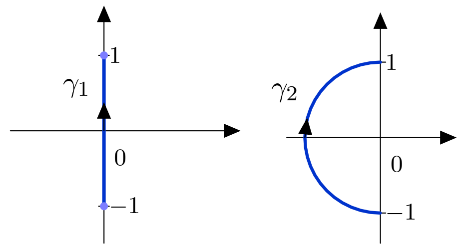
Intégration complexe.

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_{\gamma_i} \overline{z} dz$, où

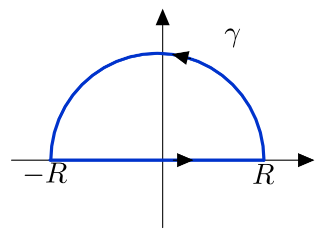


2) $\int_{\gamma} (z^2 + \overline{z}^2) dz$, où γ est le segment de droite $[0, 2+i]$

3) $\int_{\gamma} 4z^3 dz$, où γ est le quart de cerle de centre 0 et de rayon 2.

4) $\int_{\gamma} \frac{z}{(1+i-z)^2} dz$, où γ est le cercle de rayon 2 et de centre $1+i$.

5) $\int_{\gamma} |z|^2 dz$, où



Exercice 2 En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes:

1) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)} dz$, 2) $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)} dz$, 3) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz$,

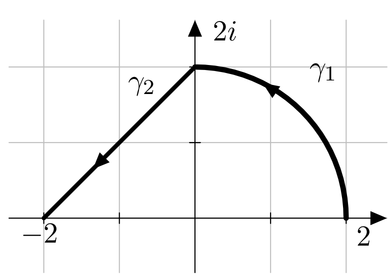
4) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-2)} dz$, 5) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz$, 6) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)} dz$,

7) $\displaystyle\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$.

Exercice 3 **(Supp)** Calculer les intégrales suivantes

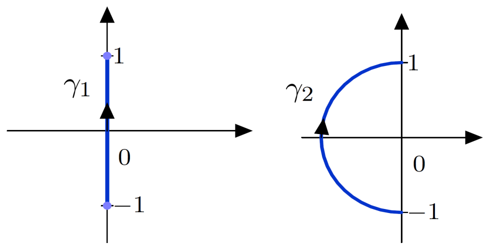
1) $\displaystyle\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z}\, dz$, 2) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz$, 3) $\displaystyle\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z^2+a^2}$, 4) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz$.

5) $\displaystyle\int_{\gamma} |z|^2 dz$ où $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est le chemin suivant



Exercice 4 - Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_{\gamma_i} \overline{z} dz$, où



2)$\int_\gamma (z^2 + \overline{z}^2)dz$, où γ est le segment de droite $[0, 2+i]$

3) $\int_\gamma 4z^3 dz$, où γ est le quart de cerle de centre 0 et de rayon 2.

4) $\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz$.

5)$\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2} dz$, où γ est le cercle de rayon 2 et de centre $1+i$.

6)$\int_\gamma Re(z)dz$, où γ est un cercle de centre 0 et de rayon 1.

• **Solution:** (1) La paramétrisation du chemin γ_1 est $\gamma_1(t) = it$ avec $-1 \leq t \leq 1$. Alors, nous obtenons

$$\int_{\gamma_1} \overline{z} dz = \int_{-1}^{1} -iti \; dt = 0.$$

D'un autre côté, γ_2 est donné par $\gamma_2(t) = e^{it}$ avec t varie de $-\pi/2$ à $-3\pi/2$. Nous avons,

$$\int_{\gamma_1} \overline{z} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{3\pi}{2}} e^{-it} i e^{it} \; dt = -i\pi.$$

(2) L'intégrale est donnée par ($\gamma(t) = (2+i)t$ avec $0 \leq t \leq 1$)

$$\int_{[0,2+i]} (z^2 + \overline{z}^2)dz = \int_{-1}^{1} [(2+i)^2 t^2 + (2-i)^2 t^2](2+i)dt = 2(2+i).$$

(3) Nous avons

$$\int_\gamma 4z^3 dz = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8e^{3it} 2ie^{it} \; dt = 64i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4it} \; dt = 0.$$

(4) La paramétrisation est donnée par

$$\gamma(t) = (1-t) + (2+i)t, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous obtenons

$$\int_{[1,2+i]} \frac{1}{z} dz = \int_0^1 \frac{1+i}{1+(1+i)t} \; dt = [\ln(1 + (1+i)t)]_0^1 = \ln(2+i).$$

(5) La paramétrisation est donnée par

$$\gamma(t) = 1 + i + 2e^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

On a

$$\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1+i+2e^{it}}{(-2e^{it})^2} (2ie^{it}) \; dt.$$

On obtient

$$\int_\gamma \frac{z}{(1+i-z)^2}dz = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} (1+i+2e^{it})e^{-it}\ dt = 2i\pi.$$

(6) Nous avons

$$\int_\gamma Re(z)dz = \int_\gamma \frac{z+\overline{z}}{2}dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}(ie^{it})\ dt = i\pi.$$

Exercice 5 - En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes:

1) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz,$ 2) $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz,$ 3) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1}dz,$

4) $\displaystyle\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz,$ 5) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-2)}dz,$ 6) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3}dz,$

7) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)}dz.$

• **Solution:** (1) Il y a une singularité en 0 (le point 1 n'est pas dans le domaine de bord le cercle $|z|=\frac{1}{2}$) et donc nous avons

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i,$$

avec (clairement, cette fonction est holomorphe sur le domaine de bord le cercle $|z|=\frac{1}{2}$)

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)}.$$

(2) De la même manière nous avons

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z-1)}dz = 2\pi i i f(1) = 2\pi i e,$$

avec

$$f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

(3) Les singularités sont

$$z_0 = i \qquad \text{et} \qquad z_1 = -i,$$

et nous avons

$$\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1}dz = \int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{(z-i)(z+i)}dz.$$

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1}dz = 0.$$

(4) Tout d'abord nous avons

$$\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = \int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}dz.$$

En utilisant les formules intégrales de Cauchy, nous obtenons

$$\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i f'(-i) = 2\pi i\frac{ie}{8},$$

avec

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}.$$

(5) Les singularités de f sont

$$z_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = 2.$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned}\int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{(z+1)(z-2)} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{(z-2)}}{z+1} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos(\pi z)}{z+1}}{(z-2)} dz,\\ &= 2\pi i[g_1(-1) + g_2(2)] = 2\pi i \left[\frac{-1}{-3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{4\pi i}{3}.\end{aligned}$$

avec

$$g_1(z) = \frac{z+1}{(z-2i)^2} \qquad \text{et} \qquad g_2(z) = \frac{z+1}{z}.$$

(6) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, nous avons

$$\int_{|z-1|=2} \frac{ze^z}{(z-1)^3} dz = 2\pi i \frac{f''(1)}{2!} = 3e\pi i,$$

avec

$$f(z) = ze^z.$$

(7) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, nous avons

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^3(z-4)} dz = 2\pi i \frac{f''(0)}{2!} = \frac{-1}{32}\pi i,$$

avec

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)}.$$

Exercice 6 - En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrale suivante

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} \, dz.$$

• **Solution:** Nous remarquons que la fonction

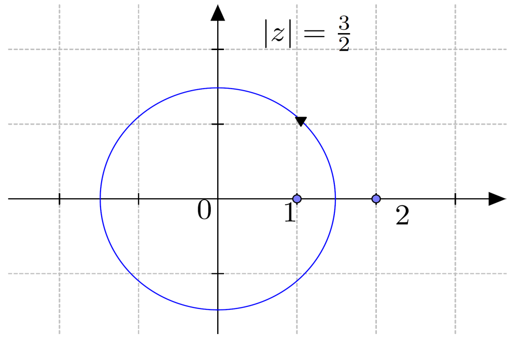
$$\frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$$

possède deux singularités, 1 et 2.
Ainsi, la fonction f est holomorphe à l'intérieur de $|z| = \frac{3}{2}$ (2 n'appartient pas). Donc,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} \, dz = 2\pi i f(1).$$

avec $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-2)}$. Ceci implique que,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} \, dz = 2\pi i.$$



Exercice 7 - En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-i)(z^2+2z-3)} dz,$$

$$2) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)} dz,$$

$$3) \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z^2-4iz-4)} dz.$$

• **Solution:** 1/ Les singularités de f sont

$$z_0 = i, \qquad z_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = -3.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_1 := \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-i)(z^2+2z-3)} dz = \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-i)(z-1)(z+3)} dz.$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma_1} \frac{\overline{\frac{1}{(z-1)(z+3)}}}{(z-i)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\overline{\frac{1}{(z-i)(z+3)}}}{(z-1)} dz, \\ &= 2\pi i [g_1(i) + g_2(1)] = 2\pi i \left[\frac{1}{(i-1)(i+3)} + \frac{1}{4(1-i)} \right], \end{aligned}$$

avec

$$g_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z+3)} \qquad \text{et} \qquad g_2(z) = \frac{1}{(z-i)(z+3)}.$$

2/ Les singularités de f sont

$$z_0 = 2, \qquad z_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2i.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_2 := \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)} dz = \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z+2i)(z-2i)} dz.$$

Cette intégrale vaut zéro d'après le théorème de Cauchy. Ainsi,

$$I_2 := \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(z-2)(z^2+4)} dz \quad = \quad 0.$$

3/ Les singularités de f sont

$$z_0 = 2, \qquad z_1 = 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -2i.$$

Tout d'abord, nous avons

$$I_2 := \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z^2-4iz-4)} dz \quad = \quad \int_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z-2i)^2} dz.$$

Ainsi, l'intégrale se calcule comme suit

$$\begin{aligned} I_1 \quad &= \quad \int_{\gamma_1} \frac{\frac{z+1}{(z-2i)^2}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{z+1}{z}}{(z-2i)^2} dz, \\ &= \quad 2\pi i [g_1(0) + g_2'(2i)] = 2\pi i \left[\frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \right] = 0, \end{aligned}$$

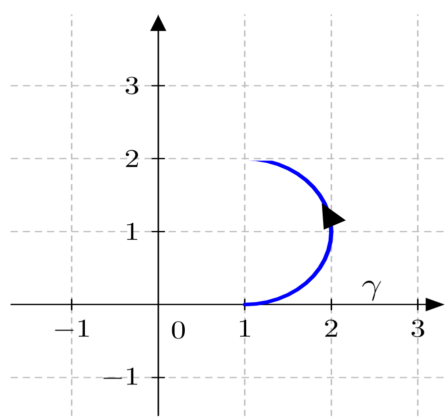
avec

$$g_1(z) = \frac{z+1}{(z-2i)^2} \qquad \text{et} \qquad g_2(z) = \frac{z+1}{z}.$$

Exercice 8 - Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1-i)^2} dz$$

où γ est le contour suivant



• **Solution:** Le chemin γ est un demi-cercle de centre $1+i$ et de rayon 1. Ainsi, nous avons

$$\gamma(t) = 1 + i + e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\gamma'(t) = ie^{it}.$$

L'intégrale curviligne devient

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1-i)^2} dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+i+e^{it}}{e^{2it}} \right) ie^{it} dt,$$

$$= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + i + e^{it}\right) e^{-it} dt,$$

$$= i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-it} + ie^{-it} + 1\right) dt,$$

$$= i \left[\frac{e^{-it}}{-i} - e^{-it} + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$= i \left[\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{-i} - e^{-i\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\right] - i \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{-i} - e^{i\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 9 - En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calucler les intégrales suivantes

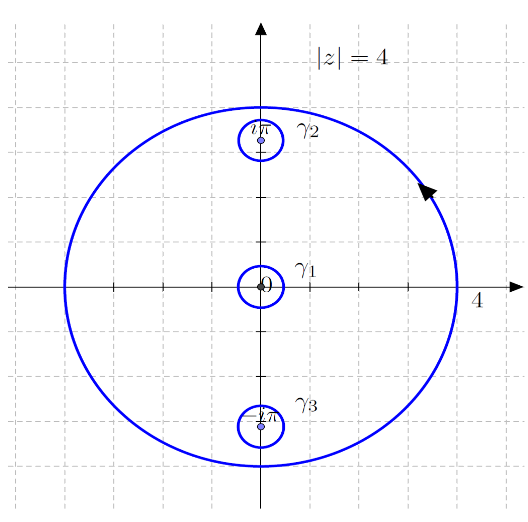
$$1) \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz,$$

$$2) \int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz,$$

$$3) \int_{|z|=3} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} dz,$$

$$4) \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz.$$

• **Solution:** 1) Nous remarquons que la fonction $\frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)}$ possède 3 singularités $0, i\pi$ et $-i\pi$.



Ainsi,

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz,$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{(z-i\pi)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{h(z)}{(z+i\pi)} dz.$$

avec

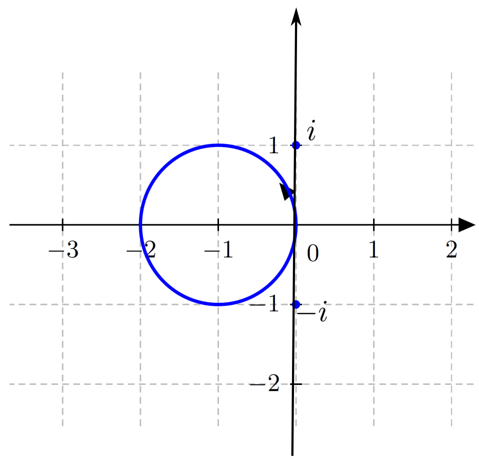
$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}, \quad g(z) = \frac{e^z}{z^2(z+i\pi)} \quad \text{et} \quad h(z) = \frac{e^z}{z^2(z-i\pi)}.$$

Les fonction f, g et h sont holomorphes à l'intérieur de γ_1, γ_2 et γ_3, respectivement. Ainsi, d'après les formules intégrales de Cauchy, on obtient

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2(z^2+\pi^2)} dz = 2\pi i f'(0) + 2\pi i g(i\pi) + 2\pi i h(-i\pi),$$

$$= 2\pi i(\frac{1}{\pi^2}) + 2\pi i(\frac{1}{2\pi^3 i}) + 2\pi i(\frac{-1}{2\pi^3 i}) = \frac{2i}{\pi}.$$

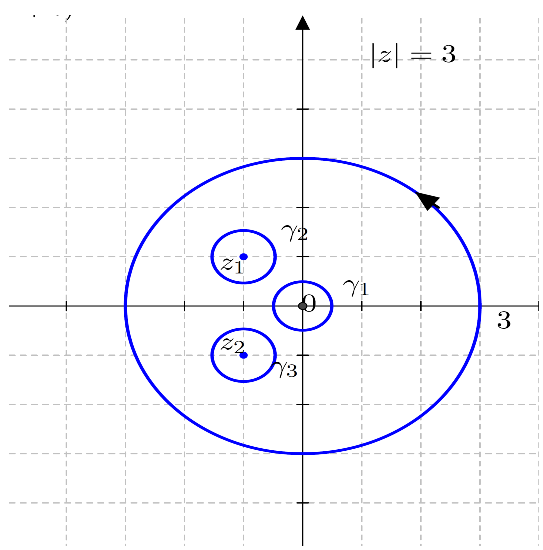
2) Nous remarquons que la fonction $\frac{e^{3z}}{z^2+1}$ est holomorphe à l'intérieur de $|z+1| = 1$.



Ainsi, par le théorème de Cauchy,

$$\int_{|z+1|=1} \frac{e^{3z}}{z^2+1} dz = 0.$$

3) La fonction $\dfrac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$ possède 3 singularité $0, z_1 := -1+i$ et $z_2 := -1-i$.



Ainsi,

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} dz + \int_{\gamma_3} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} dz,$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{g(z)}{(z-z_1)} dz + \int_{\gamma_3} \frac{h(z)}{(z-z_2)} dz,$$

avec

$$f(z) = \frac{z^2+4}{z^2++2z+2}, \quad g(z) = \frac{z^2+4}{z(z-z_2)} \quad \text{et} \quad h(z) = \frac{z^2+4}{z(z-z_1)}.$$

Les fonction f, g et h sont holomorphes à l'intérieur de γ_1, γ_2 et γ_3, respectivement. Ainsi d'après les formules intégrales de Cauchy, on obtient

$$\int_{|z|=3} \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z} dz = 2\pi i(2) + 2\pi i(\frac{-i+2}{-i-1}) + 2\pi i(\frac{-i+2}{i-1}) = 2\pi i.$$

4) La fonction $\dfrac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}$ possède une singularité à l'intérieur de $|z| = \frac{3}{2}$. Ainsi,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i f(1),$$

avec

$$f(z) = \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-2)}.$$

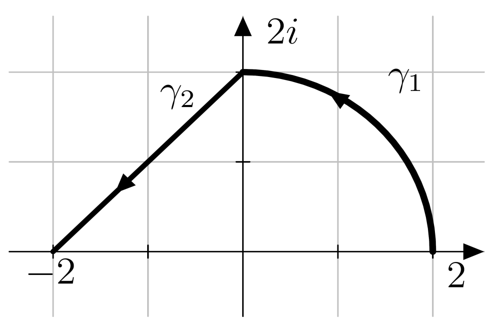
Donc,

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i.$$

Exercice 10 - Calculer l'intégrale curviligne suivante

$$\int_\gamma |z|^2 dz$$

où $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est le chemin suivant



• **Solution:** Le chemin γ_1 est un quart de cercle de centre 0 et de rayon 2. Ainsi, nous avons $\gamma_1(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\gamma_1'(t) = 2ie^{it}$. L'intégrale curviligne devient

$$\int_{\gamma_1} |z|^2 dz = \int_{\gamma_1} z\overline{z} dz = \int_0^{\pi/2} (2e^{it})(2e^{-it})(2ie^{it}) dt$$

$$= 8i \int_0^{\pi/2} e^{it} dt = 8i \left[\frac{e^{it}}{i}\right]_0^{\pi/2} = 8(e^{i\frac{\pi}{2}} - 1) = 8(i-1).$$

Le chemin γ_2 est un segment d'origine $2i$ et d'extrémité -2. Ainsi, $\gamma_2(t) = 2i(1-t) - 2t, \quad$ avec $\quad 0 \leq t \leq 1$. Ainsi, $\gamma_2'(t) = 2i - 2$. L'intégrale curviligne devient

$$\int_{\gamma_2} |z|^2 dz = \int_{\gamma_2} z\overline{z} dz = \int_0^1 (-2t + 2i(1-t))(-2t - 2i(1-t))(-2i-2) dt$$

$$= (-2i-2)\int_0^1 \left(4t^2+4(1-t)^2)\right) dt = (-2i-2)\int_0^1 \left(8t^2+4-8t)\right) dt$$

$$= (-2i-2)\left[\frac{8t^3}{3}+4t-4t^2\right]_0^1 = (-2i-2)\frac{8}{3}.$$

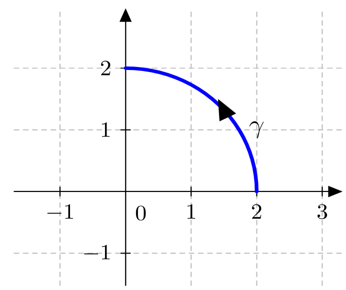
Finalement,

$$\int_\gamma |z|^2 dz = \int_{\gamma_1} |z|^2 dz + \int_{\gamma_2} |z|^2 dz = 8(i-1) + (-2i-2)\frac{8}{3}.$$

Exercice 11 - I) Calculer l'intégrale suivante

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z} dz,$$

avec γ donné dans la figure.



II) En utilisant les formules intégrales de Cauchy, calculer l'intégrale suivante

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)} dz.$$

• **Solution:** I) La paramétrisation du chemin (quart de cercle positif de centre 0 et de rayon 2) est donnée par:

$$\gamma(t) = 2e^{it}, \qquad \text{avec} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma'(t) = 2ie^{it}.$$

Ainsi,

$$\int_\gamma (\frac{z^2+4}{z}) dz = \int_0^{\pi/2} (\frac{4e^{2it}+4}{2e^{it}})(2ie^{it}) dt = 4i\int_0^{\pi/2} (e^{2it}+1) dt = 4i\left[\frac{e^{2it}}{2i}\Big|_0^{\pi/2} + t\Big|_0^{\pi/2}\right],$$

$$= 4i\left[\frac{e^{i\pi}-e^0}{2i}+\frac{\pi}{2}\right] = -4+2i\pi.$$

II) Soient γ_1 un cercle de centre 1 et de rayon r_1 et γ_2 un cercle de centre 0 et de rayon r_2. Ainsi, nous avons

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos \pi z}{z^2}}{z-1} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos \pi z}{z-1}}{z^2} dz = 2\pi i h(1) + 2\pi i g'(0).$$

Posons $h(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2}$ qui est holomorphe à l'intérieur de γ_1 et $g(z) = \frac{\cos \pi z}{z-1}$ qui est holomorphe à l'intérieur de γ_2. Donc, d'après les formules intégrales de Cauchy, on obtient

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)} dz \quad = \quad \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cos \pi z}{z^2}}{z-1} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{\cos \pi z}{z-1}}{z^2} dz = 2\pi i\, h(1) + 2\pi i\, g'(0).$$

Ainsi,

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z^2(z-1)} dz = 2\pi i(-1) + 2\pi i(-1) = -4\pi i.$$