - \dfrac{K_{iP}^{P}}{K_{PP}^{P}} K_{Pj}^{P} \\ F_{i}^{P+1} = F_{i}^{P} - \dfrac{K_{iP}^{P}}{K_{PP}^{P}} F_{P}^{P} \end{cases} \quad ,\mathrm{i,j=P+1..n}$$

2/ Résoudre le système {F}=[K]{Δ}

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

P=1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3.5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix}$$

P=2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3.5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.33 \\ 2.33 \end{pmatrix}}$$

4.1 Méthodes directes…

b/ Méthode de Factorisation L.U

1/ Ecrire la matrice sous la forme :

[K]= [L].[U]

$$\begin{cases} L_{ij} = \dfrac{\left(K_{ij} - \sum_{P=1}^{j-1} L_{iP} U_{Pj}\right)}{U_{jj}} & ,i>j \\[2ex] U_{ij} = \left(K_{ij} - \displaystyle\sum_{P=1}^{i-1} L_{iP} U_{Pj}\right) & ,i\leq j \end{cases}$$

2/ Résoudre le système {F}=[K]{Δ} en 2 étapes :

{F}=[L]{Z} ⟹ Déterminer le vecteur intermédiaire {Z}.

{Z}=[U]{Δ} ⟹ Déterminer le vecteur {Δ}.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$[L]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix} \; et \; [U] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{8}{7} & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z_1} \\ \boldsymbol{Z_2} \\ \boldsymbol{Z_3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{21} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d_1} \\ \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{d_3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3.33} \\ \mathbf{2.33} \end{pmatrix}$$

4.1 Méthodes directes…

c/ Méthode de factorisation de Cholesky

1/ Ecrire la matrice sous la forme :

[K]= [L].[L]^T

$$\begin{cases} L_{jj}^{\ 2} = K_{jj} - \sum_{P=1}^{j-1} L_{jP}^{\ 2} \\ L_{ij} = \dfrac{\left(K_{ij} - \sum_{P=1}^{j-1} L_{iP} L_{jP}\right)}{L_{jj}} \quad , j+1 \le i \le n \end{cases}$$

2/ Résoudre le système {F}=[K]{Δ} en 2 étapes :

{F}=[L]{Z} ⇒ Déterminer le vecteur intermédiaire {Z}.

{Z}=[L]^T{Δ} ⇒ Déterminer le vecteur {Δ}.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$[\mathrm{L}] = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{7}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{\frac{2}{7}} & \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix} \quad et \ [\mathrm{L}]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & 4\sqrt{\frac{2}{7}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{7}{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 4\sqrt{\frac{2}{7}} & \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{Z_1} \\ \boldsymbol{Z_2} \\ \boldsymbol{Z_3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7.07} \\ \mathbf{11.23} \\ \mathbf{1.53} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{7}{2}} & 4\sqrt{\frac{2}{7}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 7.07 \\ 11.23 \\ 1.53 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d_1} \\ \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{d_3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3.33} \\ \mathbf{2.33} \end{pmatrix}$$

4.1 Méthodes directes…

d/ Comparaison entre les 3 méthodes :

- Dans le cas d'une matrice symétrique définie positive, la méthode de **Cholesky** est conseillée par rapport à la méthode de **Gauss**. Cette dernière, malgré ses avantages, n'est vraiment utilisée en Analyse Numérique que pour résoudre des problèmes où la matrice n'a aucune propriété particulière.
- Méthode de **Cholesky** est environ deux fois moins chère (en termes de nombre d'opérations élémentaires nécessaire à la résolution) que la méthode de **Gauss**.
- Dans la méthode de **Gauss**, si un des pivots est nul (ou petit) la méthode peut échouer ou ceci peut conduire à des erreurs très importantes. En revanche, la stratégie du pivot partiel donne des résultats satisfaisants.
- Aucune stratégie du pivot n'étant appliquée, l'algorithme de **Factorisation** peut conduire à des U_{pp} nuls (ou petits) et donc à une méthode incorrecte. Il faut ainsi l'appliquer uniquement à des matrices dont la décomposition LU est assurée et pour lesquelles les $|U_{pp}|$ seront assez grands.

4.2 Méthodes itératives

Objectifs : Résoudre le système **{F} = [K]{Δ}** en Calculant les valeurs **successives** d'une suite de vecteurs Δ^P convergeant vers la solution Δ quand **P** $\rightarrow \infty$

Principe : Décomposer [K] en 2 matrices [M] et [N] telle que **[K]=[M]-[N]**

[M] : une matrice facile à inverser, au sens que le système [M]{Z}={d} se résout facilement (M diagonale, ou triangulaire, ou diagonale par blocs…).

$$[K]\{\Delta\}=\{F\} \Rightarrow ([M]-[N])\{\Delta\}=\{F\} \Rightarrow [M]\{\Delta\}=[N]\{\Delta\}+\{F\}$$

$$\Rightarrow \boxed{[M]\{\Delta\}^{P+1}=[N]\{\Delta\}^{P}+\{F\}}$$

a/ Méthode de Jacobi

1/ Décomposer la matrice [K] en 2 parties :

[K]=[D]-([E]+[H])

Avec

[D] : matrice diagonale;

[E] : matrice triangulaire inférieure

[H] : matrice triangulaire supérieure

[K]{Δ}={F} ➡ ([D]-[E]-[H]){Δ}={F}

➡ [D]{Δ}=[E+H]{Δ}+{F}

➡ 2/ Résolution par itérations :

$\{\Delta\}^{P+1}=[D]^{-1}([E+H]\{\Delta\}^{P}+\{F\})$

Avec **$\{\Delta\}^0$** est <u>arbitraire</u>

Convergence :

La méthode de Jacobi converge si la matrice est à diagonale dominante :

$$|K_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |K_{ij}|$$

<u>Remarques</u> **:**

1/ Cette condition est suffisante mais pas nécessaire;

2/ Le point initial **$\{\Delta\}^0$** peut être déterminant pour la recherche de la solution, mais il n'y a pas une façon de choisir ce point.

Algorithme de Jacobi :

$$\begin{cases} \Delta^0 \; choisi \\ d_i{}^{P+1} = \dfrac{1}{K_{ii}}\left(-\sum_{q \neq i} K_{iq} d_q{}^{P} + F_i\right) \end{cases} P = 0 \text{ à } \ldots (test\ d'arrêt)$$

i=1 à N

a/ Méthode de Jacobi…

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix} \qquad [D]=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \qquad -[E+H]=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & -1 \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$d_i^{\,P+1} = \frac{1}{K_{ii}}\left(-\sum_{q\neq i} K_{iq} d_q^{\,P} + F_i\right)$$

$$\begin{cases} \Delta^0 \begin{Bmatrix} d_1^{\,0} \\ d_2^{\,0} \\ d_3^{\,0} \end{Bmatrix} \; choisi \\ d_1^{\,P+1} = \dfrac{1}{K_{11}}\left(-\sum\limits_{q\neq i} K_{1q} d_q^{\,P} + F_1\right) \\ d_2^{\,P+1} = \dfrac{1}{K_{22}}\left(-\sum\limits_{q\neq i} K_{2q} d_q^{\,P} + F_2\right) \\ d_3^{\,P+1} = \dfrac{1}{K_{33}}\left(-\sum\limits_{q\neq i} K_{3q} d_q^{\,P} + F_3\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} On\ choisit\ \Delta^0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ d_1^{\,P+1} = \dfrac{1}{4}\left(-K_{12} d_2^{\,P} - K_{13} d_3^{\,P} + F_1\right) \\ d_2^{\,P+1} = \dfrac{1}{2}\left(-K_{21} d_1^{\,P} - K_{23} d_3^{\,P} + F_2\right) \\ d_3^{\,P+1} = \dfrac{1}{7}\left(-K_{31} d_1^{\,P} - K_{32} d_2^{\,P} + F_3\right) \end{cases}$$

$$\{\Delta^0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta^1\} = \begin{Bmatrix} 2.500 \\ 13.000 \\ 5.000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta^2\} = \begin{Bmatrix} -2.000 \\ 14.250 \\ 6.500 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta^3\} = \begin{Bmatrix} -2.688 \\ 17.250 \\ 7.321 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta^4\} = \begin{Bmatrix} -3.643 \\ 18.004 \\ 7.848 \end{Bmatrix}$$

$$\cdots \Rightarrow \{\Delta^{14}\} = \begin{Bmatrix} -4.461 \\ 19.436 \\ 8.413 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\Delta^{15}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{-4.462} \\ \mathbf{19.437} \\ \mathbf{8.414} \end{Bmatrix}$$

b/ Méthode de Gauss-Seidel

***Remarque* :** Dans la méthode de **Jacobi**, il est nécessaire de conserver en mémoire tous les $\mathbf{d_i^P}$ aussi longtemps que le calcul des $\mathbf{d_i^{P+1}}$ n'est pas achevé.
Dans la méthode de **Gauss-Seidel**, on utilise 2 fois moins de mémoires en écrasant à chaque fois $\mathbf{d_i^P}$ par $\mathbf{d_i^{P+1}}$

1/ Décomposer la matrice [K] en 2 parties : **[K]=[D]-([E]-[H])**
Avec [D] : matrice diagonale;
[E] : matrice triangulaire inférieure / [H] : matrice triangulaire supérieure

[K]{Δ}={F} ⇒ **([D]-[E]-[H]){Δ}={F}** ⇒ **[D-E]{Δ}=[H]{Δ}+{F}**

⇒ 2/ Résolution par itérations :
$$\{\Delta\}^{P+1}=[D-E]^{-1}([H]\{\Delta\}^{P}+\{F\})$$
Avec $\{\Delta\}^0$ est arbitraire

Algorithme de Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} \Delta^0 \ choisi \\ d_i{}^{P+1} = \dfrac{1}{K_{ii}}\left(-\sum_{q<i} K_{iq}\boldsymbol{d_q}{}^{\boldsymbol{P+1}} - \sum_{q>i} K_{iq}\boldsymbol{d_q}{}^{\boldsymbol{P}} + F_i\right) \end{cases} \begin{matrix} P = 0 \text{ à } \ldots (test\ d'arrêt) \\ \text{i=1 à N} \end{matrix}$$

b/ Méthode de Gauss-Seidel …

Exemple :

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}d_1\\ d_2\\ d_3\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 26\\ 35\end{pmatrix}$$

$$[D]=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{2} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{7}\end{pmatrix}\quad -[E]=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & 0 & 0\\ 1 & \mathbf{0} & 0\\ 1 & -1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad -[H]=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & 1 & 1\\ 0 & \mathbf{0} & -1\\ 0 & 0 & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$d_i^{\,P+1}=\frac{1}{K_{ii}}\left(-\sum_{q<i}K_{iq}\boldsymbol{d_q}^{\boldsymbol{P+1}}-\sum_{q>i}K_{iq}\boldsymbol{d_q}^{\boldsymbol{P}}+F_i\right)$$

$$\begin{cases}\Delta^0\begin{Bmatrix}d_1^{\,0}\\ d_2^{\,0}\\ d_3^{\,0}\end{Bmatrix}\ choisi\\ d_1^{\,P+1}=\dfrac{1}{K_{11}}\left(-\sum_{q>i}K_{1q}d_q^{\,P}+F_1\right)\\ d_2^{\,P+1}=\dfrac{1}{K_{22}}\left(-\sum_{q<i}K_{2q}d_q^{\,P+1}-\sum_{q>i}K_{2q}d_q^{\,P}+F_2\right)\\ d_3^{\,P+1}=\dfrac{1}{K_{33}}\left(-\sum_{q<i}K_{3q}d_q^{\,P+1}-\sum_{q>i}K_{3q}d_q^{\,P}+F_3\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}On\ choisit\ \Delta^0\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\\ d_1^{\,P+1}=\dfrac{1}{4}\left(-K_{12}d_2^{\,P}-K_{13}d_3^{\,P}+F_1\right)\\ d_2^{\,P+1}=\dfrac{1}{2}\left(-K_{21}d_1^{\,P+1}-K_{23}d_3^{\,P}+F_2\right)\\ d_3^{\,P+1}=\dfrac{1}{7}\left(-K_{31}d_1^{\,P+1}-K_{32}d_2^{\,P+1}+F_3\right)\end{cases}$$

$$\{\Delta^0\}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\Rightarrow\{\Delta^1\}=\begin{Bmatrix}2.500\\ 11.750\\ 6.321\end{Bmatrix}\Rightarrow\{\Delta^2\}=\begin{Bmatrix}-2.018\\ 17.170\\ 7.741\end{Bmatrix}\Rightarrow\{\Delta^3\}=\begin{Bmatrix}-3.728\\ 18.734\\ 8.209\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\{\Delta^4\}=\begin{Bmatrix}-4.236\\ 19.222\\ 8.351\end{Bmatrix}\ \cdots\Rightarrow\{\Delta^9\}=\begin{Bmatrix}-4.463\\ 19.438\\ 8.414\end{Bmatrix}\Rightarrow\{\Delta^{10}\}=\begin{Bmatrix}\mathbf{-4.463}\\ \mathbf{19.439}\\ \mathbf{8.415}\end{Bmatrix}$$

c/ Méthode de Relaxation

Remarque **:** la méthode de **Gauss-Seidel**, peut être modifiée en introduisant un paramètre supplémentaire **« ω »** qu'on choisira au mieux pour que la convergence soit plus rapide. $0 < \omega < 2$

L'algorithme s'écrit alors :

$$\{\Delta\}^{P+1} = (1-\omega)\{\Delta\}^{P} + \omega\left([D-E]^{-1}\left([H]\{\Delta\}^{P} + \{F\}\right)\right)$$

On vérifie que si **{Δ^P}** converge, il converge vers **{Δ}** solution de :

$$\{\Delta\} = (1-\omega)\{\Delta\} + \omega\left([D-E]^{-1}\left([H]\{\Delta\} + \{F\}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \{\Delta\} = [D-E]^{-1}\left([H]\{\Delta\} + \{F\}\right) \Leftrightarrow [K]\{\Delta\} = \{F\}$$

Algorithme de Relaxation :

$$\begin{cases} \Delta^0 \ choisi \\ d_i^{\ P+1} = (1-\omega)d_i^{\ P} + \dfrac{\omega}{K_{ii}}\left(-\displaystyle\sum_{q<i} K_{iq}\boldsymbol{d_q}^{\boldsymbol{P+1}} - \sum_{q>i} K_{iq}\boldsymbol{d_q}^{\boldsymbol{P}} + F_i\right) \end{cases} \begin{matrix} P = 0 \text{ à } \ldots (test\ d'arrêt) \\ \text{i=1 à N} \end{matrix}$$

c/ Méthode de Relaxation …

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$[D]=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \quad -[E]=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$-[H]=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta^0 \begin{Bmatrix} {d_1}^0 \\ {d_2}^0 \\ {d_3}^0 \end{Bmatrix} \textit{ choisi} \\ {d_1}^{P+1} = (1-\omega){d_1}^P + \dfrac{\omega}{K_{11}}\left(-\sum_{q>i} K_{1q}{d_q}^P + F_1\right) \\ {d_2}^{P+1} = (1-\omega){d_2}^P + \dfrac{\omega}{K_{22}}\left(-\sum_{q<i} K_{2q}{d_q}^{P+1} - \sum_{q>i} K_{2q}{d_q}^P + F_2\right) \\ {d_3}^{P+1} = (1-\omega){d_3}^P + \dfrac{\omega}{K_{33}}\left(-\sum_{q<i} K_{3q}{d_q}^{P+1} - \sum_{q>i} K_{3q}{d_q}^P + F_3\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textit{On choisit } \Delta^0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ {d_1}^{P+1} = (1-\omega){d_1}^P + \dfrac{\omega}{4}\left(-K_{12}{d_2}^P - K_{13}{d_3}^P + F_1\right) \\ {d_2}^{P+1} = (1-\omega){d_2}^P + \dfrac{\omega}{2}\left(-K_{21}{d_1}^P - K_{23}{d_3}^{P+1} + F_2\right) \\ {d_3}^{P+1} = (1-\omega){d_3}^P + \dfrac{\omega}{7}\left(-K_{31}{d_1}^{P+1} - K_{32}{d_2}^{P+1} + F_3\right) \end{cases}$$

c/ Méthode de Relaxation …

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$[D]=\begin{pmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{pmatrix} \qquad -[E]=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad -[H]=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} On\ choisit\ \Delta^0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ d_1{}^{P+1} = (1-\omega)d_1{}^{P} + \dfrac{\omega}{4}\left(-K_{12}d_2{}^{P} - K_{13}d_3{}^{P} + F_1\right) \\ d_2{}^{P+1} = (1-\omega)d_2{}^{P} + \dfrac{\omega}{2}\left(-K_{21}d_1{}^{P} - K_{23}d_3{}^{P+1} + F_2\right) \\ d_3{}^{P+1} = (1-\omega)d_3{}^{P} + \dfrac{\omega}{7}\left(-K_{31}d_1{}^{P+1} - K_{32}d_2{}^{P+1} + F_3\right) \end{cases}$$

Pour ω=0,5 ⇒ $\{\Delta^{28}\} = \begin{Bmatrix} -4.461 \\ 19.436 \\ 8.414 \end{Bmatrix}$

Pour ω=1 ⇒ $\{\Delta^{10}\} = \begin{Bmatrix} -4.463 \\ 19.439 \\ 8.415 \end{Bmatrix}$

Pour ω=0,8 ⇒ $\{\Delta^{14}\} = \begin{Bmatrix} -4.462 \\ 19.437 \\ 8.414 \end{Bmatrix}$

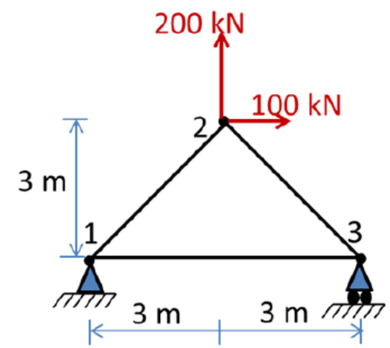
Pour ω=1,5 ⇒ $\{\Delta^{15}\} = \begin{Bmatrix} -4.464 \\ 19.439 \\ 8.415 \end{Bmatrix}$

Pour ω= (1,1- 1,16) ⇒ $\{\Delta^{7}\} = \begin{Bmatrix} -4.463 \\ 19.439 \\ 8.415 \end{Bmatrix}$

c/ Méthode de Relaxation …

Exemple 2 :

$$\begin{pmatrix} 141,4 & 0 & -70,7 \\ 0 & 141,4 & 70,7 \\ -70,7 & 70,7 & 170,7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Jacobi	Gauss-Seidel	Relaxation	
$\{\Delta^{15}\} = \begin{Bmatrix} 0.458 \\ 1.664 \\ -0,499 \end{Bmatrix}$	$\{\Delta^{8}\} = \begin{Bmatrix} 0.458 \\ 1.664 \\ -0,500 \end{Bmatrix}$	ω=0,1	+ de 30 itérations
		ω=0,5	$\{\Delta^{23}\} = \begin{Bmatrix} 0.459 \\ 1.662 \\ -0,498 \end{Bmatrix}$
		ω=0,8	$\{\Delta^{11}\} = \begin{Bmatrix} 0.459 \\ 1.662 \\ -0,498 \end{Bmatrix}$
		ω=(1,1-1,17)	$\{\Delta^{5}\} = \begin{Bmatrix} 0.458 \\ 1.663 \\ -0,499 \end{Bmatrix}$
		ω=1,5	$\{\Delta^{12}\} = \begin{Bmatrix} 0.457 \\ 1.664 \\ -0,500 \end{Bmatrix}$

5/ Conclusion

- La méthode de Relaxation est plus rapide que celles de Jacobi et **Gauss-Seidel**. Mais tout dépend du paramètre ω.
- Les méthodes directes donnent des solutions exactes alors que les méthodes itératives conduisent à des solutions approchées.
- Le nombre des opérations est défini au préalable dans les méthodes directes alors qu'il est inconnu dans le cas des méthodes itératives.
- Le nombre d'opérations requis dans le cas des méthodes itératives est bien supérieur à celui requis pour la méthode directe. Cette différence importante est bien sûr très liée à la structure de la matrice. Elle devient moins importante pour de grandes **matrices à bandes très creuses**.
- De plus, dans ce cas, même si le nombre d'opérations est plus grand, pour des raisons de stockage en mémoire, on pourra préférer une méthode itérative à une factorisation qui remplit les bandes et rend ainsi le stockage des matrices-facteurs difficile, voire impossible pour des matrices très grandes.