1 Séparation des variables

Orientation: Une équation aux dérivées partielles peut admettre des solutions particulières qui sont des produits de fonctions d'une variable. Si l'équation est linéaire, une somme de telles solutions particulières est encore une solution. De cette manière on peut résoudre un certain nombre de problèmes intéressants mais la vraie portée de la méthode n'est réalisée que lorsque l'on utilise des sommes infinies des ces solutions particulières. Cet aspect sera exploré plus tard, notamment dans l'étude des séries de Fourier.

A titre d'exemple, on va traiter un problème concernant l'équation de la chaleur en détail. D'autres application de la méthode seront présentées plus brièvement.

1.1 L'équation de la chaleur

Commencons par le cas d'une variable spatiale. L'équation à résoudre est

$$\partial_t u(x,t) = c\partial_x^2 u(x,t)$$

où $c > 0$ est une constante physique (la conductivité thermique du milieu divisée par sa chaleur spécifique fois la densité de masse). La variable t représente le temps et x la position dans un milieu unidimensionelle (une barre) que nous pouvons identifier avec l'intervalle $[0, L]$. La température dans cette barre à l'instant t et à l'endroit x est $u(x, t)$. Un problème typique est de considérer que la distribution initiale de température sur toute la longueur de la barre est connue et que le flux de chaleur à travers les extrémités $x = 0$ et $x = L$ est contrôlé pendant la duréée de l'expérience. Dès lors on peut imaginer que la température est déterminée pour $x \in (0, L)$ et $t > 0$. Les conditions imposées sur les extrémités sont souvent de la forme

$$u(0,t) = 0 \text{ ou bien } \partial_x u(0,t) = 0 \text{ ou encore } \partial_x u(0,t) = au(0,t),$$
$$u(L,t) = 0 \text{ ou bien } \partial_x u(L,t) = 0 \text{ ou encore } \partial_x u(L,t) = -au(L,t),$$

où $a > 0$ est aussi une constante physique. Considérons un exemple typique.
Exemple 1 Trouver u telle que

$$\partial_t u(x,t) = c\partial_x^2 u(x,t) \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0, \tag{1}$$
$$u(0,t) = 0 \text{ et } \partial_x u(L,t) = 0 \text{ pour } t > 0, \tag{2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ pour } 0 < x < L, \tag{3}$$

où $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$ est la distribution initiale de température, supposée connue. Il serait raisonable de supposer que φ respecte les conditions imposées aux extrémités de la barre. Elles sont des **conditions de compatibilité :**

$$\varphi(0) = \frac{d\varphi}{dx}(L) = 0. \tag{4}$$

La méthode peut être présentée en deux étapes:

(1) **Séparation des variables**, où on cherche des solutions de (1) et (2) qui sont de la forme

$$u(x,t) = f(x)g(t) \text{ mais } u \not\equiv 0. \tag{5}$$

(2) **Superposition**, où on essaie de trouver une somme de solutions de la forme (5) que vérifie la condition (3). Noter qu'une telle somme vérifie encore (1) et (2).

(1) Une fonction de la forme (5) est une solution de l'équation (1) si $f \in C^2((0,L))$, $g \in C^1((0,\infty))$ et

$$f(x)g'(t) = cf''(x)g(t) \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0.$$

Aux points où $u(x,t) = f(x)g(t) \neq 0$, ceci s'ecrit comme

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = c\frac{f''(x)}{f(x)}$$

et donc il y a une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = c\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

pour tous les points $(x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$ tels que $u(x,t) \neq 0$. Il y a au moins un point $y \in (0,L)$ tel que $f(y) \neq 0$. Puisque $g \not\equiv 0$, il y a un intervalle $(t_1, t_2) \subset (0,\infty)$ tel que $g(t) \neq 0$ pour tout $t \in (t_1,t_2)$ et donc $u(y,t) \neq 0$ pour ces valeurs de t. En particulier,

$$g'(t) = \lambda g(t) \text{ pour tout } t \in (t_1, t_2),$$

ce qui implique qu'il existe une constante $A \neq 0$ telle que $g(t) = Ae^{\lambda t}$ pour tout $t \in (t_1,t_2)$.La continuité de g sur $(0,\infty)$ entraine que $g(t_1) = Ae^{\lambda t_1} \neq 0$

et que $g(t_2) = Ae^{\lambda t_2} \neq 0$. On déduit facilement que $g(t) \neq 0$ sur tout $(0, \infty)$ et que

$$g(t) = Ae^{\lambda t} \text{ pour tout } t > 0. \tag{6}$$

D'autre part, la condition (2) devient

$$f(0)g(t) = f'(L)g(t) = 0 \text{ pour tout } t > 0.$$

Donc on doit imposer que

$$f(0) = f'(L) = 0$$

pour satisfaire (2) si $u \not\equiv 0$. On voit ainsi que la fonction f doit être une solution non triviale, c'est à dire $f \not\equiv 0$, du problème aux limites

$$f''(x) = \frac{\lambda}{c} f(x) \text{ pour } 0 < x < L, \text{ et } f(0) = f'(L) = 0. \tag{7}$$

On verra ce ceci n'est possible que pour certaines valeurs de la constante λ bien particulières, appelées **valeurs propres du problème aux limites** (7). Calculons toutes les solutions de (7). La solution générale de l'équation différentielle est

$$f(x) = \begin{cases} Pe^{-\sqrt{\frac{\lambda}{c}}x} + Qe^{\sqrt{\frac{\lambda}{c}}x} & \text{si } \lambda > 0 \\ P + Qx & \text{si } \lambda = 0 \\ P \cos \sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}x + Q \sin \sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}x & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

où P et Q sont des constantes réelles arbitraires qu'il faut choisir àfin que f vérifie les conditions aux limites.

Cas $\lambda > 0$. La condition $f(0) = 0$ est vérifiée si et seulement si $P + Q = 0$, ce qui veut dire que f doit être de la forme $f(x) = 2Q \sinh \sqrt{\frac{\lambda}{c}}x$ et donc $f'(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{c}} 2Q \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{c}}x$. Pour assurer que f vérifie la condition $f'(L) = 0$, il faut choisir Q telle que $\sqrt{\frac{\lambda}{c}} 2Q \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{c}}L = 0$ et la seule solution est de poser $Q = 0$ car $\cosh y > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Mais si $P = -Q = 0$, $f \equiv 0$ et donc le problème (7) n'admet aucune solution non triviale lorsque $\lambda > 0$.

Cas $\lambda = 0$. Dans ce cas, $f(0) = P$ et $f'(L) = Q$. Donc il n'y a auncune solution non triviale de (7) dans ce cas non plus.

Cas $\lambda < 0$. La condition $f(0) = 0$ équivaut à $P = 0$ et donc f doit être de la forme $f(x) = Q \sin \sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}x$. La condition $f'(L) = 0$ devient $\sqrt{\frac{|\lambda|}{c}} Q \cos \sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}L =$

0 et on peut choisir $Q \neq 0$ pour autant que $\cos\sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}L = 0$. C'est à dire, le problème (7) admet des solutions non triviales si et seulement si la constante λ est telle que $\cos\sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}L = 0$. D'où

$$\sqrt{\frac{|\lambda|}{c}}L \in \{\frac{2n+1}{2}\pi : n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \lambda < 0.$$

Posant

$$\lambda_n = -c(n+\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{L})^2 \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

on voit que l'on obtient toutes les valeurs propres du problème (7). L'ensemble de toutes les valeurs propres

$$\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \tag{9}$$

est appelé le **spectre** du problème (7) et la fonction

$$f_n(x) = Q\sin\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x = Q\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x \text{ où } Q \neq 0 \tag{10}$$

est une **fonction propre** associée à la valeur propre λ_n.
Résumé de la 1ère étape On trouve que les équations (1) et (2) admettent des solutions non triviale de la forme (5) si et seulement si f est une fonction propre du problème aux limites (7) et g est de la forme (6) où λ est la valeur propre associée à f. Donc les solutions du problème (1)(2) de la (5) sont

$$u_n(x,t) = Q_n \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\ e^{\lambda_n t}$$

où $\lambda_n \in \sigma$ et Q_n est une constante réelle arbitraire, non nulle.

(2) **Superposition:** La forme des équations (1)(2) permet la superposition de solutions. On voit facilement que

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{m} Q_n \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\ e^{\lambda_n t}$$

est aussi une solution des équations (1) et (2) quelque soit $m \in \mathbb{N}$ et les constantes Q_n. On essaie dèsormais de choisir m et Q_n de sorte que u vérifie la condition (3). C'est à dire que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} Q_n \sin\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x \text{ pour tout } x \in (0,L). \tag{11}$$

Ceci est possible si et seulement si

$$\varphi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\sum_{n=0}^{m} Q_n f_n : m \in \mathbb{N} \text{ et } Q_n \in \mathbb{R}\}$$

où f_n est une fonction propre donné par (10). Lorsque $\varphi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, les coefficients Q_n sont déterminés par le calcul suivant. Notons d'abord que

$$\int_0^L \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_k|}{c}}x)dx = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{L}{2} & \text{si } n = k \end{array} \right. .$$

Admettant que $\varphi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ et donc qu'elle peut être exprimée par (11), on multiplie (11) par $\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_k|}{c}}x)$ et puis on intègre de 0 à L. On trouve que

$$\begin{aligned} \int_0^L \varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_k|}{c}}x)dx &= \int_0^L \sum_{n=0}^{m} Q_n \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_k|}{c}}x)dx \\ &= \sum_{n=0}^{m} Q_n \int_0^L \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_k|}{c}}x)dx \\ &= Q_k \frac{L}{2} \text{ si } 0 \leq k \leq m \end{aligned}$$

et donc

$$Q_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_k|}{c}}x)dx \text{ si } 0 \leq k \leq m$$

tandis que $Q_k = 0$ pour tout $k > m$. C'est à dire, si $\varphi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x \text{ pour tout } x \in (0, L) \text{ où} \\ Q_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

car il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\int_0^L \varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)dx = 0$ pour tout $n > m$.
Conclusion: La méthode de séparation des variables permet de résoudre le problème (1),(2) et (3) pour des fonctions $\varphi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ où f_n est une

fonction propre du problème aux limites (7). La solution est

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\ e^{\lambda_n t}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)\ e^{-c[\frac{(2n+1)\pi}{2L}]^2 t} \tag{12}$$

car $\lambda_n=-c(n+\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{L})^2$ et

$$Q_n=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)dx \text{ pour tout } n\in\mathbb{N} \tag{13}$$

$$=\frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)dx. \tag{14}$$

La somme dans (12) est finie pour tout $\varphi\in ev\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$.
Remarque Notons que toutes les fonctions $\varphi\in ev\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ sont infiniement dérivables sur $[0,L]$ et vérifient les conditions de compatibilité (4). La solution (12) est infiniement dérivable sur $[0,L]\times[0,\infty)$ car c'est la somme d'un nombre fini de fonctions de ce genre. Etant donné une fonction φ qui est infiniement dérivable sur $[0,L]$, on peut déterminer si ou non elle appartient à $ev\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ en calculant les intégrales (13). Alors $\varphi\in ev\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ si et seulement si toutes sauf un nombre fini de ces intégrales sont nulles. Ces mêmes calculs donnent les coefficients dans la solution (12).
Exemples Cherchons la solution de problème (1),(2) et (3) dans les cas suivants:

$$(i)\quad \varphi(x)=\sin^3\frac{5\pi}{2L}x \qquad (ii)\quad \varphi(x)=1-\cos\frac{\pi}{L}x.$$

(i) Dans ce cas, on voit que $\varphi\in ev\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ grâce à la formule

$$\sin^3\theta=\frac{1}{4}\{3\sin\theta-\sin 3\theta\}$$

qui montre que

$$\varphi(x)=\frac{1}{4}\{3\sin\frac{5\pi}{2L}x-\sin\frac{15\pi}{2L}x\}$$

dans le cas présent. D'où,

$$Q_2=\frac{3}{4},\quad Q_7=-\frac{1}{4}\quad \text{et}\quad Q_n=0 \text{ pour } n\in\mathbb{N}\backslash\{2,7\}.$$

Bien entendu, on peut aussi obtenir ce résultat en calculant

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin^3 \frac{5\pi}{2L}x \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La solution du problème (1),(2) et (3) est

$$\begin{aligned} u(x,t) &= Q_2 \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_2|}{c}}x)\ e^{\lambda_2 t} + Q_7 \sin(\sqrt{\frac{|\lambda_7|}{c}}x)\ e^{\lambda_7 t} \\ &= \frac{3}{4}\sin(\frac{5\pi}{2L}x)\ e^{-c[\frac{5\pi}{2L}]^2 t} - \frac{1}{4}\sin(\frac{15\pi}{2L}x)\ e^{-c[\frac{15\pi}{2L}]^2 t}. \end{aligned}$$

(ii) Dans ce cas, φ est infiniement dérivable et vérifie les conditions de compatibilité (4). Cepandant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L [1-\cos\frac{\pi}{L}x]\sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)dx \\ &= -\frac{16}{\pi}\frac{1}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)} \neq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

D'où $\varphi \notin ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ et la méthode, sous sa forme actuelle, échoue. Noter que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x \text{ converge normalement sur } [0,L] \text{ car}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|Q_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right| \leq \frac{16}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+1)(2n-1)} < \infty.$$

La théorie des problèmes aux limites assure que

$$1-\cos\frac{\pi}{L}x = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin\frac{(2n+1)\pi}{2L}x$$

et donc même dans le cas (ii) on a obtenu la solution du problème.
Remarque Noter que dans tous les cas, la convergence normale sur $[0,L]$ de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)\ e^{-c[\frac{(2n+1)\pi}{2L}]^2 t}$$

est assurée pour chaque valeur de $t > 0$ car

$$|Q_n| = \frac{2}{L}\left|\int_0^L \varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)dx\right| \leq \frac{2}{L}\int_0^L \left|\varphi(x)\sin(\sqrt{\frac{|\lambda_n|}{c}}x)\right| dx$$

$$\leq \frac{2}{L}\int_0^L |\varphi(x)|\, dx \leq 2 \max_{0\leq x\leq L} |\varphi(x)| \text{ et donc}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| Q_n \sin(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x)\ e^{-c[\frac{(2n+1)\pi}{2L}]^2 t}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |Q_n|\, e^{-c[\frac{(2n+1)\pi}{2L}]^2 t}$$

$$\leq 2 \max_{0\leq x\leq L} |\varphi(x)| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-c[\frac{(2n+1)\pi}{2L}]^2 t} < \infty$$

1.2 L'équation de Laplace

La méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation de Laplace dans une région rectangulaire lorsque l'on impose une condition sur la solution sur chaque coté du rectangle.

Exemple 2 Trouver u telle que

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K, \tag{15}$$

$$u(0,y) = u(L,y) = 0 \text{ pour } 0 < y < K, \tag{16}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ et } u(x,K) = \psi(x) \text{ pour } 0 < x < L, \tag{17}$$

où $\varphi, \psi : [0,L] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Dans ce cas les **conditions de compatibilités** sont

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0. \tag{18}$$

(1) **Séparation des variables:** Cherchons des solutions de (14) et (15) de la forme

$$u(x,y) = f(x)g(y). \tag{19}$$

L'équation (14) devient

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K,$$

et donc il y a une constante λ telle que

$$f''(x) - \lambda f(x) = g''(y) + \lambda g(y) = 0.$$

La condition (15) devient $f(0) = f(L) = 0$, sinon $g(y) = 0$ pour tout $0 < y < K$.

Cherchons les valeurs propres et les fonctions propres du problème aux limites

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \text{ pour } 0 < x < L$$
$$f(0) = f(L) = 0.$$

On trouve que le spectre est

$$\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \text{ où } \lambda_n = -(\frac{n\pi}{L})^2$$

et une fonction propre associée à λ_n est

$$f_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Pour $\lambda = \lambda_n$, la solutionn générale de $g''(y) + \lambda g(y) = 0$ est

$$g(y) = Pe^{\frac{n\pi}{L}y} + Qe^{-\frac{n\pi}{L}y}$$

où P et Q sont des constantes arbitraires. Les solutions de (14) et (15) ayant la forme (18) sont

$$u(x, y) = \sin \frac{n\pi}{L} x\{Pe^{\frac{n\pi}{L}y} + Qe^{-\frac{n\pi}{L}y}\}.$$

(2) **Superposition:** On voit que

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{m} \sin \frac{n\pi}{L} x\{P_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\}$$

est une solution de (14) et (15), quelque soit $m \in \mathbb{N}$ et les coefficients P_n et Q_n. On essaie de choisir m, P_n et Q_n âfin de satisfaire (16) qui devient

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{m} \sin \frac{n\pi}{L} x\{P_n + Q_n\} \text{ et}$$
$$\psi(x) = u(x, K) = \sum_{n=1}^{m} \sin \frac{n\pi}{L} x\{P_n e^{\frac{n\pi}{L}K} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}\}.$$

Ceci montre que forcément $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas on peut déterminer m, P_n et Q_n de la manière suivante. Si $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \text{ et } \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

où tous, sauf un nombre fini, des coefficients α_n et β_n sont nuls. On les calcule en multipliant par $\sin \frac{k\pi}{L} x$ et intégrant de 0 à L :

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \alpha_k \frac{L}{2}.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \psi(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \beta_k \frac{L}{2},
\end{aligned}$$

Donc il suffit de choisir P_n et Q_n telles que

$$\begin{aligned}
P_n + Q_n = \alpha_n \text{ où } \alpha_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\
P_n e^{\frac{n\pi}{L} K} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L} K} = \beta_n \text{ où } \beta_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.
\end{aligned}$$

La solution de ce système est

$$P_n = \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L} K}}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}} \text{ et } Q_n = \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L} K} - \beta_n}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}}.$$

Conclusion: La méthode de séparation des variables permet de résoudre le problème (14) - (16) pour des fonctions $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. En ce cas, la solution est

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \{ P_n e^{\frac{n\pi}{L} y} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L} y} \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \{ \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L} K}}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}} e^{\frac{n\pi}{L} y} + \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L} K} - \beta_n}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}} e^{-\frac{n\pi}{L} y} \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{L} x}{2 \sinh e^{\frac{n\pi}{L} K}} \{ \beta_n \sinh \frac{n\pi}{L} y - \alpha_n \sinh \frac{n\pi}{L} (y - K) \} \end{aligned}$$

où

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \text{ et } \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

L'hypothèse que $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ assure que seulement un nombre fini des constantes α_n et β_n sont non nulles et donc il s'agit des sommes finies. Notons que la solution vérifie les conditions de compatibilité (17) et elle est infiniement dérivable.

Comme pour l'exemple 1, le généralité de l'approche serait augmentée d'une manière importante dès que l'on puisse traiter des sommes infinies.

1.3 Quand peut-on utiliser la méthode ?

A travers les exemples ci-dessus, on peut comprendre le cadre dans lequel cette approche est utile.

(1) L'équation aux dérivées partielles doit être linéaire et homogène. C'est une somme d'opérateurs différentiels portant sur les variables séparément.

(2) Le domaine dans lequel on cherche la solution de l'équation aux dérivées partielles doit être un produit d'intervalles.

(3) Sauf pour une des variables, les conditions imposées sur le bord du domaine doivent être linéaires et homogène.

Parfois on peut se ramèner à cette situation par un travail préparatoire.

Exemple 1(bis) Considérons le problème,

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= c \partial_x^2 u(x,t) \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0, \\ u(0,t) &= a \text{ et } \partial_x u(L,t) = b \text{ pour } t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \text{ pour } 0 < x < L, \end{aligned}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$ sont donnés. Ce problème n'a pas la propriété (3). Or, il suffit de chercher u sous la forme $u = v + w$ où

$$v(x) = a + bx \text{ pour } 0 \leq x \leq L$$

et w est une solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t w(x,t) &= c\partial_x^2 w(x,t) \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0, \\ w(0,t) &= 0 \text{ et } \partial_x w(L,t) = 0 \text{ pour } t > 0, \\ w(x,0) &= \varphi(x) - v(x) \text{ pour } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Ce problème pour w est du genre traité dans l'exemple 1.
Exemple 2(bis) Considérons le problème,

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K, \\ u(0,y) &= \xi(y) \text{ et } u(L,y) = \eta(y) \text{ pour } 0 < y < K, \\ u(x,0) &= \varphi(x) \text{ et } u(x,K) = \psi(x) \text{ pour } 0 < x < L, \end{aligned}$$

où les fonctions $\varphi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$ et $\xi, \eta : [0, K] \to \mathbb{R}$ sont données. Encore une fois ce problème n'a pas la propriété (3), mais il suffit de chercher u sous la forme $u = v + w$ où

v est une solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta v(x,y) &= 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K, \\ v(0,y) &= 0 \text{ et } v(L,y) = 0 \text{ pour } 0 < y < K, \\ v(x,0) &= \varphi(x) \text{ et } v(x,K) = \psi(x) \text{ pour } 0 < x < L, \end{aligned}$$

et w est une solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta w(x,y) &= 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K, \\ w(0,y) &= \xi(y) \text{ et } w(L,y) = \eta(y) \text{ pour } 0 < y < K, \\ w(x,0) &= 0 \text{ et } w(x,K) = 0 \text{ pour } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Les problèmes pour v et w ont les propriétés (1) à (3) et peuvent être traiter comme l'exemple 2.

Parfois la propriété (2) peut être récupérée par un changement de variable.
Exemple 3 Soient $R > 0$ et $\Omega = B(0, R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R\}$. Trouver une fonction u telle que

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ pour } (x,y) \in \Omega, \tag{20}$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y) \text{ pour } (x,y) \in \partial\Omega \tag{21}$$

où la fonction $\varphi : \partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = R\} \to \mathbb{R}$ est donnée.

Dans ce cas le domaine Ω n'est pas le produit de deux intervalles. Cependant, en coordonnées polaires (r,θ) il correspond aux points tels que $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Donc on peut essayer de chercher u sous la forme

$$u(x,y) = v(r,\theta)$$

où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Commencons par exprimer (19) utilisant v. En fait,

$$\Delta u(x,y) = \partial_r^2 v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 v(r,\theta) \text{ pour } r > 0$$

et donc (19) devient

$$r^2\partial_r^2 v(r,\theta) + r\partial_r v(r,\theta) + \partial_\theta^2 v(r,\theta) = 0 \text{ pour } 0 < r < R \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (22)$$

mais il faut aussi assurer que $u(x,y) = v(r,\theta)$ est régulière au point $r = 0$. Posant $\Phi(\theta) = \varphi(R\cos\theta, R\sin\theta)$ on voit que Φ est $2\pi-$ périodique et que le problème (19)(20) équivaut à trouver $v : [0,R] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait (21) et

$$v(r,\cdot) \text{ est } 2\pi - \text{ périodique pour chaque } r \in (0,R] \text{ et} \quad (23)$$
$$v(R,\theta) = \Phi(\theta) \text{ pour } \theta \in [0,2\pi]. \quad (24)$$

Notons que (22) joue le rôle une condition linéaire et homogène. D'autre part, pour On peut résoudre le problème (21) à (23) par la méthode de séparation des variables.

(1) **Séparation des variables:** Cherchons des solutions de (21) et (22) de la forme

$$v(r,\theta) = f(r)g(\theta). \quad (25)$$

Remplacant dans (21) on trouve

$$r^2 f''(r)g(\theta) + rf'(r)g(\theta) + f(r)g''(\theta) = 0$$

et donc il y a une constante λ telle que

$$r^2 f''(r) + rf'(r) = \lambda f(r) \text{ et } g''(\theta) = -\lambda g(\theta) \quad (26)$$

pour $0 < r < R$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Or la fonction g doit être $2\pi-$ périodique et donc g doit être une solution du problème aux limites

$$g''(\theta) = -\lambda g(\theta) \text{ pour } \theta \in \mathbb{R} \quad (27)$$
$$g \text{ est } 2\pi - \text{périodique.}$$

D'autre part, le produit $f(r)g(\theta)$ doit définir une fonction $u(x,y)$ qui est régulière en $(0,0)$. En particulier, la continuité de u en $(0,0)$ exige que

$$\lim_{r\to 0} f(r) \text{ soit finie si } g \text{ est constante et que } \lim_{r\to 0} f(r) = 0 \text{ si } g \text{ n'est pas constante.} \tag{28}$$

Le spectre du problème (26) est

$$\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ où } \lambda_n = n^2$$

et une fonction propre associée à λ_n est

$$g_n(\theta) = \begin{cases} A & \text{si } n = 0 \\ A\cos n\theta + B\sin n\theta & \text{si } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$$

où A, B sont des constantes arbitraires et $A \neq 0$ si $n = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ si $n \neq 0$.

Pour $\lambda = \lambda_n$, la fonction f doit satisfaire l'équation différentielle

$$r^2 f''(r) + rf'(r) = -n^2 f(r) \text{ pour } 0 < r < R.$$

Elle est du type d'Euler et le changement de variable $r = e^s$ la ramène à une équation aux coefficients constantes. La solution générale est

$$f(r) = \begin{cases} P + Q\ln r & \text{si } n = 0 \\ P\ r^n + Q\ r^{-n} & \text{si } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{cases}$$

où P, Q sont de constantes arbitraires. Or, d'après (27), on doit poser $Q = 0$ pour assurer que le produit $f(r)g(\theta)$ défini une fonction continue à l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

Donc comme solutions de (21)(22) de la forme (24) on obtient

$$v(r,\theta) = r^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

et A, B sont des constantes arbitraires.

(2) **Superposition:** Notons que

$$v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{m} r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$$

est aussi une solution de (21)(22) qui défini une fonction $u(x,y)$ continue à l'origine dans $\mathbb{R}^2$. Il reste à choisir les coefficients A_n et B_n de sorte que v satisfait (23). C'est à dire,

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=0}^{m} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \text{ pour } \theta \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Donc il faut que la fonction donnée φ sur $\partial\Omega$ soit telle que

$$\Phi \in ev\{\cos n\theta, \sin n\theta : n \in \mathbb{N}\}.$$

En ce cas, il existe des coefficients α_n et β_n tels que

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin n\theta$$

où seulement un nombre fini des coefficients sont non nuls. En ce cas ils sont déterminés par

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)d\theta, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\cos n\theta d\theta \quad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\sin n\theta d\theta \tag{30}$$

pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Ainsi (28) est vérifié en posant

$$A_n = R^{-n}\alpha_n \text{ et } B_n = R^{-n}\beta_n.$$

Une solution du problème (19)(20) est alors

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n \{\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta\}$$

où α_n, β_n sont définis par (29).

Notons que

$$\begin{aligned}
&\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\xi)\cos n\xi d\xi \cos n\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\xi)\sin n\xi d\xi \sin\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\xi)\cos n(\xi-\theta)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\xi)\{e^{in(\xi-\theta)} + e^{-in(\xi-\theta)}\}d\xi
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\xi)\{e^{in(\xi-\theta)}+e^{-in(\xi-\theta)}\}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\xi)\{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{R})^n e^{in(\xi-\theta)} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{R})^n e^{-in(\xi-\theta)}\}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\xi)\{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{re^{i(\xi-\theta)}}{R})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{re^{-i(\xi-\theta)}}{R})^n\}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\xi)\{\frac{1}{1-\frac{re^{i(\xi-\theta)}}{R}} + \frac{1}{1-\frac{re^{-i(\xi-\theta)}}{R}} - 1\}d\xi.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{re^{i(\xi-\theta)}}{R}} + \frac{1}{1-\frac{re^{-i(\xi-\theta)}}{R}} - 1 &= \frac{1-(\frac{r}{R})^2}{(1-\frac{re^{i(\xi-\theta)}}{R})(1-\frac{re^{-i(\xi-\theta)}}{R})} \\
&= \frac{1-(\frac{r}{R})^2}{1+(\frac{r}{R})^2-2(\frac{r}{R})\cos(\xi-\theta)} \\
&= \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\xi)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta)}d\xi \\
&= \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(R\cos\xi, R\sin\xi)\frac{1}{R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta)}d\xi.
\end{aligned}$$

Enfin on peut exprimer le résultat en coordonnées cartésiennes.

Soient $X=(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $Y=(R\cos\xi, R\sin\xi)$. Alors

$$R^2-r^2 = |Y|^2-|X|^2 \text{ et } R^2+r^2-2rR\cos(\xi-\theta) = |Y-X|^2$$

par la formule de cosinus. D'autre part, $\alpha(\xi)=(R\cos\xi, R\sin\xi)$ est une représentation paramétrique de $\partial\Omega$ et $|\alpha'(\xi)| = R$. Donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \varphi(R\cos\xi, R\sin\xi)\frac{1}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\xi - \theta)}d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha(\xi))\frac{1}{|\alpha(\xi) - X|^2}\frac{|\alpha'(\xi)|}{R}d\xi \\
&= \frac{1}{R}\int_{\partial\Omega}\frac{\varphi(s)}{|s - X|^2}ds
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u(x,y) = u(X) &= \frac{R^2 - |X|^2}{2\pi R}\int_{\partial\Omega}\frac{\varphi(s)}{|s - X|^2}ds \\
&= \int_{\partial\Omega}\varphi(s)K(X,s)ds
\end{aligned}$$

où

$$K(X,Y) = \frac{R^2 - |X|^2}{2\pi R\,|Y - X|^2}$$

est appelé **noyau de Poisson** pour le problème de **Dirichlet sur la boule** $B(0,R)$. On peut vérifier que la formule () donne une solution du problème (20)(21) pour toute fonction $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$ et pas seulement pour les fonctions φ telles que $\Phi \in ev\{\cos n\theta, \sin n\theta : n \in \mathbb{N}\}$. Par ailleurs, le principe du maximum pour des fonctions harmoniques montre que la solution de (20)(21) est unique.

2 Problèmes de Sturm-Liouville et Séries de Fourier

<u>**But**</u>: Le développement d'une fonction comme une somme de fonctions propres d'un problème aux limites joue un rôle essentiel dans la méthode de séparation des variables. Pour exploiter au maximum ce procédure, on veut utiliser des sommes infinies. Dans ce chapitre on présente quelques résultats concernant la convergence de ces sommes et des les classes de fonctions qui admettent une telle réprésentation.

<u>**Orientation**</u>: Considérons un des problèmes fondamentaux d'algèbre linéaire. Un vecteur $f \in \mathbb{R}^N$ et une matrice $N \times N$ qui est réelle et symétrique M, sont donnés. On doit trouver toutes les solutions $u \in \mathbb{R}^N$ du système linéaire

$$Mu = f.$$

Une démarche consiste à calculer d'abord une base orthonormée $\{\varphi_n : 1 \leq n \leq N\}$ formée de vecteurs propres de M (on sait qu'une telle base existe) et ensuite de développer f et u selon cette base. Il reste à déterminer les coefficients de u. En fait,

$$f = \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n \text{ où } f_n = \langle f, \varphi_n \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$. Ecrivant

$$u = \sum_{n=1}^{N} u_n \varphi_n,$$

il faut trouver des coefficients u_n tels que $Mu = f$. Or

$$Mu = \sum_{n=1}^{N} u_n M \varphi_n = \sum_{n=1}^{N} u_n \lambda_n \varphi_n$$

où λ_n est la valeur propre de M associée à φ_n. Donc u est une solution de l'équation $Mu = f$ si et seulement si

$$u_n \lambda_n = f_n \text{ pour tout } 1 \leq n \leq N.$$

Si $\lambda_n \neq 0$ pour tout $1 \leq n \leq N$, le problème admet une solution unique pour tout $f \in \mathbb{R}^N$:

$$u_n = \frac{f_n}{\lambda_n} \text{ pour tout } n = 1, ..., N \text{ et } u = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{\lambda_n}\varphi_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\lambda_n}\varphi_n.$$

Si 0 est une valeur propre de M, le problème n'a aucune solution si $f_n \neq 0$ lorsque $\lambda_n = 0$.

La simplicité de cette approche réside dans le fait que la matrice M agit d'une manière triviale (multiplication par le nombre λ_n) sur les vecteurs φ_n. La généralité de la méthode est assurée car tout vecteur donné f et toute solution u admettent un dévelopement selon les φ_n. L'orthonormalité des φ_n permet de calculer les coefficients de ce dévelopement facilement.

La solution des équations différentielles par la méthode de séparation des variables suit la même démarche. On cherche d'abord des fonctions qui se comportent très simplement par rapport à l'opérateur différentiel. Elles sont des fonctions propres d'un problème aux limites et on les trouve en séparant les variables. Ensuite, dans l'étape appelée superposition, on développe les données utilisant les fonctions propres et on détermine les coefficients de la solution dans un développement analogue. Or, il y a une infinité de fonctions propres pour de tels problèmes aux limites et pour atteindre une classe importante de données il faut admettre des développements utilisant toutes ces fonctions propres. Dans ce chapitre on présente des information essentielles à ce sujet.

2.1 Problèmes réguliers de Sturm-Liouville

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et posons $J = [a, b]$. Considérons le problème aux limites

$$-\{p(x)u'(x)\}' + q(x)u(x) = \lambda u(x) \text{ pour } < a < x < b \tag{31}$$
$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \text{ et } \delta u(b) + \gamma u'(b) = 0. \tag{32}$$

Il s'agit d'un **problème régulier de Sturm-Liouville** lorsque les conditions suivantes sont verifiées:
(i) $p \in C^1(J, \mathbb{R})$ et $p(x) \neq 0$ pour tout $x \in J$
(ii) $q \in C(J, \mathbb{R})$
(iii) $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ et $\delta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

Noter que la condition (i) implique qu'il existe une constante $P > 0$ telle que un des deux cas suivant se produit:

ou bien $p(x) \geq P > 0$ pour tout $x \in J$,

ou bien $p(x) \leq -P < 0$ pour tout $x \in J$,

Une **fonction propre** est une fonction $u \in C^2(J, \mathbb{C})$ qui satisfait les équations (1)(2) telle que u n'est pas identiquement nulle sur J. Les valeurs de λ telles que (1)(2) admet une fonction propre sont les **valeurs propres** et l'ensemble de toutes les valeurs propres est appelé le **spectre** de (1)(2), noté σ. Dans le chapitre concernant la séparation des variables, on a rencontré plusieurs exemples de ce type de problème.

Théorème 2.1 *Soit (1)(2) un problème régulier de Sturm-Liouville. Alors,*

(1) $\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *où*

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 ... \ \text{et} \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \ \text{si} \ p > 0 \ \text{sur} \ J, \ \text{et}$$
$$\infty > \lambda_0 > \lambda_1 ... \ \text{et} \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = -\infty \ \text{si} \ p < 0 \ \text{sur} \ J.$$

(2) il y a une fonction $\varphi_n \in C^2(J, \mathbb{R})$ *telle que*

$$ev\{\varphi_n\} = \{u \in C^2(J, \mathbb{C}) : \ u \ \text{satisfait (1)(2) pour} \ \lambda = \lambda_n\},$$

(3) pour $n \neq m$,

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0. \tag{33}$$

Remarque Selon la propriété (2), toutes les valeurs propres sont **simples** dans le sens qu'elles n'admettent qu'une fonction propre (à un facteur multiplicatif près). Elles sont **orthogonales** dans le sens de (3).

Preuve On se limite à montrer que si φ_n est une fonction propre associée à λ_n, alors λ_n est réelle et (3) est vérifié. Multipliant (1) par $\overline{\varphi_n}$ et intégrant sur J, on obtient

$$-\{p(x)\varphi_n'(x)\}\overline{\varphi_n(x)} \mid_{x=a}^{x=b} + \int_a^b p(x) \left|\varphi_n'(x)\right|^2 dx + \int_a^b q(x) \left|\varphi_n(x)\right|^2 dx$$
$$= \lambda_n \int_a^b \left|\varphi_n(x)\right|^2 dx.$$

Mais

$$\varphi_n'(a)\overline{\varphi_n(a)} \text{ et } \varphi_n'(b)\overline{\varphi_n(b)} \in \mathbb{R}$$

par (2), montrant que $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Donc $\operatorname{Re} \varphi_n$ et $\operatorname{Im} \varphi_n$ vérifiées (1)(2) et elles ne sont pas toutes les deux identiquement nulles, montrant qu'il existe une fonction propre à valeurs réelles. D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\lambda_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \\
&= -\{p(x)\varphi_n'(x)\}\varphi_m(x) + \int_a^b p(x)\varphi_n'(x)\varphi_m'(x) + q(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \\
&= -\{p(x)\varphi_n'(x)\}\varphi_m(x) \,|_{x=a}^{x=b} + \varphi_n(x)\{p(x)\varphi_m'(x)\} \,|_{x=a}^{x=b} \\
&+ \int_a^b -\varphi_n(x)\{p(x)\varphi_m'(x)\}' + q(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx \\
&= p(x)\{\varphi_n(x)\varphi_m'(x) - \varphi_n'(x)\varphi_m(x)\} \,|_{x=a}^{x=b} + \lambda_m \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = p(x)\{\varphi_n(x)\varphi_m'(x) - \varphi_n'(x)\varphi_m(x)\} \,|_{x=a}^{x=b} = 0$$

par (2).

Concernant le développement d'une fonction f comme une somme de fonctions propres, voici un exemple de ce que l'on peut démontrer

Théorème 2.2 *Soit $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble de toutes les fonctions propres d'un problème régulier de Sturm-Liouville (1)(2), normalisées par*

$$\int_a^b \varphi_n(x)^2 dx = 1.$$

(1) Soit $f \in C^2(J)$ une fonction qui satisfait les conditions aux limites (2). Alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \varphi_n(x) \text{ pour tout } x \in J$$

où

$$\alpha_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

et la série converge normalement sur J.

(2) Si $g \in C(J)$ et

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \varphi_n(x) \text{ pour tout } x \in J$$

où la série converge uniformément sur J, alors

$$\beta_n = \int_a^b g(x)\varphi_n(x)dx.$$

Notons quelques cas particuliers.

Exemple 1 Considérons le problème:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) \text{ pour } 0 < x < \pi \\ u'(0) &= u'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un problème régulier de Sturm-Liouville. Le spectre est $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ où $\lambda_n = n^2$ et la fonction propre normalisée associées à λ_n est

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \text{ pour } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Un développement de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos nx \text{ où} \\ f_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \text{ et } f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \text{ pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

est appelé **série de Fourier de f en cosinus.** Noter que les fonctions $\cos nx$ sont orthogonales mais pas normées. Une condition sufficante pour la validité de ce développement est que $f \in C^2([0, \pi])$ avec $f'(0) = f'(\pi) = 0$.

Exemple 2 Considérons le problème:

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) \text{ pour } 0 < x < \pi \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit aussi d'un problème régulier de Sturm-Liouville. Le spectre est $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ où $\lambda_n = n^2$ et la fonction propre normalisée associées à λ_n est

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \text{ pour } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Un développement de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin nx \text{ où } f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

est appelé **série de Fourier de f en sinus.** Noter que les fonctions $\sin nx$ sont orthogonales mais pas normées. Une condition sufficante pour la validité de ce développement est que $f \in C^2([0,\pi])$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$.

2.2 Séries de Fourier

Une variante de la notion de problème régulier de Strurm-Liouville se présente lorsque l'on considère le problème aux limites:

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \\ u \text{ périodique de période } 2\pi. \end{aligned}$$

Une forme équivalente de ce problème est

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) \text{ pour } 0 < x < 2\pi \\ u(0) &= u(2\pi) \text{ et } u'(0) = u'(2\pi). \end{aligned}$$

On a vu que le spectre de ce problème est $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ où $\lambda_n = n^2$. Or, pour $n \geq 1$, les valeurs propres λ_n ne sont pas simples dans ce cas. En fait, pour $\lambda = \lambda_n$ et $n \geq 1$, l'ensemble de solutions du problème aux limites est

$$ev\{\cos nx, \sin nx\} = \{A\cos nx + B\sin nx : A, B \in \mathbb{R}\}.$$

Dans ce cas on peut développer une function périodique utilisant les fonctions $\{\cos nx, \sin nx : n \in \mathbb{N}\}$. Un développement de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \\ \text{où } A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \text{ et } B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \text{pour } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

est appelé **série de Fourier (complète) de** f. Une condition sufficante pour la validité de ce développement est que $f \in C^2([0, 2\pi])$ avec $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

Il y a plusieures formes alternatives de la série de Fourier.
(i) On peut remplacer l'intervalle $[0, 2\pi]$ par un autre intervalle de longueur 2π. Le choix $[-\pi, \pi]$ est très utile car en ce cas, la série de Fourier complète se réduit

$$\text{à la série en cosinus si } f \text{ est paire, et}$$
$$\text{à la série en sinus si } f \text{ est impaire.}$$

(ii) On peut travailler sur un intervalle fermé et borné quelconque, $[a, b]$. En ces cas il faut utiliser les fonctions

$$\cos \frac{2n\pi}{(b-a)} x, \sin \frac{2n\pi}{(b-a)} x \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

qui sont périodiques de période $(b - a)$, la longueur de l'intervalle. Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ses **coefficients de Fourier sur** $[a, b]$ sont

$$A_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \text{ (la moyenne de } f\text{)}$$
$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{(b-a)} x dx \text{ et } B_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{(b-a)} x dx$$

et **la série de Fourier complète de** f **sur** $[a, b]$ est

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos \frac{2n\pi}{(b-a)} x + B_n \sin \frac{2n\pi}{(b-a)} x\}.$$

(iii) On peut remplacer $\cos \frac{2n\pi}{(b-a)} x$ et $\sin \frac{2n\pi}{(b-a)} x$ par $\operatorname{Re} e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x} = \frac{1}{2}\{e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x} + e^{-i \frac{2n\pi}{(b-a)} x}\}$ et $\operatorname{Im} e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x} = \frac{1}{2i}\{e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x} - e^{-i \frac{2n\pi}{(b-a)} x}\}$ respectivement. En ce cas, le développement de f devient

$$\begin{aligned}
f(x) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{2n\pi}{(b-a)}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{2n\pi}{(b-a)}x \\
&= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{2}\{e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} + e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}\} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{2i}\{e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} - e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}\} \\
&= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n - iB_n}{2} e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}
\end{aligned}$$

où

$$C_n = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

car

$$\begin{aligned}
&\frac{A_n - iB_n}{2} \\
&= \frac{1}{2}\{\frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{(b-a)}xdx - i\frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{(b-a)}xdx\} \\
&= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\{\cos\frac{2n\pi}{(b-a)}x - i\sin\frac{2n\pi}{(b-a)}x\}dx \\
&= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}dx
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
&\frac{A_n + iB_n}{2} \\
&= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\{\cos\frac{2n\pi}{(b-a)}x + i\sin\frac{2n\pi}{(b-a)}x\}dx \\
&= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}dx.
\end{aligned}$$

Noter que

$$C_n = \overline{C_{-n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

car f est réelle.
(iv) On peut développer une fonction complexe $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ en traitant séparément ses parties réelles et complexes. Si $f(x) = u(x) + iv(x)$ où $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$, on obtient

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}nx} + i \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}nx}$$

où

$$P_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} dx \text{ et}$$
$$Q_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(x) e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}nx} \text{ où}$$
$$C_n = P_n + iQ_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} dx$$

Noter que l'on n'a plus la rélation que $C_n = \overline{C_{-n}}$ si f n'est pas réelle.

Terminons avec un autre résultat concernant la validité d'un développement en série de Fourier complète sur l'intervalle $[a,b]$.

Définition 2.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un untervalle compact. On dit que f est de classe C^1-par morceaux sur $[a,b]$, noté $f \in CM^1([a,b])$, lorsqu'il existe une partition $\{x_i : i = 0, ..., k\}$ de $[a,b]$ avec $a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$ telle que, pour $i = 0, ..., k-1$,*

(1) la réstriction de f à l'intervalle ouvert (x_i, x_{i+1}) est continument dérivable et

(2) les fonctions f et f' admettent des prolongements à $[x_i, x_{i+1}]$ qui sont continus sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Théorème 2.4 *Soient $-\infty < a < b < \infty$ et $f \in CM^1([a,b])$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, posons*

$$C_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} dx.$$

(i) La série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la somme est

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\} & si\ x \in (a,b) \\ \frac{1}{2}\{f(a+) + f(b-)\} & si\ x = a\ ou\ b. \end{cases}$$

(ii) Si $f \in CM^1([a,b]) \cap C([a,b])$ et $f(a) = f(b)$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}$ et

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} \ \textit{pour tout}\ x \in [a,b].$$

Remarque 1 Si f est réelle, la série de Fourier s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x} + C_{-n}e^{-i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}\} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{C_n e^{i\frac{2n\pi}{(b-a)}x}\} \\ &= C_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Re}\,C_n)\cos\frac{2n\pi}{(b-a)}x - (\mathrm{Im}\,C_n)\sin\frac{2n\pi}{(b-a)}x \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\cos\frac{2n\pi}{(b-a)}x - B_n\sin\frac{2n\pi}{(b-a)}x\} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_n &= 2\,\mathrm{Re}\,C_n = \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi}{(b-a)}x\,dx \\ B_n &= -2\,\mathrm{Im}\,C_n = \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi}{(b-a)}x\,dx \text{ et} \\ C_0 &= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

On récoupère ainsi la forme réelle à partir de la forme complexe.
Remarque 2 Les conditions assurant la convergence de la série de Fourier dans la partie (ii) sont moins contrainantes que celles que l'on a formulé dans

le résultat général concernant les développement comme somme de fonctions propres d'un problème de Sturm-Liouville régulier. En fait ces nouvelles conditions restent sufficantes même dans le cas général.

Remarque 3 Notons que les conditions imposées pour assurer la convergence de la série de Fourier de f vers f sont nettement plus fortes que ce qui est nécessaire pour calculer les coefficients de Fourier C_n d'une fonction f. Si f est continu par morceaux sur $[a, b]$, on peut définir les tous coefficients de Fourier de f :

$$C_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) e^{-i \frac{2n\pi}{(b-a)} x} dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

A ce point la question suivante se pose.

(1) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ est-il vrai que la série de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x}$ converge ?

Voici quelques réponses partielles. Il existe des fonctions $f \in C([a, b])$ telles que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x}$ diverge pour un nombre infini de points dans l'intervalle $[a, b]$.

Par contre, posant

$$\|u\|_2 = \{ \int_a^b |u(x)|^2 \, dx \}^{1/2},$$

il est connu que, pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$,

$$\|f - S_j\|_2 \to 0 \text{ lorsque } j \to \infty$$

où $S_j(x) = \sum_{n=-j}^{j} C_n e^{i \frac{2n\pi}{(b-a)} x}$ est une somme partielle de la série de Fourier de f. Ce résultat reste vrai pour des fonctions de classe $L^2([a, b])$ dans la terminologie introduite lors de la discussion des transformées de Fourier.