Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2019/2020 - 2ème année Mathématiques
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 4 - Fiche de T.D n°1

<u>Exercice 1 :</u> Soit $N(.)$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, et soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ inversible. On pose $M(x) = N(Ax) \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que M définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer ensuite qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que

$$a\, M(x) \leq N(x) \leq b\, M(x)$$

<u>Exercice 2 :</u> Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère les sous-ensembles suivants :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; xy > 1\right\} \qquad , \qquad B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^4 \leq 1\right\}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? fermés ? ou bien ni ouverts ni fermés.

<u>Exercice 3 :</u> Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles, on définit la norme

$$\|B\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$$

où $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ est une matrice quelconque.

1. Montrer d'abord que $\forall u, v$ réels, on a $(u + v)^2 \leq 2(u^2 + v^2)$.
2. Montrer ensuite que $\forall B, B' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on a $\|BB'\|^2 \leq 2\|B\|^2\|B'\|^2$.
3. Montrer que si $\|A\|$ est petite, alors la matrice $I - A$ est inversible.
4. En déduire que si A est inversible et si $\|A - A'\|$ est petite, alors A' est inversible aussi.
5. En déduire finalement que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert.

<u>Exercice 4 :</u> Soit K un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ continue est bornée. De plus elle atteint sur K son maximum et son minimum.