Exercice 1 : Soit $N(.)$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$, et soit A une matrice carrée réelle $n \times n$ inversible. On pose $M(x) = N(Ax) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que M définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer ensuite qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que

$$a\,M(x) \leq N(x) \leq b\,M(x)$$

Exercice 2 : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère les sous-ensembles suivants :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ xy > 1\right\} \qquad , \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \ x^2 + y^4 \leq 1\right\}$$

Ces ensembles sont-ils ouverts ? fermés ? ou bien ni ouverts ni fermés.

Exercice 3 : Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 réelles, on définit la norme

$$\|B\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$$

où $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ est une matrice quelconque.

1. Montrer d'abord que $\forall u, v$ réels, on a $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$.
2. Montrer ensuite que $\forall B, B' \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ on a $\|BB'\|^2 \leq 2\|B\|^2\|B'\|^2$.
3. Montrer que si $\|A\|$ est petite, alors la matrice $I - A$ est inversible.
4. En déduire que si A est inversible et si $\|A - A'\|$ est petite, alors A' est inversible aussi.
5. En déduire finalement que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert.

Exercice 4 : Soit K un sous-ensemble compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ continue est bornée. De plus elle atteint sur K son maximum et son minimum.

Licence de Mathématiques - 2ème année - 2019/2020.

Module : "Analyse IV" - Semestre 2 - Liste de T.D N° 1

Corrigé.

Exercice 1: $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une norme, et $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ application linéaire inversible. On pose $M(x) = N(Ax)$.

1°/ M est une norme: $* \; M(x) = 0 \Leftrightarrow N(Ax) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car A est inversible.

$* \; M(\lambda x) = N(A(\lambda x)) = N(\lambda A x)$ car A linéaire
$= |\lambda| N(Ax)$ " N est une norme.
$= |\lambda| M(x)$.

$* \; M(x+y) = N(A(x+y)) = N(Ax + Ay)$ car A linéaire
$\leq \underbrace{N(Ax)}_{\overset{\shortparallel}{M(x)}} + \underset{\overset{\shortparallel}{M(y)}}{N(Ay)}$ car N est une norme

2°/ M est équivalente à N : Travaillons, par exemple, avec la norme $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

d'où $N(x) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n N(e_i)$

car $\forall i = 1, \dots, n$, $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. Posons $\beta = \sum_{i=1}^n N(e_i)$.

β est ≥ 0 (évident) et $\beta \neq 0$ car sinon $\forall i$, $N(e_i) = 0 \Rightarrow e_i = 0$ impossible.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$.

Maintenant on sait que pour toute norme, $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$

d'où $|N(x) - N(y)| \leq \beta \|x - y\|_\infty$ c.à.d N en tant que fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne (en considérant la norme $\|\cdot\|_\infty$) donc continue.

Considérons à présent $S_{\infty,1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|_\infty = 1\}$ (la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). C'est exactement $[-1,1]^n$ càd $[-1,1]\times[-1,1]\times\dots\times[-1,1]$. C'est un compact de $\mathbb{R}^n$, et donc $N|_{S_{\infty,1}}$ admet un max et surtout un minimum atteint(s).

Donc $\exists x^0 \in S_{\infty,1}$ tq $\alpha = \min_{y\in S_{\infty,1}} N(y) = N(x^0)$. $\alpha \neq 0$ car sinon $x^0=0$ et $x^0 \in S_{\infty,1}$ ($\|x^0\|_\infty = 1$) : une contradiction.

Donc si $y \in S_{\infty,1}$, $N(y) \geq \alpha$. Prenons $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ alors $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_{\infty,1}$, d'où $N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \alpha \Rightarrow N(x) \geq \alpha\|x\|_\infty$.

En définitive : $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\boxed{\alpha\|x\|_\infty \leq N(x) \leq \beta\|x\|_\infty}$.

Venons-en à $M(x) = N(Ax)$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\alpha\|Ax\|_\infty \leq M(x) \leq \beta\|Ax\|_\infty}$$

Mais $\|Ax\|_\infty$ définit aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$, donc il existe $\alpha', \beta' > 0$ tq

$$\boxed{\alpha'\|x\|_\infty \leq \|Ax\|_\infty \leq \beta'\|x\|_\infty}$$

D'où $M(x) \leq \beta\|Ax\|_\infty \leq \beta\beta'\|x\|_\infty \leq \underbrace{\frac{\beta\beta'}{\alpha}}_{=b} N(x)$.

et $M(x) \geq \alpha\|Ax\|_\infty \geq \alpha\alpha'\|x\|_\infty \geq \underbrace{\frac{\alpha\alpha'}{\beta}}_{=a} N(x)$ cqfd.

Exercice 2 : $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy > 1\}$ et $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^4 \leq 1\}$

Il suffit de remarquer que les applications $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = x^2+y^4$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (car par exemple des polynômes). Donc

$A = f^{-1}(]1,+\infty[)$ ouvert car $]1,+\infty[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et

$B = g^{-1}(]-\infty,1])$ fermé car $]-\infty,1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Pour $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\|B\| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

1°/ $\forall u, v \in \mathbb{R}$, $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$: En effet

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

mais $(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 \geq 0$ (car c'est un carré) ; donc

$2uv \leq u^2+v^2$, d'où $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$.

2°/ $\forall B, B' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\|BB'\|^2 \leq 2\|B\|^2 . \|B'\|^2$: Calculons BB'

$$BB' = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1' & b_2' \\ b_3' & b_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1b_1' + b_2b_3' & b_1b_2' + b_2b_4' \\ b_3b_1' + b_4b_3' & b_3b_2' + b_4b_4' \end{pmatrix}$$

donc
$$\|BB'\|^2 = (b_1b_1'+b_2b_3')^2 + (b_1b_2'+b_2b_4')^2 + (b_3b_1'+b_4b_3')^2 + (b_3b_2'+b_4b_4')^2$$

$$\leq 2\left[(b_1b_1')^2 + (b_2b_3')^2 + (b_1b_2')^2 + (b_2b_4')^2 + (b_3b_1')^2 + (b_4b_3')^2 + (b_3b_2')^2 + (b_4b_4')^2\right]$$

$$\leq 2\left[b_1^2(b_1'^2+b_2'^2) + b_2^2(b_3'^2+b_4'^2) + b_3^2(b_1'^2+b_2'^2) + b_4^2(b_3'^2+b_4'^2)\right]$$

$$\leq 2\left[\underbrace{(b_1^2+b_3^2)}_{\leq \|B\|^2}(b_1'^2+b_2'^2) + \underbrace{(b_2^2+b_4^2)}_{\leq \|B\|^2}(b_3'^2+b_4'^2)\right].$$

$$\leq 2\|B\|^2\left[\underbrace{b_1'^2+b_2'^2+b_3'^2+b_4'^2}_{=\|B'\|^2}\right]. \quad \text{cqfd}.$$

3°/ Si $\|A\|$ est petite, alors $I-A$ est inversible : En effet

$I-A$ inversible $\iff \det(I-A) \neq 0$ càd $1-(a_1+a_4-a_1a_4+a_2a_3) \neq 0$

On a $\|A\| \leq \varepsilon \implies |a_1| \leq \varepsilon$, $|a_2| \leq \varepsilon$, $|a_3| \leq \varepsilon$ et $|a_4| \leq \varepsilon$.

d'où $\det(I-A) \geq 1-2\varepsilon-2\varepsilon^2$

Choisissons $\varepsilon > 0$ de sorte que $1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 > 0$. Si $T(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2$, $\Delta' = 1 + 2 = 3 > 0$, deux racines :

$$\varepsilon_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} > 0 \ , \quad \varepsilon_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-2} < 0$$

Donc si $\varepsilon \in \left]0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right[$ alors $\det(I - A) > 0$. cqfd.

4°/ Si A^{-1} existe et $\|A - A'\|$ petit, alors A'^{-1} existe :

On a $A' = A' - A + A = A\left[I - A^{-1}(A - A')\right]$

Pour que A' soit inversible, il suffit que $I - A^{-1}(A-A')$ le soit car A est déjà inversible. Or d'après la question 3°/, $I - A^{-1}(A-A')$ sera inversible si $\|A^{-1}(A-A')\|$ est petite.

Mais $\|A^{-1}(A-A')\| \leq \sqrt{2}\,\|A^{-1}\| . \|A - A'\|$.

On peut prendre un $\varepsilon_0 \in \left]0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right[$ et $\|A - A'\| \leq \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}\,\|A^{-1}\|}$

cela assure que A' sera inversible.

5°/ Notons $GL(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles. La question précédente affirme que si $A \in GL(2,\mathbb{R})$ et $A' \in B\left(A, \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}\|A^{-1}\|}\right)$ alors $A' \in GL(2,\mathbb{R})$, ceci est exactement la définition d'un ouvert.

Exercice 4 : C'est une question déjà traitée en cours.