A. Équations Elliptiques

Exercice 1:

Tout point du plan est repéré par ses cordonnées polaires (r,φ).

Déterminer la fonction $u\colon (r,\varphi) \longmapsto u(r,\varphi)$ *solution du problème intérieur suivant:*

$$(\mathcal{PI})\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \le r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(1,\varphi) = 1 + \cos(2\varphi), \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Exercice 2:

En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction $u(r,\theta)$ *solution du problème suivant*

$$(\mathcal{PA})\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 1 < r < 2 \\ u(1,\theta) = cos(4\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

Exercice 3 :

Soit $D(0,1)$ *le disque unité fermé de* $\mathbb{R}^2$. *Résoudre le problème suivant :*

$$(\mathcal{PE})\begin{cases} \Delta u = 0; \quad dans \ \ \mathbb{R}^2 \setminus D, \\ u(r,\theta) = 2 + \sin\theta; \quad sur \ \partial D. \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soit G *le secteur angulaire du plan défini par* $G = \{(r,\theta);\ 0 < \theta < \beta < \pi/2, \ \ 0 < r < a\}$ *où* β *et* a *sont des réels fixés.*

En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction $u(r,\theta)$ *solution du problème suivant,*

$$(\mathcal{S})\begin{cases} \Delta u = 0 \quad dans \ \ G \\ u(r,0) = 0 = u(r,\beta) \\ \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = \cos\theta. \end{cases}$$

Exercice 5 :

Le problème intérieur de Neumann pour le disque de centre 0 et de rayon a est décrit par:

$$(\mathcal{N})\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = 0;\ 0 \le r < a, 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = g(\theta), \end{cases}$$

où g *est une fonction continue* 2π*-périodique.*

1. *Le problème* $(\mathcal{N})$ *admet-il des solutions ?*
2. *Résoudre le problème* $(\mathcal{N})$.

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Exercice 6:

Soient $R > 0$ *et* g *une fonction réelle* $2\pi -$ *périodique et continue.*

On considère le problème suivant, (r, θ) *désignant les coordonnées polaires :*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < R \\ u(R, \theta) = g(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

1. *En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction* $u(r,\ \theta)$ *solution du problème* $(\mathcal{P})$ *.*
2. *Montrer que la solution de* $(\mathcal{P})$ *s'écrit sous la forme :*

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Ecrire les coefficients a_n *et* b_n *et en déduire que,*

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \alpha) + r^2}\right) g(\alpha)d\alpha.$$

3. *Soit* $G(r,\ \theta;\ r',\ \alpha)$ *la fonction de Green pour le laplacien (en coordonnées polaires) relative au disque de centre O et de rayon R,* $D(O,\ \ R) \subset \mathbb{R}^2$.

Déduire des questions précédentes l'expression explicite de

$$\frac{\partial G}{\partial r'}(r, \theta;\ \ R, \alpha).$$

Exercice 7 :

Soit w *une fonction harmonique dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que les fonctions* $u \coloneqq w^2$ *et* $v \coloneqq \exp w$ *sont sous-harmoniques.*
2. *A quelle condition ces deux fonctions sont-elles harmoniques ?*

Exercice 8:

Soit u la fonction de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $u(x) = |x|^{-1}$ *où* $|x|$ *est la norme euclidienne de* x

i.e $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ *pour* $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1. *Montrer que u est harmonique dans toute boule de ne contenant pas 0.*
2. *En déduire la valeur de* $A(a, r)$ *donnée par*

$$A(a, r) = \int_{B_r(a)} u(x)\, dx,$$

où $B_r(a)$*est la boule ouverte centrée en* $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ *et de rayon* $r \leq 0{,}5|a|$.

3. *Calculer l'intégrale* $I(a, r)$*où*

$$I(a, r) = \int_{B_r(a)} \big(1 + u(x)\big)\, dx.$$

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

***Exercice 9*:**

Soient Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f \in C^2(\Omega)$. *On pose*

$$u(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

où $\bar{B}(x,\ r) \subset \Omega$ *et* $\alpha(n) = 2\sqrt{\pi^n}/\big(n\Gamma(n/2)\big)$.

1. *En utilisant un changement de variable, montrer que* $u(r)$ *est la valeur moyenne d'une fonction sur* $\partial B(0,\ 1)$.
2. *Montrer, en utilisant une formule de Green, que*
$$u'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy.$$
3. *En déduire que si*
$$f(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$
pour toute boule fermée $\bar{B}(x,\ r) \subset \Omega$ *alors f est harmonique dans Ω.*

Exercice 10:

On rappelle que le noyau de Poisson pour la boule ouverte $B_R(O) \subset \mathbb{R}^n$ *de frontière* $\partial B_R = S_R(O)$, *est la fonction* $P_R: B_R(O) \times S_R(O) \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{n\alpha(n)R|x-y|^n}$$

où $\alpha(n)$ *est le volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$ *et* $|x|$ *est la norme euclidienne de* x.

1. *Soit u une fonction harmonique dans* $B_R(O)$ *telle que* $u \in C^1\big(\overline{B_R(O)}\big)$ *et* $u = g$ *sur* $S_R(O)$.
   a. *Exprimer u en fonction de* P_R *et g.*
   b. *Calculer* $u(0)$. *Que représente cette valeur pour la fonction u?*
2. *a. Vérifier que* $P_R(x,y) > 0$ *pour tout* $(x,y) \in B_R(O) \times S_R(O)$.
   b. Montrer que
$$\int_{S_R(O)} P_R(x,y)ds(y) = 1.$$

***Exercice 11*:**

Soit Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$.

A. *On considère le problème suivant*
$$(\mathfrak{D}) \begin{cases} -\Delta u = f & dans\ \ \Omega \\ \ \ u = g & sur\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$
où f et g sont des fonctions continues.

1. *Montrer que si le problème* $(\mathfrak{D})$ *admet une solution u alors celle-ci est unique.*
2. *On suppose que* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *résout le problème* $(\mathfrak{D})$. *Exprimer alors u en fonction de* f *et* g.

3. *Donner une condition nécessaire pour l'existence de* u.

B. *Soit maintenant le problème*

$$(\mathcal{N})\quad \begin{cases} -\Delta u = f & dans\ \ \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & sur\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

où η *est la normale unitaire extérieure à* $\partial\Omega$.

1. *Supposons que le problème* $(\mathcal{N})$ *admet une solution u, celle-ci est-elle unique ?*
2. *Montrer que le problème* $(\mathcal{N})$ *admet au moins une solution si* $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$.

Exercice 12:

Soient Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Montrer que si u est harmonique dans Ω *alors,* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Exercice 13 :

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *une fonction sous-harmonique sur un domaine borné* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *avec* $n \geq 2$.

1. *Montrer que* $\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u$.
2. *En déduire que si le problème*

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u = g & sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution alors celle-ci est unique.

Exercice 14:

Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. *On définit sa moyenne sphérique par*

$$M_h(x,r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y)\,ds(y),$$

$A(n)$ *est le volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$ *et* $|x|$ *est la norme euclidienne de* x.

1. *Montrer que*

$$M_h(x,r) = \frac{1}{nA(n)} \int_{|y|=1} h(x+ry)\,ds(y).$$

2. *Calculer* $\lim_{r\to 0} M_h(x,r)$. *Dans quel cas a-t-on* $M_h(x,0) = h(x)$?
3. *On suppose que la fonction h est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}^n$.
Montrer que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r).$$

B. *Équations Hyperboliques*

***Exercice 1*:**

Soit (E)*l'équation aux dérivées partielles d'inconnue* $v:\ \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto v(x,y) \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = xy \qquad (E)$$

1. *Préciser le type de l'équation* (E).
2. *Vérifier que la fonction* u_0 *définie par* $v_0(x,y) = \frac{1}{4}(\,xy)^2$, *est une solution de* (E).
3. *Résoudre l'équation* (E).

Exercice 2

Soit le problème suivant

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx}\,;\ \ x \geq 0,\ \ t > 0 \\ v(x,0) = g(x), v_t(x,0) = h(x); x \geq 0 \\ v(0,t) = 0;\ \ t > 0. \end{cases}$$

En utilisant la formule de D'Alembert pour la demi-droite écrire l'expression de v.

1. *Soit maintenant u la solution de l'équation des ondes sphériques:*
$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r\right),\ \ r > 0. \qquad (\mathcal{S})$$
   a. *En posant* $v = ru$, *montrer que l'équation* $(\mathcal{S})$ *se ramène à l'équation*
   $$v_{tt} = c^2 v_{rr}.$$
   b. *Vérifier que la solution de cette dernière s'écrit sous la forme,*
   $$v(r,t) = f(r+ct) + k(r-ct)$$
   où f *et* k *sont des fonctions réelles deux fois dérivables.*
2. *En déduire des questions 1. et 2.a. la solution u de* $(\mathcal{S})$ *vérifiant les conditions initiales:* $u(r,0) = \varphi(r)$, $\ u_t(r,0) = \psi(r)$, *les fonctions* φ *et* ψ *étant paires.*

Exercice 3:

Soit $u(x,t)$ *la solution du problème suivant :*

$$(\mathcal{W})\ \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0; & x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \\ u(x,0\ ) = g(x),\ \ u_t(x,0\ ) = h(x); & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $g \in C^2(\mathbb{R})$ *et* $h \in C^1(\mathbb{R})$.

1. a. En posant $r = x - t$ *et* $s = x + t$, *montrer que l'équation du problème* $(\mathcal{W})$ *est équivalente à l'équation* $u_{rs} = 0$ *où* u_{rs} *désigne* $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}$.

b. Résoudre l'équation $u_{rs} = 0$ *et établir la formule de d'Alembert,*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(g(x-t) + g(x+t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R},\ \ t \geq 0.$$

2. On suppose que les fonctions g et h sont à support compact.

On définit l'énergie cinétique et l'énergie potentielle par,

$$k(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)dx, \qquad p(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x,t)dx.$$

a. Montrer que la somme $k+p$ *est constante sur* $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer qu'il existe $T>0$ *tel que,* $k(t)=p(t) \quad \forall t>T$.

Exercice 4:

En combinant la formule de D'Alembert et le principe de Duhamel, déterminer la solution du problème suivant, (où $a>0$)

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+\cos x; & x\in\mathbb{R}, \quad t>0 \\ u(x,0)=\sin x, \ u_t(x,0)=1+x; & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

***Exercice 5*:**

1. *Soit* $n,p\in\mathbb{N}^*$. *Montrer que si* $n\le p$, *alors* $\mathbb{R}^n$ *peut-être considéré comme un sous-espace de* $\mathbb{R}^p$.
2. *On considère le problème suivant,*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} u_{tt}(x,t)=\Delta u(x,t); & x\in\mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,0)=g(x); & x\in\mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0)=h(x); & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions continues.

La solution de ce problème est donnée, en dimension 3, par la formule de Kirchhoff :

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{|y|=1} g(x+cty)ds(y)\right)+\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} h(x+cty)\,ds(y).$$

Soit $g(x)=g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ *et* $h(x)=0$.

En remarquant que les fonctions g et h dépendent seulement de x_1 *et* x_2, *utiliser la formule de Poisson (en 2D) issue de la formule de Kirchhoff (en 3D) par la méthode de descente d'Hadamard, pour déterminer explicitement la solution* $u(x,t)$ *de* $(\mathcal{P})$.

C. Équations Paraboliques

Exercice 1

Résoudre le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Exercice 2:

On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{H})\begin{cases} u_t = u_{xx}; & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. *Déterminer une fonction* $u_0(x)$ *indépendante de* t *solution de* $(\mathcal{H})$.
2. *On pose* $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$.
   Montrer que $v(x,t)$ *est alors solution du problème auxiliaire suivant :*
   $$(\mathcal{H}_0)\begin{cases} v_t = v_{xx}; & 0 < x < 1, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ v(x,0) = x - 1; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
3. *Résoudre le problème* $(\mathcal{H}_0)$ *et en déduire* $u(x,t)$ *solution de* $(\mathcal{H})$.

Exercice 3 :

On considère l'équation suivante

$$(\mathcal{T}) \qquad v_{xx} = 4v_t \; ; \quad -\infty < x < +\infty, t > 0.$$

1. *Quelle est le type de cette équation ?*
2. *Montrer que la fonction* v *définie par*
   $$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{t}\right)$$
   où a *est une constante réelle, est une solution de l'équation* $(\mathcal{T})$.
3. *On suppose l'équation* $(\mathcal{T})$ *donnée sur l'intervalle* $]0, \; \pi/2[$.
   Déterminer alors v *vérifiant les conditions :*
   $$\begin{cases} v(x,0) = 4 + \cos(4x), & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ v_x(0,t) = v_x(\pi/2\,,t) = 0, & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Exercice 4:

Soit u *une fonction régulière solution de l'équation de la chaleur,*

$$u_t - \Delta u = 0 \;\; dans \;\; \mathbb{R}^n \times]0, \; +\infty[.$$

1. *Montrer que,* $u_\lambda(x, \; t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ *est aussi solution de l'équation de la chaleur pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. *En utilisant ce qui précède, montrer que* $v(x,\ t) = x.\nabla u(x,\ t) + 2tu_t(x,\ t\ )$ *résout également l'équation de la chaleur.*

Exercice 5 :
On considère le problème suivant,

$$(\mathcal{P}_f)\quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}\ ;\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t);\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x);\ 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

où f est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ L]$ *et* $c > 0$.

1. *On suppose que* $f \equiv 0$ *et on pose*

$$J(t) = \int_0^L \big(u(x,t)\big)^2 dx.$$

a. *Montrer que la fonction J est décroissante sur* $[0,+\infty[$.
b. *En déduire que la solution du problème* $(\mathcal{P}_0)$ *est* $u \equiv 0$.

2. *Montrer que si le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution alors celle-ci est unique.*
3. *Résoudre le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *pour* $L = \pi$ *et* $f(x) = x(\pi - x)$.

Exercice 6 :
Soit γ *un nombre réel,* $\gamma > 1$.

1. *On considère l'équation suivante de l'inconnue* $v: x \longmapsto v(x)$;

$$-\Delta(v^\gamma) = \beta v, \quad dans\ \ \mathbb{R}^n \qquad (\mathcal{P})$$

où β *est un réel non nul.*
On pose $v(x) = |x|^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R}.)$

a. *Calculer* $\Delta(v^\gamma)$.
b. *En déduire la valeur de* α *pour laquelle* $v(x) = |x|^\alpha$ *est solution de l'équation* $(\mathcal{P})$.

2. *Soit maintenant l'équation des médias poreux suivante:*

$$u_t - \Delta(u^\gamma) = 0, \quad dans\ \ \mathbb{R}^n \times]0,+\infty[\qquad (\mathcal{PM})$$

a. *En utilisant la méthode de séparation des variables,* $\big(u(x,t) = T(t)v(x)\big)$ *déterminer la solution de l'équation* $(\mathcal{PM})$.
b. *Montrer qu'il existe* $t_0 > 0$ *fini tel que* $u(x,t_0) = 0$.

Solutions de Quelques Exercices

A. *Équations Elliptiques*

Exercice 2:

Soit le problème

$$(\mathcal{PA})\ \begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 1 < r < 2 \\ u(1,\theta\ ) = \cos(4\theta) & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

On utilise la méthode de séparation des variables.

Posons $u(r,\theta\ ) = R(r)T(\theta)$*, et portons dans l'équation, nous obtenons après division par* $R(r)T(\theta)$:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{T''}{T}.$$

Les variables r et θ *étant indépendantes, les deux membres sont alors constants, d'où*

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = \lambda = -\frac{T''}{T}\ ,\ \ \lambda\ \text{constante réelle}.$$

L'équation de départ donne naissance aux deux équations suivantes:

$$\begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \end{cases}$$

a. $T'' + \lambda T = 0$

- *Si* $\lambda = 0$ *alors* $T(\theta) = A\theta + B$.
  Comme la fonction T doit-être périodique alors $A = 0$ *et* $T \equiv cste$.

- *Si* $\lambda < 0$ *alors* $T(\theta) = Ae^{\theta\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ *et pour la même raison* $T\ \equiv 0$.

- *Si* $\lambda > 0$ *alors* $T(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$.
  Déterminons les coefficients A et B.
  Des conditions $T(0) = T(2\pi)$ *et* $T'(\theta) = T'(2\pi)$, *on obtient le système*

$$(S)\begin{cases} A\left(\cos(2\pi\sqrt{\lambda}\,) - 1\right) + B\sin(2\pi\sqrt{\lambda}\,) = 0 \\ -A\ \sin(2\pi\sqrt{\lambda}\,) + B\left(\cos(2\pi\sqrt{\lambda}\,) - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Si le déterminant de (S) *est non nul alors* $A = B\ = 0$ *et T est identiquement nulle .*

Les solutions non triviales sont alors obtenues pour $\mathrm{Det}(S) = 0$.

$$\mathrm{Det}(S) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\pi\sqrt{\lambda}\,) = 1 \Leftrightarrow\ \lambda = n^2,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On obtient des solutions non triviales pour $\lambda = 0$ *avec* $T \equiv cste$ *et pour* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}^*$ *avec* $T(\theta) = A\cos(n\,\theta) + B\sin(n\,\theta)$.

La famille des solutions de l'équation en T est :

$$T_n(\theta) = A_n \cos(n\,\theta) + B_n \sin(n\,\theta)\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b. *Résolvons l'équation en R:* $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$, *pour* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}$.

- *Si* $\lambda = 0$, *l'équation devient* $rR'' + R' = 0$.

  c.-à-d. $(rR')' = 0$ *d'où* $rR' = C$ *et* $R(r) = C_1 + C\ln r\,, 1 < r < 2$.
- *Si* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}^*$, $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$,

  C'est une équation d'Euler, posons $R(r) = r^\alpha$ *et remplaçons dans l'équation, nous obtenons*

  $$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

  Ceci nous donne

  $$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \qquad d'où \qquad \alpha = \pm n.$$

  Et la solution cherchée est, $R(r) = Dr^n + Er^{-n}$, $1 < r < 2$.

  En combinant ces deux cas, la famille des solutions de l'équation en R est

  $$R_0(r) = C_1 + C\ln r\,,\ \ R_n(r) = D_n r^n + E_n r^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

  Par le principe de superposition la solution de $(\mathcal{P})$ *est*

  $$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(r)T_n(\theta)$$

  $$= a + b\ln r + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n})\cos(n\theta) + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin(n\theta).$$

où l'on a posé $a_n = A_nD_n$, $b_n = A_nE_n$, $c_n = B_nD_n$ *et* $d_n = B_nE_n$.

Déterminons les coefficients a_n , b_n, c_n *et* d_n *:*

On a $u(1,\theta) = \cos(4\theta)$ *d'où*

$$\cos(4\theta) = a + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)\cos(n\theta) + (c_n + d_n)\sin(n\theta)$$

D'où (par identification !):

$$a = 0, a_4 + b_4 = 1,\ a_n + b_n = 0 \; pour \; n \neq 4 \;\; et \;\; c_n + d_n = 0 \; pour \; n \in \mathbb{N}^*.$$

En portant dans l'expression de $u(r,\theta)$ *nous obtenons*

$$u(r,\theta) = \cos(4\theta) + b\ln r + \sum_{n=1}^{+\infty}(r^n - r^{-n})(a_n\cos(n\theta) + c_n\sin(n\theta)).$$

À remarquer que la solution que nous venons de trouver est valable pour n'importe quel anneau ayant pour plus petit rayon 1. Cette solution n'est pas unique, elle dépend du choix de la constante b et suites (a_n) *et* (c_n).

Si nous voulons trouver la solution spécifique à l'anneau

$$\mathcal{A} = \{(r,\theta); 1 < r < 2,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

il faut ajouter une condition au bord, à savoir $u(2,\theta) = g(\theta)$ *où* g *est une certaine fonction continue* 2π *−périodique.*

Nous obtenons alors en remplaçant r par 2 dans la dernière expression de $u(r,\theta)$:

$$g(\theta) = \cos(4\theta) + b\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(2^n - 2^{-n})(a_n\cos(n\theta) + c_n\sin(n\theta))$$

ce qui est équivalent à

$$g(\theta) - \cos(4\theta) = b\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(2^n - 2^{-n})(a_n\cos(n\theta) + c_n\sin(n\theta)).$$

C'est le développement en série de Fourier de la fonction $f:\theta \longmapsto g(\theta) - \cos(4\theta)$,

et nous pouvons calculer explicitement les valeurs de ses coefficients :

$$b\ln 2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha,$$

et pour $n \geq 1$;

$$(2^n - 2^{-n})a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha,\ \ (2^n - 2^{-n})c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha,$$

d'où

$$b = \frac{1}{2\pi\ln 2}\int_0^{2\pi} f(\alpha)d\alpha,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi(2^n - 2^{-n})}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha,\ \ c_n = \frac{1}{\pi(2^n - 2^{-n})}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha.$$

Exercice 4:

Soit $G = \{(r,\theta);\ \ 0 < \theta < \beta < \pi/2, \quad 0 < r < a\}$.

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \quad dans\ \ G \\ u(r,0) = 0 = u(r,\beta) \\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = \cos\theta. \end{cases}$$

En coordonnées polaires l'équation s'écrit:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0.$$

On cherchera une solution au moins continue.

Posons $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$*, et portons dans l'équation, nous obtenons après division par* $R(r)T(\theta)$:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{T''}{T}.$$

Les variables r et θ *étant indépendantes, les deux membres sont alors constants, on a*

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = \lambda = -\frac{T''}{T}\ ,\ \ \lambda\ \ constante\ réelle.$$

On obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} T'' + \lambda T = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0. \end{cases}$$

c. $T'' + \lambda T = 0$

- *Si* $\lambda = 0$ *alors* $T(\theta) = A\theta + B$.
  Comme $T(0) = 0 = T(\beta)$ *on obtient* $T \equiv 0$.

- *Si* $\lambda < 0$ *alors* $T(\theta) = Ae^{\theta\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ *et pour la même raison* $T \equiv 0$.

- *Si* $\lambda > 0$ *alors* $T(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\ \sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$.
  Déterminons les coefficients A et B.
  Des conditions $T(0) = 0 = T(\beta)$ *, on obtient*
  $$A = 0\ \ et\ \ B\sin(\sqrt{\lambda}\,\beta) = 0$$
  Comme on cherche une solution T non identiquement nulle, on prend $\sin(\sqrt{\lambda}\,\beta) = 0$.
  $$\sin(\sqrt{\lambda}\,\beta) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,\beta = n\pi,\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$
  D'où $\lambda = (n\pi/\beta)^2\ , n \in \mathbb{N}^*$.

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

La famille des solutions de l'équation en T est :

$$T_n(\theta) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

d. *Résolvons l'équation en R:* $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$, *pour* $\lambda = (n\pi/\beta)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

L'équation $\qquad r^2R'' + rR' - (n\pi/\beta)^2R = 0,$

est une équation d'Euler, posons $R\,(r) = r^\alpha$ *et remplaçons dans l'équation, nous obtenons*

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$

Ceci nous donne

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2 = 0 \qquad d'où \qquad \alpha = \pm\frac{n\pi}{\beta}.$$

Et la solution cherchée est, $R(r) = Dr^{\frac{n\pi}{\beta}} + Er^{-\frac{n\pi}{\beta}}$,

comme R doit-être définie et continue en $r = 0$, *on prend* $E = 0$ *et par suite*

$$R(r) = Dr^{\frac{n\pi}{\beta}}.$$

La famille des solutions de l'équation en R est

$$R_n(r) = D_n r^{\frac{n\pi}{\beta}}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Par le principe de superposition la solution de $(\mathcal{P})$ *est*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} R_n(r)T_n(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right)$$

où l'on a posé $A_n = B_n D_n$.

Déterminons les coefficients A_n*:*

La condition au bord non homogène $\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = \cos\theta$ *nous donne*

$$\cos\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{\beta} A_n a^{\frac{n\pi}{\beta}-1} \sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right).$$

Par multiplication par $\sin\left(\frac{k\pi}{\beta}\theta\right)$ *et intégration sur* $]0,\ \beta[$ *on obtient*

$$\int_0^\beta \sin\left(\frac{k\pi}{\beta}\theta\right)\cos\theta\,d\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{\beta} A_n a^{\frac{n\pi}{\beta}-1} \int_0^\beta \sin\left(\frac{k\pi}{\beta}\theta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right)d\theta,$$

i.e

$$\int_0^\beta \sin\left(\frac{k\pi}{\beta}\theta\right)\cos\theta\, d\theta = \frac{k\pi}{\beta}A_k a^{\frac{k\pi}{\beta}-1}\int_0^\beta \sin^2\left(\frac{k\pi}{\beta}\theta\right)d\theta$$

car

$$\int_0^\beta \sin\left(\frac{k\pi}{\beta}\theta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\beta}\theta\right)d\theta = 0, \quad si\ n \neq k.$$

D'où

$$\frac{k\beta\pi}{k^2\pi^2-\beta^2} + 2(-1)^{k+1}\cos\beta = \frac{k\pi}{\beta}A_k a^{\frac{k\pi}{\beta}-1}\frac{\beta}{2}.$$

Et finalement on obtient

$$A_k = \frac{2a^{1-\frac{k\pi}{\beta}}}{k\pi}\left(\frac{k\beta\pi}{k^2\pi^2-\beta^2} + 2(-1)^{k+1}\cos\beta\right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

***Exercice 6*:**

1. *En utilisant la méthode de séparation des variables et remarquant que la solution doit –être continue à l'origine, nous obtenons par le principe de superposition que la solution de $(\mathcal{P})$ est*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n(c_n\cos(n\,\theta) + d_n\sin(n\,\theta))$$

2. *Déterminons les coefficients c_n et d_n :*

On a $u(R,\theta) = g(\theta)$ *d'où*

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n(c_n\cos(n\,\theta) + d_n\sin(n\,\theta))$$

On reconnaît les coefficients de Fourier de la fonction g: c_0, c_nR^n *et* d_nR^n $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\alpha)d\alpha,\ c_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\cos(n\,\alpha)d\alpha, \quad d_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} g(\alpha)\sin(n\,\alpha)d\alpha,$$

En portant ces coefficients dans l'expression de $u(r,\theta)$ *nous écrivons*

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n(a_n\cos(n\,\theta) + b_n\sin(n\,\theta)),$$

avec $a_n = c_nR^n$ *et* $b_n = d_nR^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Avec ces nouveaux coefficients nous obtenons

$$u(r,\theta)=a_0+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\cos(n\,\theta)\cos(n\,\alpha)\;+\sin(n\,\theta)\sin(n\,\alpha)\right]g(\alpha)d\alpha$$

$$u(r,\theta)=a_0+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos\big(n(\theta-\alpha)\big)\,g(\alpha)d\alpha.$$

Et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos\big(n(\theta-\alpha)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\frac{e^{in(\theta-\alpha)}+e^{-in(\theta-\alpha)}}{2}$$

$$=\frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{2R\left(1-\frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{R}\right)}+\frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{2R\left(1-\frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{R}\right)}$$

$$=\frac{re^{i(\theta-\alpha)}\big(R-re^{-i(\theta-\alpha)}\big)+re^{-i(\theta-\alpha)}\big(R-re^{i(\theta-\alpha)}\big)}{2(R-re^{i(\theta-\alpha)})(R-re^{-i(\theta-\alpha)})}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos\big(n(\theta-\alpha)\big)=\frac{Rr\cos(\theta-\alpha)-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}.$$

Par suite

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Rr\cos(\theta-\alpha)-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}g(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)+r^2}\right)g(\alpha)d\alpha.\qquad c.q.f.d.$$

3. $G(r,\ \theta;\ r',\ \alpha)$ étant la fonction de Green pour le laplacien (en coordonnées polaires) relative au disque de centre O et de rayon R, $D(O,\ \ R)\subset\mathbb{R}^2$.

Calculons $\frac{\partial G}{\partial r'}(r,\theta;\ \ R,\alpha)$:

Nous savons que la solution de $(\mathcal{P})$ en terme de la fonction de Green est donnée par :

$$u(r,\theta)=-\int_0^{2\pi}\frac{\partial G}{\partial r'}(r,\theta;\ \ R,\alpha)g(\alpha)d\alpha\,;$$

en identifiant avec l'expression intégrale de $u(r,\theta)$ *on trouve*

$$\frac{\partial G}{\partial r'}(r,\theta;\ R,\alpha) = -\frac{R^2 - r^2}{2\pi(R^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha) + r^2)}.$$

***Exercice 7*:**

Soit w une fonction harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1. *Montrons que les fonctions* $u := w^2$ *et* $v := \exp w$ *sont sous-harmoniques.*

   Les fonctions u et v sont de classe C^2 *dans* Ω.

   On a

$$\Delta u = \Delta w^2 = \Delta(ww) = w\Delta w + 2\nabla w.\nabla w + w\Delta w = 2w\Delta w + 2|\nabla w|^2,$$

comme w est harmonique i.e $\Delta w = 0$ *on obtient*

$$\Delta u = 2|\nabla w|^2,$$

donc $-\Delta u \leq 0$ *et la fonction u est sous-harmonique.*

Pour la fonction v écrivons

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x), \quad \text{où } x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega.$$

On a

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial \exp w}{\partial x_i} = \exp w \frac{\partial w}{\partial x_i} = v\frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

Et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = v\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}.$$

Ainsi

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{i=n} v\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = (|\nabla w|^2 + \Delta w)v.$$

Et puisque w harmonique, on obtient

$$\Delta v = |\nabla w|^2 v = |\nabla w|^2 \exp w,$$

soit $-\Delta v = -|\nabla w|^2 \exp w \leq 0$ *et la fonction v est sous harmonique.*

2. *Les fonctions u et v sont harmoniques si et seulement si*

$$\Delta u = 0 = \Delta v.$$

D'après la première question u et v sont harmoniques si

$$|\nabla w| = 0.$$

Donc u et v sont harmoniques si w est constante sur Ω.

***Exercice 9*:**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide, $f \in C^2(\Omega)$. On pose

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

où $\bar{B}(x,\ r) \subset \Omega$ et $A(n) = 2\sqrt{\pi^n}/\big(n\Gamma(n/2)\big)$.

1. *Montrons que $u(r)$ est la valeur moyenne d'une fonction sur $\partial B(0,\ 1)$.*

   Posons $y = x + rz$, alors $|z| := \|z\| = 1$ car $|y - x| = r$, et donc $z \in \partial B(0,\ 1)$ et $ds(y) = r^{n-1} ds(z)$.

   En remplaçant on trouve

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds(y) = \frac{1}{nA(n)} \int_{\partial B(0,1)} f(x + rz)\, ds(z)$$

   Et puisque $nA(n) = 2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$ et la mesure de la sphère unité alors $u(r)$ est bien la valeur moyenne de la fonction $z \longmapsto f(x + rz)$ sur $\partial B(0,\ 1)$.

2. *Montrons que*

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy.$$

Nous avons

$$u(r) = \frac{1}{nA(n)} \int_{\partial B(0,1)} f(x + rz)\, ds(z)$$

d'où

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla f(x + rz).z\, ds(z)$$

et par le changement $y = x + rz$, on trouve

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla f(y).\frac{y - x}{r} ds(y) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla f(y).\eta\, ds(y)$$

car $\frac{y-x}{r}$ est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de $\partial B(x,\ r)$.

On obtient par l'identité de Green $\left(\int_\Omega \Delta v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla v.\eta\, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \eta} ds\right)$:

$$u'(r) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy.$$

3. *Montrons que si*

$$f(x) = \frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} f(y)\, ds$$

pour toute boule fermée $\bar{B}(x,\ r) \subset \Omega$ alors f est harmonique.

En dérivant par rapport à r les deux membres et en utilisant la question 2., on obtient :

$$\frac{1}{nA(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta f(y)\, dy = 0, \quad \forall \bar{B}(x,r) \subset \Omega,$$

d'où $\Delta f = 0$ dans Ω et f est harmonique dans Ω.

Exercice 10:

Le noyau de Poisson pour la boule ouverte $B_R(O) \subset \mathbb{R}^n$ de frontière $\partial B_R = S_R(O)$, est la fonction P_R de $B_R(O) \times S_R(O)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n}$$

($A(n)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $|x|$ est la norme euclidienne de x.)

1. *Soit u une fonction harmonique dans $B_R(O)$ telle que $u \in C^1(\overline{B_R(O)})$ et $u = g$ sur $S_R(O)$.*
   a. *Exprimons u en fonction de P_R et g.*

      En utilisant la fonction de Green on a pour tout $x \in B_R(O)$,

$$u(x) = -\int_{B_R(O)} G(x,y)\, \Delta u(y) dy - \int_{S_R(O)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta} u(y) ds(y),$$

où η est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de $B_R(O)$.

Comme u est harmonique dans $B_R(O)$ et que pour tout $(x,y) \in B_R(O) \times S_R(O)$,

$$-\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta} = P_R(x,y)$$

on obtient

$$u(x) = \int_{S_R(O)} \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n} u(y) ds(y) = \int_{S_R(O)} \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n} g(y) ds(y) \quad (*)$$

b. Calculons $u(0)$:

D'après la formule précédente on a

$$u(0) = \int_{S_R(O)} \frac{R^2}{nA(n)R|y|^n} u(y)ds(y) = \frac{1}{nA(n)R^{n-1}} \int_{S_R(O)} u(y)ds(y),$$

car $|y| = R$ *puisque* $y \in S_R(O)$.

On a $Mes(S_R(O)) = nA(n)R^{n-1}$ *et donc* $u(0)$ *est la valeur moyenne de* u *sur* $S_R(O)$ *(et aussi la valeur moyenne de* u *dans* $B_R(O)$ *car* u *est harmonique).*

3. *a. On a* $P_R(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in B_R(O) \times S_R(O)$, *évident puisque* $|x| < R$.

   b. Montrons que

$$\int_{S_R(O)} P_R(x,y)ds(y) = 1.$$

Il suffit de prendre $u \equiv 1 \in C^2(\overline{B_R(O)})$, *qui est évidemment harmonique, et remplacer dans* $(*)$, *il vient alors*

$$1 = \int_{S_R(O)} \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n} ds(y) = \int_{S_R(O)} P_R(x,y)ds(y).$$

B. Équations Hyperboliques

Exercice 3:

$u(x,t)$ *est la solution du problème suivant :*

$$(\mathcal{W})\ \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0; & x \in \mathbb{R},\ \ t > 0, \\ u(x,0\ ) = g(x), \quad u_t(x,0\ ) = h(x); & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $g \in C^2(\mathbb{R})$ *et* $h \in C^1(\mathbb{R})$.

1. a. *En notant* $\square u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u,$ *l'équation s'écrit* $\square u = 0$.

On factorise l'opérateur de d'Alembert $\square$ *comme suit*

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u.$$

Posons $r = x - t$ *et* $s = x + t$, *alors*

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}\ , \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(-2\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(2\ \frac{\partial}{\partial s}\right) = -4\frac{\partial^2}{\partial r \partial s}$$

et $\square u = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0.$

b. *Résolvons l'équation* $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = c(s) \Longrightarrow u = \varphi(s) + \psi(r).$$

Ici $c(s)$ *est une constante par rapport à r dépendant de s et* $\varphi(s)$ *est une primitive de* $c(s)$ *et enfin* $\psi(r)$ *est la constante d'intégration (par rapport à s) dépendant de r.*

Ainsi $u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t).$

On a $u(x,0\ ) = g(x)$ *d'où* $\varphi(x) + \psi(x) = g(x),$ (1)

et $u_t(x,0\ ) = h(x) \ \Longrightarrow\ \varphi\,'(x) - \psi'(x) = h(x).$ (2)

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Par intégration entre x_0 et x des deux membres de la deuxième équation, on trouve

$$\varphi(x)-\psi(x)=\int_{x_0}^{x} h(y)\,y+K,\qquad \big(K=K(\,x_0)\big).$$

De (1) *et de cette dernière équation on aboutit à*

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{2}g(x)+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} h(y)dy+\dfrac{K}{2}\\ \psi(x)=\dfrac{1}{2}g(x)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} h(y)dy-\dfrac{K}{2}.\end{cases}$$

Finalement, en remplaçant dans l'expression de $u(x,t)$ *on trouve*

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(g(x-t)+g(x+t)\big)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy,\qquad (x\in\mathbb{R},\ \ t\geq 0).$$

2. *Les fonctions g et h sont supposées à support compact.*

Soient

$$k(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2\,(x,t\,)dx,\qquad p(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2\,(x,t\,)dx.$$

a. *Montrons que la somme* $k+p$ *est constante sur* $\mathbb{R}^+$.
Il suffit de vérifier que $(k+p)\,'(t)=0,\ \ \forall t\in\mathbb{R}^+$.
On a

$$k\,'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t\,)u_{tt}(x,t\,)\,dx,\ \ car\ \ \frac{\partial u_t^2}{\partial t}=2u_t\,u_{tt},$$
$$p'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} u_{tx}(x,t\,)u_x(x,t\,)\,dx,\ \ car\ \ \frac{\partial u_x^2}{\partial t}=2u_x\,u_{tx}.$$

Une intégration par parties nous donne

$$p'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}.\frac{\partial u}{\partial x}dx=\left[\frac{\partial u}{\partial t}.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=-\infty}^{x=+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx}dx=-\int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx}dx,$$

car d'après la formule de d'Alembert, $\frac{\partial u}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *se laissent s'exprimer en fonction de g' et h qui sont à support compact donc s'annulent à l'infini.*

Maintenant

$$k'(t)+\ p'(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(u_t u_{tt}-u_t u_{xx})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(u_{tt}-u_{xx})u_t dx=0,$$

car $u_{tt} - u_{xx} = 0$. *Ceci prouve que la fonction* $k + p$ *est constante sur* $\mathbb{R}^+$.

b. *Montrons qu'il existe* $T > 0$ *tel que,* $k(t) = p(t) \quad \forall t > T$.

Écrivons la différence $k(t) - p(t)$ *en utilisant la formule de d'Alembert :*

$$k(t) - p(t) = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} ([g'(x+t) - g'(x-t) + h(x+t) + h(x-t)]^2 - [g'(x+t) + g'(x-t) + h(x+t) - h(x-t)]^2)dx.$$

Les fonctions g, g' et h sont à support compact, donc ;

$$\exists A > 0, \forall y, \qquad |y| > A \Longrightarrow \quad g(y) = g'(y) = h(y) = 0,$$

et par suite pour $t > T \gg A$, *on obtient* $k(t) - p(t) = 0$, *ainsi k et p s'égalisent pour t assez grand.*

Exercice 4 **:**

Déterminons la solution du problème suivant, $(a > 0)$

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 1 + x; & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $f(x,t) = \cos x$.

Le problème $(\mathcal{P})$ *peut-être divisé, à cause de la linéarité, en deux sous-problèmes et sa solution est la somme des solutions de ces deux sous-problèmes :*

$$(\mathcal{P}_A)\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 1 + x; & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et

$$(\mathcal{P}_D)\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0); & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a. *La solution de* $(\mathcal{P}_A)$, *qui est homogène, est donnée par la formule de D'Alembert :*

$$u_A(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(x+at) + \sin(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(1+y)dy$$
$$u_A(x,t) = \cos(at)\sin x + tx + t.$$

b. *La solution du problème* $(\mathcal{P}_D)$ *non homogène, est donnée, d'après le principe de Duhamel, par :*

$$u_D(x,t) = \int_0^t v(x, t-s, s)\, ds \qquad (D)$$

où $v(x,t,s)$ est la solution du problème homogène suivant associé à $(\mathcal{P}_D)$,

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ v(x,0,s) = 0,\ v_t(x,0,s) = f(x,s) = \cos x\,;\ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ici s est un paramètre réel.

Ce problème homogène admet pour solution, toujours par la formule de D'Alembert ;

$$v(x,t,s) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f(y,s)\,dy = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \cos y\,dy = \frac{1}{a}\cos x\ \sin(at).$$

En remplaçant dans (D) on trouve,

$$u_D(x,t) = \int_0^t v(x,t-s,s)\,ds = \frac{1}{a}\cos x \int_0^t \sin\big(a(t-s)\big)\,ds$$

$$u_D(x,t) = \frac{1}{a^2}(1-\cos at)\cos x.$$

c. *La solution du problème initial $(\mathcal{P})$ est*

$$u(x,t) = u_A(x,t) + u_D(x,t) = \cos(at)\sin x + \frac{1}{a^2}(1-\cos at)\cos x + tx + t.$$

***Exercice 5*:**

1. *Montrons que $\mathbb{R}^n$ peut-être considéré comme un sous-espace de $\mathbb{R}^p$, pour $n \leq p$.*

   Considérons l'application linéaire

   $$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad F(x_1, x_2, \ldots\, x_n) = (x_1, x_2, \ldots\, x_n, 0,0, \ldots 0) \in \mathbb{R}^p.$$

   L'application F est évidemment une isométrie (donc injective),

   c'est donc un isomorphisme isométrique de $\mathbb{R}^n$ dans $F(\mathbb{R}^n) = ImF$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Ainsi $\mathbb{R}^n$ et $F(\mathbb{R}^n)$ sont isométriques et on peut écrire, via cette identification, que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^p$.

2. *Soit le problème suivant,*

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t)\,;\ \ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = g(x);\ \ x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x);\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions continues.

La solution de ce problème est donnée, en dimension 3, par la formule de Kirchhoff:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{|y|=1} g(x+cty)ds(y)\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} h(x+cty)\,ds(y).$$

Soit $g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ *et* $h(x) = 0$.

Les fonctions g et h dépendent seulement de x_1 *et* x_2*, utilisons la formule de Poisson pour déterminer explicitement la solution* $u(x,t)$ *du problème* $(\mathcal{P})$.

Rappelons-nous que le calcul de l'intégrale (triple) sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ *se ramène au calcul d'une intégrale (double) sur la projection de cette sphère sur le plan* (Ox_1x_2)*, c.à.d. sur le disque unité de* $\mathbb{R}^2$.

Paramétrisons l'hémisphère supérieur:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \Longrightarrow y_3 = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} =: \varphi(y_1, y_2),$$

et donc

$$ds(y) = \sqrt{1 + |\nabla\varphi(y_1, y_2)|^2}\,dy_1dy_2 = \frac{dy_1dy_2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}.$$

Remplaçons dans la formule de Kirchhoff tout en remarquant que la sphère est constituée de deux hémisphères, (dans notre problème $c = 1$*)*

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(2t\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{g(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2\right) + \frac{1}{4\pi}\left(2t\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{h(x_1 + ty_1, x_2 + ty_2)}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2\right).$$

Calcul explicite :

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{(x_1 + ty_1)^2 + (x_2 + ty_2)^2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{x_1^2 + 2tx_1y_1 + t^2y_1^2 + x_2^2 + 2tx_2y_2 + t^2y_2^2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{(x_1^2 + x_2^2)t + 2(x_1y_1 + x_2y_2)t^2 + (y_1^2 + y_2^2)t^3}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{x_1^2 + x_2^2 + 4(x_1y_1 + x_2y_2)t + 3(y_1^2 + y_2^2)t^2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{dy_1dy_2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}} + \frac{2t}{\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2 + \frac{3t^2}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{y_1^2 + y_2^2}{\sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}}dy_1dy_2.$$

On a, en passant aux coordonnées polaires dans la première et la troisième intégrales ;

$$\star \int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta = 2\pi.$$

$$\star \int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy_1 dy_2$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_2^2}} \frac{x_1y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy_1\right) dy_2$$

$$+ \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} \frac{x_2y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy_2\right) dy_1$$

$$= -x_1\int_{-1}^{1}\left(\left[\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\right]_{-\sqrt{1-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_2^2}}\right) dy_2 - x_2\int_{-1}^{1}\left(\left[\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\right]_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}}\right) dy_1 = 0.$$

$$\star \int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{y_1^2+y_2^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta,$$

en posant $v = 1-r^2$,

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-v}{\sqrt{v}} dv = \left[\sqrt{v}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[v\sqrt{v}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

d'où

$$\int_{y_1^2+y_2^2<1} \frac{y_1^2+y_2^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}} dy_1 dy_2 = \left[\frac{2}{3}\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}.$$

Tout compte fait, nous trouvons,

$$u(x_1,x_2,t) = x_1^2 + x_2^2 + 2t^2$$

et la solution du problème initial est

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = x_1^2 + x_2^2 + 2t^2.$$

C. Équations Paraboliques

***Exercice 2*:**

On considère le problème :

$$(\mathcal{H})\begin{cases} u_t = u_{xx}; & 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. *Déterminons une fonction* $u_0(x)$ *indépendante de t solution de* $(\mathcal{H})$.

   u_0 *étant indépendante de t, donc* $(u_0)_t = 0$. *En portant dans l'équation on trouve ;* $(u_0)_{xx} = u_0'' = 0$, *d'où* $u_0(x) = ax + b$.

   Cette solution doit satisfaire les conditions au bord : $u_0(0) = 1, u_0(1) = 0$.

   On trouve $u_0(x) = 1 - x$.

2. $v(x,t) = u(x,t) - u_0(x)$.

   Montrons que $v(x,t)$ *est solution du problème* $(\mathcal{H}_0)$:

$$(\mathcal{H}_0)\begin{cases} v_t = v_{xx}; & 0 < x < 1, \\ v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0; & t \geq 0, \\ v(x,0) = x - 1; & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On a: $v_t = u_t - (u_0)_t = u_t = u_{xx} = u_{xx} - (u_0)_{xx}$, *car* $(u_0)_{xx} = 0$

d'où $v_t = v_{xx}$ *pour* $0 < x < 1$.

$v(0,t) = u(0,t) - u_0(0) = 1 - 1 = 0$, $v(1,t) = u(1,t) - u_0(1) = 0 - 0 = 0$,

$v(x,0) = u(x,0) - u_0(x) = 0 - (1 - x) = x - 1$.

Ainsi $v(x,t)$ *est solution de* $(\mathcal{H}_0)$.

3. *Résolvons* $(\mathcal{H}_0)$.

   Par la méthode de séparation des variables, posons $v(x,t) = X(x)T(t)$.

   En portant dans l'équation, on obtient

$$XT' = X''T \quad d'où \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}.$$

   Les variables x et t sont indépendantes on écrit alors

$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{T}, \quad \lambda \text{ cste réelle.}$$

D'où $X'' - \lambda X = 0$, *et* $T' - \lambda T = 0$.

Résolvons l'équation en x: *Si* $\lambda \geq 0$, *on obtient la solution triviale.*

Pour $\lambda < 0$, *disons* $\lambda = -\alpha^2$, $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$, *alors* $X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$.

On a $X(0) = 0$ *d'où* $A = 0$, *et* $X(1) = 0$ *implique* $B = 0$ *ou* $\sin\alpha = 0$.

Nous cherchons les solutions non triviales écartons alors l'éventualité $B = 0$.

$$\sin\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a une famille de solutions: $X_n(x) = B_n \sin(n\pi x)$.

Résolvons l'équation en t*, pour* $\lambda = -\alpha^2 = -n^2\pi^2$.

Un simple calcul donne la famille de solutions suivante : $T_n(t) = D_n e^{-n^2\pi^2 t}$.

Une famille de solutions de l'équation de départ est donc:

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x), \qquad (\text{où } C_n = B_n D_n)$$

Par le principe de superposition on obtient la solution de $(\mathcal{H}_0)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).$$

De la condition initiale on a

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x) = x - 1,$$

et par suite

$$C_n = 2\int_0^1 (x-1)\sin(n\pi x)dx = -\frac{2}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Finalement

$$v(x,t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x),$$

et par suite

$$u(x,t) = u_0(x) + v(x,t) = 1 - x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x).$$

Exercice 4:

u étant une fonction régulière solution de l'équation de la chaleur,

$$u_t - \Delta u = 0 \;\; dans \;\; \mathbb{R}^n \times]0, \; +\infty[.$$

1. *Montrons que la fonction u_λ telle que $u_\lambda(x, \; t) = u(\lambda x, \lambda^2 t\,)$ est solution de l'équation de la chaleur pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

   On a

   $$(u_\lambda)_t(x,t) = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t\,) \;\; et \;\; (u_\lambda)_{x_i}(x,t) = \lambda u_{x_i}(\lambda x, \lambda^2 t\,)$$

   d'où

   $$(u_\lambda)_{x_i x_i}(x,t) = \lambda^2 u_{x_i x_i}(\lambda x, \lambda^2 t\,)$$

   ainsi

   $$\Delta u_\lambda(x,t) = \sum_{i=1}^{n} (u_\lambda)_{x_i x_i}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 u_{x_i x_i}(\lambda x, \lambda^2 t\,) = \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t\,)$$

   et par suite

   $$(u_\lambda)_t(x,t) - \Delta u_\lambda(x,t) = \lambda^2 u_t(\lambda x, \lambda^2 t\,) - \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t\,) = \lambda^2(u_t - \Delta u) = 0.$$

   Donc u_λ est solution de l'équation de la chaleur pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. *Montrons maintenant que la fonction v définie par*

   $$v(x,t) = x.\nabla u(x,t) + 2t u_t(x,t\,)$$

   résout également l'équation de la chaleur.

   La fonction u étant régulière, il en est de même pour u_λ, elle régulière par rapport à ses trois arguments, x, t et λ.

   Dérivons u_λ par rapport à λ, nous obtenons

   $$\frac{\partial}{\partial \lambda} u_\lambda(x,t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} u(\lambda x, \lambda^2 t\,) = x.\nabla u(\lambda x, \lambda^2 t) + 2\lambda t u_t(\lambda x, \lambda^2 t\,),$$

   en prenant $\lambda = 1$, nous obtenons $v(x, \; t)$, c.-à-d. $v(x, \; t) = \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}(x,t)\Big|_{\lambda=1}$.

   Nous avons déjà montré que

   $$\frac{\partial}{\partial t} u_\lambda - \Delta u_\lambda = 0.$$

   Dérivons les deux membres par rapport à λ, alors

   $$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \lambda \partial t} - \frac{\partial(\Delta u_\lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

La fonction u_λ est régulière, donc ses dérivées partielles mixtes sont égales et nous pouvons échanger l'ordre des dérivées et par suite

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right) - \Delta\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right) = 0,$$

et par conséquent $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}$ *résout l'équation de la chaleur, et en particulier pour* $\lambda = 1$ *qui correspond à* $v(x,\ t)$.

Exercice 5:

Soit le problème suivant,

$$(\mathcal{P}_f)\quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}\ ;\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t);\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x);\ 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

f continue par morceaux sur $[0,\ L]$ *et* $c > 0$.

1. *On suppose que* $f \equiv 0$ *et on pose*

$$J(t) = \int_0^L \big(u(x,t)\big)^2 dx.$$

a. *Montrons que la fonction J est décroissante sur* $[0, +\infty[$.

La fonction $t \longmapsto u(x,t)$ *est au moins de classe* C^1, *donc J est dérivable sur* $]0, +\infty[$, *et*

$$J'(t) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\big(u(x,t)\big)^2 dx = 2\int_0^L u(x,t)u_t(x,t)dx = 2c^2\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)dx\,.$$

Une intégration par parties donne,

$$J'(t) = 2c^2[u(x,t)u_x(x,t)]_{x=0}^{x=L} - 2c^2\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2 dx = -2c^2\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2 dx,$$

car $u(0,t) = 0 = u(L,t)$. *Ainsi* $J'(t) \leq 0, \forall t \in\ ]0, +\infty[$ *et J est décroissante* $[0, +\infty[$.

b. *La fonction J est décroissante sur* $[0, +\infty[$, *d'où* $J(t) \leq J(0) = 0$, *pour tout* $t \geq 0$.

Or J est, par définition, positive sur $[0, +\infty[$, *d'où* $J \equiv 0$ *et par suite* $u \equiv 0$.

Donc la solution du problème $(\mathcal{P}_0)$ *est nulle.*

2. *Montrons que si le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution alors celle-ci est unique.*

Supposons que $(\mathcal{P}_f)$ *admet deux solutions v et w.*

La fonction $u = v - w$ *est solution du problème* $(\mathcal{P}_0)$ *puisque*

$$u(x,0) = v(x,0) - w(x,0) = f(x) - f(x) = 0.$$

D'après la question précédente, $u = 0$ *d'où* $v = w$.

3. *Résolvons le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *pour* $L = \pi$ *et* $f(x) = x(\pi - x)$.

Par la méthode de séparation de variables, posons $u(x,t) = X(x)T(t)$.

L'équation s'écrit

$$XT' = c^2 X'' T \quad d'\text{où} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{c^2 T}\ .$$

Les variables sont indépendantes d'où

$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{c^2 T} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

et on a

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & X(0) = 0 = X(\pi), \\ T' - \lambda c^2 T = 0. \end{cases}$$

- *Résolution de l'équation en X :*

Si $\lambda \geq 0$, *nous obtenons la solution triviale.*

Si $\lambda < 0$ *alors* $X(x) = A\cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{-\lambda}\right)$

et des conditions aux limites, il s'ensuit que

$$A = 0, \quad B\sin\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0.$$

La solution est non triviale pour $\sqrt{-\lambda} = n, n \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* $\lambda = -n^2$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

La famille des solutions de l'équation en X est,

$$X_n(x) = a_n \sin(nx)\,, \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

- *Résolution de l'équation en T: Pour* $\lambda = -n^2$, $T' + n^2c^2T = 0$.

L'équation s'écrit $(T \not\equiv 0)$,

$$\frac{dT}{T} = -n^2c^2dt,$$

d'où $\ln|DT| = -n^2c^2t$, *(D constante réelle non nulle)*

et donc $T(t) = \frac{1}{\mathrm{D}}\exp(-n^2c^2t)$.

La famille des solutions en T est, $T_n(t) = b_n \exp(-n^2c^2t)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Ainsi nous obtenons la famille de solutions suivante:

$$u_n(x,t) = d_n \sin(nx)\exp(-n^2c^2t), \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

La solution du problème est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(nx)\exp(-n^2c^2t).$$

Déterminons à présent les coefficients d_n*:*

On a $u(x,0) = f(x) = x(\pi - x)$ *d'où*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(nx).$$

On reconnaît le développement en série de Fourier sinus, d'où

$$d_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi x - x^2)\sin(nx).$$

Par une double intégration par parties nous obtenons,

$$d_n = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)$$

et finalement

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\exp(-n^2c^2t)\ \sin(nx).$$