**Notes de cours**

# *ANALYSE FONCTIONNELLE*

Guillaume CARLIER

ENS, 2008-2009

# Table des matières


**1 Espaces vectoriels topologiques localement convexes** **5**
1.1 Définitions et propriétés premières . . . . . 5
1.2 Bornitude, continuité, suites . . . . . 14
1.3 Applications linéaires continues . . . . . 16
1.4 Limites inductives et topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . . . 22
1.5 Théorèmes de Hahn-Banach . . . . . 29

**2 Introduction à la théorie des distributions** **37**
2.1 Quelques résultats préliminaires . . . . . 38
2.2 Définitions et propriétés premières des distributions . . . . . 44
2.3 Convolution et régularisation . . . . . 50
2.4 Transformation de Fourier . . . . . 55
2.5 Solution fondamentale du Laplacien . . . . . 62

**3 Espaces de Banach et topologies faibles** **65**
3.1 Topologie faible . . . . . 65
3.2 Topologie faible-$*$ . . . . . 69
3.3 Espaces réflexifs . . . . . 70
3.4 Espaces séparables . . . . . 74
3.5 Espaces uniformément convexes . . . . . 76

**4 Opérateurs linéaires, opérateurs compacts** **79**
4.1 Généralités . . . . . 79
4.2 Conséquences de la théorie de Baire . . . . . 80
4.3 Opérateurs compacts, alternative de Fredholm . . . . . 82
4.4 Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints 87

**5 Espaces $L^p$** **89**
5.1 Rappels d'intégration . . . . . 89
5.2 Propriétés élémentaires des espaces $L^p$ . . . . . 91
5.3 Dualité, réflexivité, séparabilité . . . . . 94

5.4 Compacité dans $L^p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102
5.5 Compacité faible dans $L^1$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104

**6 Espaces de mesures** **107**
6.1 Rappels sur les espaces de fonctions continues . . . . . . . . . . 107
6.2 Théorème de Riesz et mesures de Radon dans le cas compact . 109
6.3 Mesures de Radon dans le cas localement compact . . . . . . . 118
6.4 Théorème de Radon-Nikodym, désintégration des mesures . . 125
6.5 Dualité convexe et transport optimal . . . . . . . . . . . . . . . 129

# Chapitre 1

# Espaces vectoriels topologiques localement convexes

## 1.1 Définitions et propriétés premières

Dans tout ce qui suit, $E$ désignera un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, les définitions et résultats qui suivent s'étendent au cas complexe (une fois correctement étendues les notions de convexité et de symétrie).

**Définition 1.1** *On appelle espace vectoriel topologique (evt) tout ev $E$ muni d'une topologie rendant continues les applications*

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y, \quad \textit{et } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda x.$$

Si $E$ est un evt, alors les translations $\tau_y$ ($\tau_x(y) := x + y$) sont des homéomorphismes de $E$, et donc si $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinages de 0, $\{\tau_x(V) = x+V,\ V \in \mathcal{V}\}$ est un système fondamental de voisinages de $x$. De même, si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie $y \mapsto \lambda y$ est un homéomorphisme de $E$. Si $U$ est un voisinage de 0 et $x \in E$ alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ suffisamment petit en valeur absolue $\lambda x \in U$, on dit alors que les voisinages de 0 sont absorbants. On notera également qu'une application linéaire entre evt est continue si et seulement si elle l'est en 0. Enfin, on rappelle qu'un espace topologique est séparé dès que tout couple de points distincts possède des voisinages disjoints (ce qui est toujours le cas dans les espaces métriques).

**Exercice 1.1** *(Histoire de manipuler la définition) Montrer que si $E$ est un evt, 0 possède un système fondamental de voisinages équilibrés ($V$ est équilibré si $\lambda V \subset V$ pour $\lambda \in [-1, 1]$). L'evt $E$ est séparé si et seulement si $\{0\}$ est fermé.*

**Exercice 1.2** *Montrer qu'un evt séparé localement compact (i.e. tel que chaque point admet un voisinage compact) est nécessairement de dimension finie.*

**Exercice 1.3** *(Histoire de régler une bonne fois pour toutes le cas de la dimension finie) Soit $E$ un evt séparé de dimension finie, montrer que sa topologie coïncide avec celle définie par une norme.*

Evidemment, la topologie induite par une norme sur $E$ fait de $E$ un evt mais dans les applications la structure d'espace vectoriel normé s'avère parfois trop rigide et inadaptée (car, par exemple, la boule unité n'est jamais relativement compacte dans un espace vectoriel de dimension infinie...). Inversement, la notion d'evt seule est souvent trop générale pour les analystes et en pratique, les espaces fonctionnels que nous rencontrerons auront en fait davantage de structure. Avant d'aller plus loin, considérons le cas (important et pas si particulier que cela comme nous le verrons au Théorème 1.1) d'une topologie engendrée par une famille de semi-normes.

**Définition 1.2** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev, on appelle semi-norme sur $E$ toute application $p : E \to \mathbb{R}_+$, vérifiant :*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall (x,y) \in E \times E, \; p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}.$$

*Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur $E$, on dit que $\mathcal{P}$ sépare les points (ou est séparante) de $E$ si*

$$p(x) = 0, \; \forall p \in \mathcal{P} \Rightarrow x = 0.$$

Soit $\mathcal{P} = \{p_i, i \in I\}$, une famille de semi-normes sur $E$, $x \in E$, $r > 0$ et $J \subset I$, finie, on définit la $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre $x$, $B_J(x,r)$ par

$$B_J(x,r) = \bigcap_{j \in J} B_{p_j}(x,r) = \{y \in E : p_j(x-y) < r, \; \forall j \in J\}.$$

Notons que $B_J(x,r) = x + B_J(0,r)$ et que par définition même les $\mathcal{P}$-boules $B_J(x,r)$ sont des ensembles convexes de $E$ (on rappelle qu'un sous ensemble $C$ de $E$ est convexe si $tx + (1-t)y \in C$ pour tout $(t,x,y) \in [0,1] \times C \times C$).

La topologie associée à une famille de semi-normes est définie comme suit :

**Définition 1.3** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev et $\mathcal{P} = \{p_i, i \in I\}$, une famille de semi-normes sur $E$, les ouverts de la topologie associée à $\mathcal{P}$ sont les parties $U$ de $E$ telles que pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ et $J \subset I$ fini tels que $B_J(x, r) \subset U$.*

Autrement dit, la topologie associée à $\mathcal{P}$ est celle dont les $\mathcal{P}$-boules ouvertes centrées en $x$ forment un système fondamental de voisinages de $x$. Il est aisé de voir que $E$ muni de cette topologie est un evt et qu'il est séparé si et seulement si la famille $\mathcal{P}$ est séparante. Notons que si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux familles de semi-normes sur $E$ vérifiant $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ alors la topologie associée à $\mathcal{P}'$ est *plus fine* que celle associée à $\mathcal{P}$. Par ailleurs, chaque point de $E$ possède pour cette topologie un système fondamental de voisinages formé d'ensembles convexes. La topologie associée à une famille de semi-normes est donc localement convexe au sens de la définition suivante :

**Définition 1.4** *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc) est un evt dont chaque point possède un système fondamental de voisinages formé d'ensembles convexes.*

On peut évidemment dans la définition précédente remplacer "chaque point" par "un point". Notez aussi que l'evt $E$ est un evtlc ssi 0 possède une système fondamental de voisinages convexes et symétriques (un sous ensemble $C$ de $E$ est dit symétrique si $C = -C$). En remarquant que dans un evtlc, l'intérieur d'un convexe d'intérieur non vide est encore convexe (exercice facile), on notera qu'on peut aussi rajouter "ouverts" dans la définition qui précède.

**Lemme 1.1** *Soit $E$ un evtlc de topologie $\mathcal{T}$ définie par la famille de semi-normes $\mathcal{P}$ et soit $q$ une semi-norme sur $E$ alors $q$ est continue (pour $\mathcal{T}$) si et seulement s'il existe $C \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_k$ dans $\mathcal{P}$ telles que*

$$q \leq C \sup_{i=1,\ldots,k} p_i.$$

**Preuve:**

Si $q$ est continue, il existe un voisinage de 0 sur lequel $q \leq 1$, il existe donc aussi une $\mathcal{P}$-boule sur laquelle $q \leq 1$, l'inégalité cherchée s'obtient alors facilement par homogénéité. Réciproquement, supposons qu'il existe $C \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_k$ dans $\mathcal{P}$ telles que

$$q \leq C \sup_{i=1,\ldots,k} p_i.$$

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors on a $|q(x) - q(y)| \leq q(x-y) \leq \varepsilon$ pour tout $y$ dans la $\mathcal{P}$-boule

$$\{y \in E,\ p_i(x-y) < (1+C)^{-1}\varepsilon,\ i = 1, \dots, k\}$$

ce qui montre la continuité de $q$.

$\square$

**Remarque.** Une combinaison linéaire à coefficients posititifs de semi-normes est encore une semi-norme de même qu'un supremum d'un nombre fini de semi-normes, si $p$ est une semi-norme sur $E$ et $T$ un application linéaire de $F$ vers $E$ alors $p \circ T$ est une semi-norme sur $F$. Si $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes sur $E$, la topologie qu'elle définit est la même que celle définie par la famille (dite filtrante) $\mathcal{P}'$ formée par les suprema de familles finies d'éléments de $\mathcal{P}$.

**Exemples**

Passons maintenant en revue quelques exemples de familles de semi-normes naturellement associées à quelques espaces fonctionnels usuels. Dans ce qui suit $\Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $K$ un compact d'intérieur non vide inclus dans $\Omega$, une suite exhaustive de compacts $K_j$ de $\Omega$ est une suite de compacts inclus dans $\Omega$ tels que $K_j \subset \mathrm{int}(K_{j+1})$ et $\Omega = \cup_j K_j$ (par exemple $K_j := \{x \in \mathbb{R}^d \ :\ |x| \leq j,\ d(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq 1/j\}$). Un multi indices $\alpha$ est un élément $(\alpha_1, ..., \alpha_d)$ de $\mathbb{N}^d$, sa longueur notée $|\alpha|$ est par définition $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Pour $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ et $\beta = (\beta_1, ..., \beta_d)$ deux multi-indices, on notera

- $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$, pour $i = 1, ..., d$,
- $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_d \pm \beta_d)$,
- $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_d!$, et pour $\beta \leq \alpha$

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

- si $x \in \mathbb{R}^d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$,
- si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)(= C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ou $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}))$, et $\alpha \neq (0, \dots, 0)$,

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_d} x_d},$$

  et $\partial^\alpha f = f$ si $\alpha = (0, \dots, 0)$.

On rappelle aussi, à toutes fins utiles, la formule de Leibniz : si $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)^2$ :

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g. \tag{1.1}$$

Si $f \in C(\Omega)(= C(\Omega,\mathbb{R})$ ou $C(\Omega,\mathbb{C}))$, on appelle support de $f$ et l'on note $\mathrm{supp}(f)$ le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f$ est nulle, qui est aussi l'adhérence de $\{x \in \Omega \ : \ f(x) \neq 0\}$.

- Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}^d$, on note $C(K)$ l'espace des fonctions continues de $K$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on le munit classiquement de la norme uniforme
$$\|f\| := \sup_{x\in K} \|f(x)\|$$
(qui en fait un Banach). On peut également munir $C(K)$ de la famille de semi-normes $p_x(f) := |f(x)|$ avec $x \in K$.
- Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$ et $K$ un compact de $\Omega$ pour $f \in C^\infty(\Omega)$, posons
$$p_{m,K}(f) := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d \,:|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)|.$$
L'espace $C(\Omega)(= C(\Omega,\mathbb{R})$ ou $C(\Omega,\mathbb{C}))$ des fonctions continues sur $\Omega$ est muni de la famille de semi normes $p_K = p_{0,K}$ avec $K$ compact de $\Omega$ (ou simplement la famille $p_{0,K_j}$ avec une suite exhaustive de compacts $K_j$ de $\Omega$). $C_K(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\Omega$ à support dans $K$ (i.e. nulles en dehors de $K$) et $C_c(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\Omega$ à support compact i.e. :
$$C_c(\Omega) = \cup_j C_{K_j}(\Omega)$$
Pour $m \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, on définit de même l'espace $C^m(\Omega)$ des fonctions de classe $C^m$ sur $\Omega$, on le munit de la famille $p_{m,K_j}$. On définit de même les espaces de fonctions de classe $C^m$ à support compact, $C^m_K(\Omega)$ et $C^m_c(\Omega)$.
- On note de même $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty$ à support dans $K$ et $\mathcal{D}(\Omega) := C^\infty_c(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty$ à support compact. La topologie de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est définie par la famille de semi normes $\{p_{m,K},\ m \in \mathbb{N}\}$ (nous verrons plus loin que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est métrisable et complet pour cette topologie). Une "bonne" topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (de même que sur $C_c(\Omega)$ ou $C^m_c(\Omega)$) est plus subtile à définir (voir le paragraphe 1.4).
- Soit $p \in [1,\infty)$, $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est l'espace des fonctions fonctions mesurables $f$ telles que pour tout compact $K$ de $\Omega$
$$q_{K,p}(f) := \left(\int_K |f|^p\right)^{1/p} < \infty.$$
On munit $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de la famille de semi-normes $q_{K,p}$ où $K$ parcourt l'ensemble des compacts de $\Omega$ (une suite exhaustive suffit évidemment).

– Considérons l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ des fonctions régulières à décroissance rapide

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^k)|\partial^\beta f(x)| < \infty, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d\}$$

on le munit naturellement de la famille de semi-normes

$$f \mapsto \sup_{\beta\in\mathbb{N}^d,\ |\beta|\leq m}\ \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^k)|\partial^\beta f(x)|.$$

Un exemple typique de fonction de $\mathcal{S}$ est la gaussienne $f(x) = e^{-|x|^2/2}$.

– Si $E$ est un evn et $E'$ son dual topologique, la famille de semi-normes

$$p_f(x) := |f(x)|,\ f \in E', x \in E$$

définit la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur $E$, cette famille est séparante en vertu du théorème de Hahn-Banach que nous verrons plus loin. De même la famille de semi-normes

$$q_x(f) := |f(x)|,\ f \in E', x \in E$$

définit la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$ sur $E'$, elle est séparante par définition même.

Un autre exemple de semi-normes nous est fourni par la jauge d'un ouvert convexe symétrique. Soit $E$ un evt et $C$ un ouvert convexe contenant 0, la jauge de $C$ est alors définie par :

$$j_C(x) := \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}, \forall x \in E.$$

Pour tout $x$ on a $j_C(x) \in \mathbb{R}$, par ailleurs il est évident que $j_C(\lambda x) = \lambda x$ pour tout $\lambda > 0$ et $x \in E$. De plus, $j_C$ vérifie l'inégalité triangulaire, en effet soit $x$ et $y$ dans $E$, pour $\varepsilon > 0$, $(j_C(x)+\varepsilon)^{-1}x$ et $(j_C(y)+\varepsilon)^{-1})y$ sont dans $C$, en remarquant que

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{j_C(x)+j_C(y)+2\varepsilon} =& \frac{j_C(x)+\varepsilon}{j_C(x)+j_C(y)+2\varepsilon}\frac{x}{j_C(x)+\varepsilon} \\ &+ \frac{j_C(y)+\varepsilon}{j_C(x)+j_C(y)+2\varepsilon}\frac{y}{j_C(y)+\varepsilon}\end{aligned}$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on déduit de la convexité de $C$ :

$$j_C(x+y) \leq j_C(x) + j_C(y). \tag{1.2}$$

Si $x \in C$ alors comme $C$ est ouvert $(1+\varepsilon)x \in C$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit et donc $j_C(x) < 1$. Si réciproquement $j_C(x) < 1$ alors il est évident que $x \in C$, si bien que l'on a

$$C = \{x \in E : j_C(x) < 1\}. \tag{1.3}$$

Enfin, si $C$ est de plus supposée symétrique, alors sa jauge est clairement paire et donc c'est une semi-norme (dont la boule unité ouverte est précisément $C$).

**Exercice 1.4** *Soit $E$ un evt et $C$ un sous ensemble convexe de $E$ montrer que l'adhérence de $C$ est convexe.*

**Théorème 1.1** *Soit $E$ un evtlc alors il existe une famille de semi-normes $\mathcal{P}$ sur $E$ qui induit la topologie de $E$. En outre, la topologie de $E$ est séparée si et seulement si la famille $\mathcal{P}$ sépare les points de $E$.*

**Preuve:**
Nous avons déja vu que la topologie associée à une famille de semi-normes munit $E$ d'une structure d'evtlc. Réciproquement, soit $E$ un evtlc et notons $\mathcal{T}$ sa topologie. Posons

$$\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{T} : C \text{ convexe, } 0 \in C,\ C = -C\}$$

on sait que $\mathcal{C}$ est un système fondamental de voisinages de 0 et que $x + \mathcal{C}$ est un système fondamental de voisinages de $x$, pour tout $x \in E$. On pose maintenant

$$\mathcal{P} := \{j_C,\ C \in \mathcal{C}\}.$$

Nous avons vu que $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes sur $E$ et nous allons montrer que $\mathcal{T}$ coïncide avec la topologie associée à $\mathcal{P}$. Soit $U \in \mathcal{T}$ et $x \in U$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $x+C \subset U$ ce qui est équivalent à $B_{j_C}(x,1) \subset U$ ainsi $U$ est un ouvert pour la topologie associée à $\mathcal{P}$. Soit maintenant $U$ ouvert dans la topologie associée à $\mathcal{P}$, pour tout $x$ dans $U$ il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$, $C_1, ..., C_k$ dans $\mathcal{C}$ et $r > 0$ tel que $\cap_{i=1}^k B_{j_{C_i}}(x,r) \subset U$ ce qui est encore équivalent à $x + C \subset U$ avec

$$C = r \cap_{i=1}^k C_i$$

et puisque $C \in \mathcal{C}$, on en déduit que $U \in \mathcal{T}$. La seconde assertion du théorème a déja été vue. $\Box$

On retiendra donc que la topologie d'un evtlc (respectivement d'evtlcs) est déterminée par une famille de semi-normes (respectivement une famille de semi-normes séparante). Une question naturelle à ce stade est de savoir si l'on peut métriser une topologie d'evtlcs (le caractère séparé est évidemment nécessaire). En effet, dans le cadre métrique, les objets topologiques de base (ensembles compacts, continuité, ensembles fermés, adhérence....) peuvent être caractérisés en termes séquentiels et sont ainsi bien plus aisés à manipuler que dans le cadre des espaces topologiques généraux.

**Théorème 1.2** *Soit $E$ un evtlcs dont la topologie est associée à la famille dénombrable (et séparante) de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors la distance*

$$d(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}(p_n(x-y) \wedge 1)$$

*est invariante par translation (i.e. $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ pour tout $(x,y,z) \in E^3$) et métrise la topologie de $E$.*

**Preuve:**
Le fait que $d$ est une distance est facile à voir, de même que l'invariance par translation. Montrons que la topologie induite par $d$ coïncide avec celle induite par $\mathcal{P}$. Soit $x \in E$, $J$ un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $r > 0$, montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la $\mathcal{P}$-boule ouverte $B_J(x,r)$ contienne la boule ouverte pour $d$, $B_d(x,\varepsilon)$ : posons $\varepsilon = 2^{-K-1}(r \wedge 1)$ avec $K = \max J$ si bien que $B_d(x,\varepsilon) \subset B_J(x,r)$. Montrons maintenant que $B_d(x,r)$ contient une $\mathcal{P}$-boule ouverte de centre $x$ : on choisit d'abord $N$ tel que $\sum_{n\geq N} 2^{-n} \leq r/2$, on pose $J = \{0, ..., N\}$ de sorte que $B_J(x, r/4) \subset B_d(x,r)$. □

A titre d'exercice, on montrera que la topologie d'evtlcs associée à une famille (séparante) de semi-normes $\mathcal{P}$ sur $E$ est métrisable si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

– 0 possède un système fondamental de voisinages dénombrable,
– il existe une famille dénombrable de semi-normes induisant la topologie de $E$.

L'importance de la compétude dans les espaces métriques (théorème du point fixe de Banach, théorie de Baire...) justifie la définition suivante :

**Définition 1.5** *On appelle espace de Fréchet tout evtlcs métrisable (ce qui revient à dire que sa topologie peut être définie par une famille dénombrable et séparante de semi-normes) et complet.*

Soit $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de semi-normes (séparante) définissant la topologie de $E$, on remarque que dire que la suite $(x_k)_k$ converge vers $x$ (la limite $x$ étant unique car $E$ est séparé) revient à l'une des assertions équivalentes suivantes

1. pour tout voisinage $U$ de 0, il existe $K$ tel que $x_k - x \in U$ pour tout $k \geq K$ (c'est la définition dans un evt général)
2. pour tout $n$, $p_n(x_k - x) \to 0$ quand $k \to \infty$,
3. $d(x_k, x) \to 0$ quand $k \to \infty$ avec $d$ distance quelconque métrisant la topologie de $E$.

Notons aussi que $(x_k)_k$ est de Cauchy dans l'espace métrique $(E, d)$ (avec $d$ métrisant la topologie de $E$ définie par $\mathcal{P}$) est équivalent aux assertions équivalentes suivantes

1. pour tout voisinage $U$ de 0, il existe $K$ tel que $x_k - x_l \in U$ pour tout $k, l \geq K$
2. pour tout $n$, et tout $\varepsilon > 0$ il existe $K$ tel que $p_n(x_k - x_l) \leq \varepsilon$ pour tout $k, l \geq K$,
3. $\sup_{k,l \geq K} d(x_k, x_l) \to 0$ quand $K \to \infty$.

**Exemples** Voici quelques exemples à retenir (la complétude est dans chaque cas aisée à obtenir et donc laissée en exercice au lecteur) :

– $C(\Omega)$ muni de la famille $\{p_{0,K_j}\}_j$ (convergence uniforme sur tout compact) est un espace de Fréchet, il en est de même pour $C^m(\Omega)$ pour la famille $\{p_{m,K_j}\}_j$ et de $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ pour la famille $\{p_{m,K_j}\}_{m,j}$.
– $L^p_{\mathrm{loc}}$ est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes $f \mapsto \|f\|_{L^p(K_j)}$,
– $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est un espace de Fréchet pour la famille de semi-normes $\{p_{m,K}\}_m$.
– L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est de Fréchet pour la famille de semi-normes

$$f \mapsto \sup_{\beta \in \mathbb{N}^d,\ |\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^k) |\partial^\beta f(x)|.$$

**Exercice 1.5** *Montrer que* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *et* $\mathcal{D}_K(\Omega)$*, munis de leurs topologies usuelles ne sont pas normables.*

**Exercice 1.6** *Soit* $(E_n, p_n)$ *une suite décroissantes d'espaces de Banach avec injections (de* $E_{n+1}$ *dans* $E_n$ *évidemment) continues, montrer que* $E = \cap_n E_n$ *muni de la famille de semi-normes* $\{p_n\}_n$ *est un espace de Fréchet.*

## 1.2 Bornitude, continuité, suites

Il s'agit dans ce paragraphe de définir quelques notions topologiques de base dans les evt (en fait rappeler puisque ces notions sont déja bien connues dans le cadre des espaces topologiques quelconques) mais aussi d'introduire leur pendant séquentiel. Il est bien connu que dans les espaces métriques, on peut développer la topologie indifféremment soit à partir de la topologie associée à la distance, soit à partir de la notion de convergence de suites. Autrement dit, dans les espaces métriques, les deux points de vue sont équivalents. Cela n'est malheureusement pas le cas dans les espaces topologiques généraux (et en particulier ni dans les evt, ni dans les evtlcs) et pourtant, il est souvent bien utile de manier des notions séquentielles. Nous allons définir ici certaines de ces notions séquentielles en avertissant d'emblée le lecteur qu'en dehors du cas métrisable, il ne faudra pas les confondre avec les notions topologiques.

**Définition 1.6** *Soit $E$ un evt, $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans $E$ et $x \in E$. On dit que $(x_n)$ converge vers $x$ (ou encore que $x$ est limite de la suite $(x_n)_n$, ce que l'on notera simplement $x_n \to x$) si et seulement si pour tout voisinage $U$ de $0$, il existe $N$ tel que $(x_n - x) \in U$ pour tout $n \geq N$.*

Evidemment, la définition précédente n'a véritablement d'intérêt que dans le cas où $E$ est séparé ce qui assure que si $(x_n)_n$ converge, sa limite est uniquement déterminée. Dans le cas d'un evtlc de topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P}$, la définition précédente se traduit simplement par : $\forall p \in \mathcal{P}$, $p(x_n - x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Par définition, un fermé de $E$ est une partie dont le complémentaire est ouvert. Une partie $A$ de $E$ est dite *séquentiellement* fermée si pour toute suite à valeurs dans $A$ et convergeant dans $E$ vers une limite $x$ on a $x \in A$. On dira qu'une partie de $E$ est séquentiellement ouverte si son complémentaire est séquentiellement fermé. Il est évident qu'une partie fermée (ouverte) est séquentiellement fermée (ouverte) mais l'inverse n'est en général pas vrai. L'adhérence d'une partie est le plus petit fermé contenant cette partie (ou encore l'intersection des fermés contenant cette partie) et une partie de $E$ est dite dense dans $E$ si son adhérence est $E$ tout entier (ou encore si elle rencontre tout ouvert non vide). L'adhérence séquentielle d'une partie $A$ de $E$ est l'ensemble des limites de suites à valeurs dans $A$ convergentes dans $E$. Une partie de $E$ est dite séquentiellement dense dans $E$ si son adhérence séquentielle est $E$ entier. Une partie $A$ de $E$ est dite séquentiellement compacte si de toute suite à valeurs dans $A$ on peut extraire une sous suite convergeant dans $A$ (la notion coïncide avec la compacité usuelle dans le cas métrique mais en général il n'y a pas d'implication entre les deux notions).

Soit $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologigues et $\varphi : E_1 \to E_2$, $\varphi$ est continue sur $E_1$ (respectivement continue en $x \in E_1$) si $\varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$ pour tout $U \in \mathcal{T}_2$ (respectivement $\varphi^{-1}(U)$ est voisinage de $x$ pour tout $U$ voisinage de $\varphi(x)$). Dans le cas où $E_1$ et $E_2$ sont deux evtlcs de topologies associées respectivement aux familles de semi-normes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, la continuité de $\varphi$ en $x$ s'exprime par : pour tout $\varepsilon > 0$ et $p_2 \in \mathcal{P}_2$ il existe $\delta > 0$ et une semi-norme continue sur $E_1$, $p$ tels que pour tout $y \in E_1$ tel que $p(x-y) \leq \delta$ on a $p_2(\varphi(x) - \varphi(y)) \leq \varepsilon$. L'application $\varphi : E_1 \to E_2$ est dite séquentiellement continue en $x \in E_1$ si pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $x$ dans $E_1$, la suite $(\varphi(x_n))_n$ converge vers $\varphi(x)$ dans $E_2$ ; $\varphi$ est dite séquentiellement continue sur $E_1$ si elle est séquentiellement continue en chaque point de $E_1$.

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on rappelle que $\varphi$ est semi-continue inférieurement sur $E$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E \ : \ \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $E$,
- l'ensemble (épigraphe de $\varphi$) $\{(x, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \ : \ \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $E \times \mathbb{R}$,
- pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $U$ voisinage de $x$ dans $E$ tel que $\varphi(y) \geq \varphi(x) - \varepsilon$, pour tout $y \in U$.

Enfin, $\varphi$ est dite séquentiellement continue, si pour tout $x \in E$ et toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers $x$ dans $E$ on a :

$$\varphi(x) \leq \liminf_n \varphi(x_n).$$

On vérifie facilement que la continuité (la semi-continuité inférieure) implique la continuité (la semi-continuité inférieure) séquentielle mais la réciproque n'est pas vraie en général, nous aurons l'occasion d'y revenir.

**Définition 1.7** *Soit $E$ un evt, on dit que la partie $B$ de $E$ est bornée si et seulement si pour tout $U$ voisinage de $0$, il existe $\lambda > 0$ tel que $B \subset \lambda U$.*

Si $E$ est un evtlc de topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P} = \{p_i, \ i \in I\}$, on vérifie facilement que la bornitude de $B \subset E$ équivaut à l'une des assertions équivalentes suivantes :

- pour tout $p \in \mathcal{P}$, $\sup_{x \in B} p(x) < +\infty$,
- pour tout $J \subset I$, fini, il existe $R > 0$ tel que $B \subset B_J(0, R)$.

Dans le cas où $E$ est un evtlcs métrisable, il ne faut pas confondre la bornitude au sens précédent et la bornitude au sens d'une distance métrisant la topologie de $E$ (remarquons d'ailleurs que pour la distance construite au théorème 1.2, $E$ est borné).

**Exercice 1.7** *Soit $E$ un evtlcs montrer que $E$ est normable si et seulement si $0$ possède un voisinage (convexe) borné.*

**Définition 1.8** *Soit $E$ un evt et $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans $E$, on dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si pour tout $U$ voisinage de $0$, il existe $N$ tel que $x_k - x_l \in U$ pour tout $k \geq N$ et tout $l \geq N$. Un evt est dit complet si toute suite de Cauchy de $E$ converge dans $E$.*

Dans le cas où la topologie de $E$ est définie par la famille de semi-normes $\mathcal{P}$, dire que $(x_n)_n$ est de Cauchy se traduit par : pour tout $p \in \mathcal{P}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que $p(x_k - x_l) \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq N$ et tout $l \geq N$.

## 1.3 Applications linéaires continues

**Lemme 1.2** *Soit $E$ et $F$ deux evtlc de topologies respectivement définies par les familles de semi-normes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et soit $T$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On a les équivalences :*

1. *$T$ est continue,*
2. *$T$ est continue en $0$,*
3. *pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe $C \geq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots p_k$ dans $\mathcal{P}$ tels que*

$$q(Tx) \leq C \sup_{i=1,\dots,k} p_i(x), \ \forall x \in E.$$

**Preuve:**
1 et 2. sont clairement équivalents. Supposons 2. et soit $q \in \mathcal{Q}$ alors il existe $U$ voisinage de $0$ tel que $q(T(x)) \leq 1$ pour tout $x \in U$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots p_k$ dans $\mathcal{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que la $\mathcal{P}$-boule $\{x \in E \ : \ p_i(x) \leq \varepsilon, \ i = 1, \dots, k\}$ soit incluse dans $U$. Par homogénéité on en déduit facilement l'assertion 3. avec $C = \varepsilon^{-1}$. Supposons 3 satisfaite, alors soit $x \in E$ et $U$ un voisinage de $T(x)$ dans $F$, soit $B$ une $\mathcal{Q}$-boule ouverte de centre $T(x)$ incluse dans $U$, il découle de 3. qu'il existe une $\mathcal{P}$-boule ouverte, $C$ de centre $x$ telle que $T(y) \in B \subset U$ pour tout $y \in C$. □

**Définition 1.9** *Soit $E$ et $F$ deux evt et soit $T$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On dit que $T$ est bornée si et seulement si $T$ envoie les parties bornées de $E$ dans des parties bornées de $F$.*

On rappelle que si $E$ et $F$ deux evtlc de topologies associée aux familles de semi-normes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et $T$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, $T$ est séquentiellement continue revient à dire qu'elle est séquentiellement continue en 0 ce qui s'exprime par :

$$\text{si } p(x_n) \to 0,\ \forall p \in \mathcal{P},\ \text{alors } q(T(x_n)) \to 0,\ \forall q \in \mathcal{Q}.$$

On a alors :

**Lemme 1.3** *Soit $E$ et $F$ deux evtlc de topologies associée aux familles de semi-normes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et $T$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, on a les implications : $T$ continue $\Rightarrow$ $T$ séquentiellement continue $\Rightarrow$ $T$ bornée.*

**Preuve:**
Seule la dernière implication est à démontrer. Suposons $T$ séquentiellement continue et supposons par l'absurde que $T$ ne soit pas bornée : $\exists B$ borné de $E$ tel que $T(B)$ n'est pas borné. Ceci implique qu'il existe une semi-norme $q$ continue sur $F$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in B$ vérifiant $q(T(x_n)) \geq n$. Comme $B$ est borné, $y_n := n^{-1/2}x_n$ tend vers 0 dans $E$, avec la continuité séquentielle de $T$, ceci implique que $q(T(y_n))$ tend vers 0 ce qui est contredit par $q(T(y_n)) \geq n^{1/2}$. $\Box$

En général, les implications précédentes sont strictes, nous verrons plus tard des exemples de formes linéaires séquentiellement continues et non continues. Dans $L^2(0,1)$, il est assez facile de voir que la suite $f_n : t \mapsto f_n(t) := \sin(2n\pi t)$ converge faiblement mais pas fortement vers 0, ce qui montre que l'application identité n'est pas séquentiellement continue de $L^2$ muni de la topologie faible dans $L^2$ muni de sa topologie forte (celle de la norme) et pourtant elle est bornée (utiliser Banach-Steinhaus). Il existe donc des applications linéaires bornées et non séquentiellement continues. Dans le cas où $E$ est métrisable toutefois, la bornitude est équivalente à la continuité (on laisse au lecteur le soin de prouver cette assertion).

L'important théorème de Banach-Steinhaus (aussi souvent appelé Principle of Uniform Boundedness) permet de déduire pour les opérateurs linéaires des estimations uniformes à partir d'estimations ponctuelles :

**Théorème 1.3** *(Théorème de Banach-Steinhaus ou Principle of Uniform Boundedness) Soit $E$ un espace de Fréchet (de topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P}$), $F$ un evtlc (de topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{Q}$) et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de $E$ dans $F$ tels que*

$$\forall q \in \mathcal{Q},\ \forall x \in E,\ \sup_{i\in I} q(T_i(x)) < +\infty$$

*alors pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe $C \geq 0$, $J \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_J \in \mathcal{P}^J$ tels que*

$$\forall i \in I,\ \forall x \in E,\ q(T_i(x)) \leq C \sup_{j=1,\ldots,J} p_j(x).$$

**Preuve:**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$A_n := \{x \in E\ :\ \sup_{i \in I} q(T_i(x)) \leq n\}.$$

Comme $A_n$ est une suite de fermés dont la réunion est $E$ et comme $E$ est de Fréchet, il résulte du théorème de Baire qu'il existe $n_0$ tel que $A_{n_0}$ est d'intérieur non vide. Il existe donc $x_0 \in E$, $J \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_J \in \mathcal{P}^J$ et $r > 0$ tels que pour tout $y$ dans la $\mathcal{P}$ boule $B$ de centre 0 et de rayon 1 définie par les semi-normes $p_1, ..., p_J$, on a $q(T_i(x_0 + ry)) \leq n_0$, $\forall i \in I$. On a donc pour tout $y \in B$ et tout $i \in I$, $q(T_i(y)) \leq C := r^{-1}(n_0 + \sup_{i \in I} q(T_i(x_0)))$, on conclut par homogénéité.
□

Nous allons maintenant nous intéresser plus en détail au cas des formes linéaires continues. Dans ce qui suit étant donné un ev $E$ on notera $E^*$ son dual algébrique c'est à dire l'ensemble des formes linéaires sur $E$. Si $E$ est muni d'une structure d'evt (a fortiori d'evtlc), on notera $E'$ son dual topologique, i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $E$.

**Exemple** Etant donné un espace métrique compact $K$, on appelle mesure de Radon sur $K$ toute forme linéaire continue sur $C(K)$ et l'on note $\mathcal{M}(K)$ l'espace des mesures de Radon sur $K$ (la terminologie sera justifiée au Chapitre 6). Le dual topologique de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ est appelé espace des distributions tempérées, celui de $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$ est appelé espace des distributions à support compact.

On rappelle qu'un hyperplan $H$ de $E$ est un sev strict maximal de $E$, ce qui revient à dire que pour tout $x \notin H$, $E = H \oplus \mathbb{R}x$ ou encore qu'il existe $f \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker(f)$. On définit de même les hyperplans affines comme étant les ensembles de la forme $\{f = \alpha\} = \{x \in E\ :\ f(x) = \alpha\}$ pour un certain $f \in E^* \setminus \{0\}$ et un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Lemme 1.4** *Soit $E$ un evt, $f \in E^* \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f$ est continue si et seulement si l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ est fermé.*

**Preuve:**
Si $f$ est continue l'hyperplan $f^{-1}(\{\alpha\})$ est évidemment fermé. Pour la réciproque, on suppose sans perte de généralité que $\alpha = 0$ et que l'hyperplan $H = \ker(f)$

est fermé. Soit $x_0$ tel que $f(x_0) = 1$, il existe un voisinage de 0, $U_0$ tel que $x_0 + U_0 \subset \{f \neq 0\}$, on peut aussi supposer que $U_0$ est équilibré (c'est à dire $\lambda U_0 \subset U_0$ pour $\lambda \in [-1, 1]$) et donc en particulier symétrique ($U_0 = -U_0$). Supposons par l'absurde qu'il existe $u_0 \in U_0$ tel que $f(x_0 + u_0) < 0$, alors il existerait $\lambda \in (0, 1)$ tel que $f(x_0 + \lambda u_0) = 0$ or $x_0 + \lambda U_0 \in x_0 + U_0 \subset \{f \neq 0\}$ ce qui constitue la contradiction recherchée. On a donc $x_0 + U_0 \subset \{f > 0\}$ et comme $U_0 = -U_0$ on en déduit que $|f| \leq 1$ sur $U_0$ de sorte que $f$ est continue.

□

**Exercice 1.8** *Il s'agit ici de montrer un lemme algébrique élémentaire mais fort utile. Soit $E$ un ev et $f, f_1, \dots, f_n$ des éléments de $E^*$. Montrer que $\cap_{i=1}^n \ker(f_i) \subset \ker(f)$ si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$ tels que $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.*

Une question naturelle est maintenant de savoir de quelle topologie munit-on le dual topologique $E'$ d' un evtlcs $E$. Nous avons déja vu que dans le cas d'un evn, deux choix "raisonnables" étaient possibles : la topologie forte (celle donnée par la norme duale) et la topologie faible $*$ (donnée par la famille de semi-normes $\{q_x\}_{x \in E}$ avec $q_x(f) = |f(x)|$). Cela se généralise comme suit aux evt (même si ici nous nous limiterons aux evtlcs) :

**Définition 1.10** *Soit $E$ un evtlcs et $E'$ son dual. On appelle topologie forte sur $E'$, la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$q_B(f) := \sup_{x \in B} |f(x)|, \ \forall f \in E' \ B \subset E, \ B \text{ borné.}$$

*On appelle topologie faible-$*$ sur $E'$ et l'on note $*$-$\sigma(E', E)$, la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$q_x(f) := |f(x)|, \ \forall f \in E', \ x \in E.$$

On notera que les deux topologies précédemment définies sur $E'$ le munissent d'une structure d'evtlcs. En termes séquentiels, on dit qu'une suite $f_n$ de $E'$ converge fortement vers $f$ dans $E'$, ce que l'on note $f_n \to f$ si et seulement si $q_B(f_n - f) \to 0$ pour tout borné $B$ de $E$. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de $E'$ converge faiblement-$*$ (ou simplement faiblement s'il n'y a pas d'ambiguité) vers $f$, ce que l'on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, pour tout $x \in E$. Par construction, une base de voisinages de $f \in E'$ pour la topologie faible-$*$ est donnée par les ensembles de la forme :

$$V_{\varepsilon, x_1, \dots x_k} := \{g \in E' : |(f - g)(x_i)| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, k\}$$

avec $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_k \in E^k$.

On a la caractérisation importante suivante de la topologie faible-$*$ sur $E'$ :

**Théorème 1.4** *La topologie faible-$*$ sur $E'$, $*$-$\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur $E'$ rendant continue les applications $f \in E' \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$, $x \in E$.*

La notion de topologie la moins fine rendant continue une famille d'applications et sa construction ont déja été vus dans le cours de topologie du premier semestre et nous reviendrons dessus au chapitre 3, on omet donc ici la preuve du résultat précédent. On peut bien se demander pourquoi chercher à affaiblir la topologie forte de $E'$, c'est à dire considérer une topologie ayant moins d'ouverts. La réponse est qu'une topologie ayant moins d'ouverts a des chances d'avoir plus de compacts, et, effectivement, on a l'important résultat de compacité suivant :

**Théorème 1.5** *(Banach-Alaoglu-Bourbaki) Soit $E$ un evtlcs, $U$ un voisinage de $0$ et*

$$K := \{f \in E' : |f(x)| \leq 1, \ \forall x \in U\}$$

*alors $K$ est compact pour la topologie faible-$*$ de $E'$.*

**Preuve:**
Soit $p$ une semi-norme continue sur $E$ telle que $B := \{p \leq 1\} \subset U$ on a alors $K \subset K_0$ avec

$$K_0 := \{f \in E' : |f(x)| \leq 1, \ \forall x \in B\} = \{f \in E' : |f(x)| \leq p(x), \ \forall x \in E\}.$$

Comme $K$ est clairement fermé dans $K_0$ il nous suffit de montrer que $K_0$ est compact pour la topologie faible-$*$ de $E'$. Soit $Y = \mathbb{R}^E = \{(\omega_x)_{x \in E}, \ \omega_x \in \mathbb{R}, \ \forall x \in E\}$ muni de la topologie produit (i.e. la moins fine rendant continues les projections canoniques) et $\Phi : E' \to Y$ définie par $\Phi(f) := (f(x))_{x \in E}$ pour tout $f \in E'$, $\Phi$ est une application linéaire injective, continue de $E'$ muni de la topologie faible-$*$ vers $Y$ muni de la topologie produit. Montrons maintenant que $\Phi^{-1} : \Phi(E') \to E'$ est continue, pour cela il suffit de montrer que pour tout $x \in E$, $\omega \mapsto \Phi^{-1}(\omega)(x)$ est continue sur $\Phi(E')$, ce qui est évident puisque $\Phi^{-1}(\omega)(x) = \omega_x$. Il nous suffit donc désormais de montrer que $\Phi(K_0)$ est compact. Or, on a :

$$\Phi(K_0) = A_1 \cap A_2$$

avec

$$A_1 := \{\omega \in Y : |\omega_x| \leq p(x),\ \forall x \in E\} = \prod_{x \in E} [-p(x), p(x)],$$

et

$$A_2 := \{\omega \in Y : \omega_{x+\lambda y} = \omega_x + \lambda \omega_y,\ \forall (x, y, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}\}.$$

Il résulte du théorème de Tychonov que $A_1$ est compact et de la continuité des projections canoniques que $A_2$ est fermé de sorte que $\Phi(K_0)$ est compact. $\Box$

Ce résultat de compacité explique que sur $E'$, on utilisera presque systématiquement la topologie faible-$*$ et le mode de convergence associé. Dans le cas où $E$ est séquentiellement séparable (i.e. possède une partie dénombrable séquentiellement dense), la topologie faible $*$ jouit de bonnes propriétés de métrisabilité :

**Proposition 1.1** *Soit $E$ un evtlcs séquentiellement séparable et $p$ une semi-norme continue sur $E$, alors la topologie faible-$*$ est métrisable sur l'ensemble*

$$K := \{f \in E' \ :\ |f(x)| \leq p(x),\ \forall x \in E\}.$$

**Preuve:**
Soit $\{x_n\}_n$ dense dans $B = \{p \leq 1\}$, pour tout $f$ et $g$ dans $K$, on pose

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - g)(x_n)|$$

il est facile de voir que $d$ est une distance sur $K$. Montrons que cette distance métrise la topologie faible sur $K$. Soit $f \in K$, $r > 0$, montrons que la boule ouverte $B(f, r)$ (dans $K$ pour la distance $d$) est voisinage de $f$ dans $K$ pour la topologie faible-$*$. Soit $N$ tel que $\sum_{n \geq N} 2^{-n} \leq r/4$, et

$$V = V_{r/4, x_1, \ldots, x_N} := \{g \in E' \ : |(g - f)(x_i)| < r/4,\ i = 1, \ldots, N\}$$

alors $V \cap K$ est un voisinage de $f$ dans $K$ pour la topologie faible-$*$ contenu dans $B(f, r)$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $y_1, \ldots, y_k \in E^k$ et soit

$$U = V_{\varepsilon, y_1, \ldots, y_k} := \{g \in E' \ : |(g - f)(y_i)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$$

il s'agit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(f, r) \subset U \cap K$. Pour $i = 1, \ldots, k$ soit $n_i$ tel que $p(y_i - x_{n_i}) \leq \varepsilon/4$ et soit $r = \min_{i=1,\ldots,k} \varepsilon 2^{-n_i - 1}$. Pour $g \in B(f, r)$, on a pour tout $i = 1, .., k$

$$|(f - g)(y_i)| \leq |(f - g)(x_{n_i})| + 2p(y_i - x_{n_i}) < 2^{n_i} r + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

et donc $B(f, r) \subset U \cap K$. $\Box$

En combinant la proposition 1.1 et le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on obtient le résultat de compacité séquentiel, fort utile en pratique suivant :

**Théorème 1.6** *Soit $E$ un evtlcs séquentiellement séparable, soit $(f_n)_n$ une suite de $E'$ telle qu'il existe $p$ une semi-norme continue sur $E$ vérifiant $|f_n(x)| \leq p(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in E$ alors $(f_n)_n$ possède une sous suite convergente pour la topologie faible-$*$.*

Lorsque $E$ est en outre un espace de Fréchet (respectivement une limite inductive d'espaces de Fréchet), le théorème de Banach-Steinhaus (respectivement la proposition 1.7) sera fort utile évidemment pour obtenir l'estimation requise dans le théorème précédent.

De même que l'on a défini la topologie faible-$*$ sur $E'$, on peut définir la topologie faible sur $E$ comme étant la topologie associée à la famille de semi-normes :

$$p_f(x) := |f(x)|, \ \forall x \in E$$

avec $f \in E'$. La topologie faible sur $E$ est notée $\sigma(E, E')$, on déduit du Théorème de Hahn-Banach qu'elle est séparée. Par construction, une base de voisinages de $x \in E$ pour la topologie faible est donnée par les ensembles de la forme :

$$V_{\varepsilon, f_1, \dots f_k} := \{y \in E : |f_i(x - y)| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, k\}$$

avec $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_k \in (E')^k$. La topologie faible sur $E$ est aussi la topologie la moins fine sur $E$ rendant continus les éléments de $E'$. En termes séquentiels, on dit que $x_n$ converge faiblement dans $x$, ce que l'on note $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$. Sauf dans le cas où $E$ est un Banach (et en particulier un espace de Banach réflexif), nous utiliserons assez peu cette topologie et ce mode de convergence.

## 1.4 Limites inductives et topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$

Soit $E$ un ev, réunion d'une famille d'ev $(E_i)_{i \in I}$, on suppose que chaque $E_i$ est muni d'une topologie d'evtlc $\mathcal{T}_i$ (définie par une famille de semi-normes $\mathcal{P}_i = \{p^i_j\}_{j \in J_i}$). La topologie *limite inductive* des topologies $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est alors la topologie $\mathcal{T}$ définie par la famille de semi-normes

$$\mathcal{P} := \{p \text{ semi-norme sur } E \text{ dont la restriction à } E_i \text{ est continue pour tout } i \in I\}.$$

Autrement dit, une semi-norme $p$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si pour tout $i \in I$, il existe $C \geq 0$, $J \subset J_i$ finie telle que

$$p \leq C \sup_{j \in J} p^i_j \text{ sur } E_i.$$

Notons que la caractérisation précédente exprime exactement le fait que toutes les injections canoniques $E_i \to E$ sont continues de $(E_i, \mathcal{T}_i)$ vers $(E, \mathcal{T})$ ; en particulier chaque $E_i$ est fermé dans $(E, \mathcal{T})$.

On a alors la caractérisation suivante

**Théorème 1.7** *La topologie $\mathcal{T}$ limite inductive des $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est la topologie d'evtlc sur $E$ la plus fine rendant continues les injections canoniques $E_i \to E$ $\forall i \in I$.*

**Preuve:**

Nous avons déja remarqué que $\mathcal{T}$ est une topologie d'evtlc qui rend continue les injections canoniques $E_i \to E$, $\forall i \in I$. Soit $\mathcal{T}'$ une topologie d'evtlc qui rend continue toutes ces injections canoniques et soit $\mathcal{P}'$ la famille des semi-normes continues pour la topologie $\mathcal{T}'$. La continuité des injections canoniques implique que $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ et donc que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$. $\square$

**Lemme 1.5** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive des evtlc $(E_i, \mathcal{T}_i)$ définie comme cidessus, $F$ un evtlc et $T$ linéaire $E \to F$, pour que $T$ soit continue il faut et il suffit que sa restriction $T|_{E_i}$ soit continue pour $\mathcal{T}_i$, pour tout $i \in I$.*

**Preuve:**

Si $T$ est continue alors $T|_{E_i}$ l'est aussi comme composée de $T$ et de l'injection canonique $E_i \to E$. Réciproquement, suposons $T|_{E_i}$ est continue pour $\mathcal{T}_i$, pour tout $i \in I$. Soit $\mathcal{Q}$ une famille de semi-normes définissant la topologie de $F$ et soit $q \in \mathcal{Q}$, $q \circ T$ est alors une semi-norme sur $E$ continue sur chaque $E_i$ elle appartient donc à $\mathcal{P}$. La continuité de $T$ en découle immédiatement. $\square$

**Lemme 1.6** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive des evtlc $(E_i, \mathcal{T}_i)$. Soit $C$ un convexe symétrique de $E$ tel que $C \cap E_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$ alors $C$ est voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T})$. Soit $C$ un convexe de $E$ alors $C$ est ouvert si et seulement si $C \cap E_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$.*

**Preuve:**

Soit $C$ un convexe symétrique de $E$ tel que $C \cap E_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$. D'abord, remarquons que $C$ est absorbant car $C \cap E_i$ est voisinage de 0 dans $E_i$ pour chaque $i$. Ainsi la jauge de $C$, $j_C$ est bien définie sur $E$ et comme $C$ est convexe et symétrique, c'est une semi-norme sur $E$. Soit $i \in I$, puisque $C \cap E_i$ est voisinage de 0 dans $E_i$, il existe $B_i$ une $\mathcal{P}_i$-boule ouverte dans $E_i$ de centre 0 telle que $B_i \subset C$ et donc $j_C \leq j_{B_i}$ sur $E_i$, on en déduit que $j_C \in \mathcal{P}$ et donc que $C$ est voisinage de 0 puisque $\{j_C < 1\} \subset C$.

Si $C$ est ouvert alors $C \cap E_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$ par continuité des injections canoniques. Si $C$ est un convexe tel que $C \cap E_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$, alors pour tout $x \in C$, $U := (x - C) \cap (C - x)$ est un convexe symétrique et $U \cap E_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$. Il résulte de la première assertion que $U$ est voisinage de 0 dans $(E, \mathcal{T})$ et donc que $C$ est voisinage de $x$.

□

On en déduit en particulier que :

– la famille

$$\{C \subset E : C \text{ convexe symétrique } C \cap E_i \in \mathcal{T}_i,\ \forall i \in I\}$$

est un système fondamental de voisinages de 0 dans $(E, \mathcal{T})$,

– et puisque $(E, \mathcal{T})$ est un evtlc, que la famille

$$\{C \subset E : C \text{ convexe } C \cap E_i \in \mathcal{T}_i,\ \forall i \in I\}$$

est une base d'ouverts de $(E, \mathcal{T})$.

Nous ne rencontrerons en pratique par la suite que le cas d'une topologie limite inductive d'une suite (croissante) d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, vérifiant en outre les conditions suivantes :

– pour tout $k$, $E_k \subset E_{k+1}$ et $E_k$ est fermé dans $(E_{k+1}, \mathcal{T}_{k+1})$,
– $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k+1}|_{E_k}$ (c'est à dire que la topologie de $E_k$ est celle induite par celle de $E_{k+1}$ sur $E_k$).

On munit alors

$$E := \cup_{k=0}^{\infty} E_k$$

de la topologie $\mathcal{T}$ limite inductive des topologies $\mathcal{T}_k$ et l'on appellera $(E, \mathcal{T})$ (ou simplement $E$) limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$ (ou $(E_k)_k$ si cela n'engendre pas de confusion). Lorsqu'en plus, les inclusions $E_k \subset E_{k+1}$ sont strictes on dit que $(E, \mathcal{T})$ est limite inductive stricte de la suite $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$.

**Exemple** Les espaces $C_c(\Omega)$, $C_c^m(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ sont naturellement limites inductives respectives des suites $(C_{K_j}(\Omega))_j$, $(C_{K_j}^m(\Omega))_j$ et $(\mathcal{D}_{K_j}(\Omega))$ où $K_j$ est une suite exhaustive de compacts. On vérifie sans peine que la topologie définie par limite inductive définie sur ces espaces ne dépend pas de la suite exhaustive de compacts choisie. A partir de maintenant, nous supposerons la plupart du temps, sans nécessairement le préciser, $C_c(\Omega)$, $C_c^m(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ munis de ces topologies. Le dual de l'espace $C_c(\Omega)$ (muni de sa topologie de limite inductive) est appelé espace des mesures de Radon sur $\Omega$ et noté $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ainsi une forme linéaire $T$ sur $C_c(\Omega)$ est une mesure de Radon sur $\Omega$ si et seulement si pour tout $K \subset \Omega$, compact,

$$\exists\ C_K \geq 0 \text{ tel que } |T(\varphi)| \leq C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,\ \forall \varphi \in C_c(\Omega),\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset K.$$

Evidemment, on munit $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de la topologie faible $*$ et de la convergence associée : $T_n$ converge vers $T$ si et seulement si $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$, $\forall \varphi \in C_c(\Omega)$.

**Lemme 1.7** *Soit $E$ un evtlc, $F$ un sev de $E$, $U$ un ouvert convexe de $F$ pour la topologie induite par celle de $E$, il existe $C$ ouvert convexe de $E$ tel que $U = C \cap F$.*

**Preuve:**
On peut supposer sans perte de généralité que $0 \in U$. Par définition, il existe un ouvert $V$ de $E$ tel que $U = V \cap F$, comme $E$ est un evtlc, il existe $W$ ouvert convexe de $E$ contenant 0 tel que $W \subset V$. Posons

$$C := \cup_{t\in[0,1]}(tW + (1-t)U) = \cup_{t\in]0,1]}(tW + (1-t)U)$$

Le fait que l'on puisse exclure la valeur $t = 0$ dans la réunion provient du fait que $W$ est absorbant (pour $x \in U$ on a $x = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)x + \varepsilon^2 x$ et pour $\varepsilon > 0$ assez petit le premier terme est dans $(1-\varepsilon)U$ et le second dans $\varepsilon W$) et ceci montre que $C$ est ouvert ; $C$ est évidemment convexe. Puisque $U \subset C$, on a $U \subset C \cap F$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de remarquer que pour $t \in (0,1]$, $(tW + (1-t)U) \cap F = tW \cap F + (1-t)U \subset tV \cap F + (1-t)U \subset U$ (car $U$ est convexe).
$\square$

Passons en revue quelques propriétés de base des limites inductives d'une suite d'evtlc :

**Proposition 1.2** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$ définie comme précédemment, on a :*

1. *$\mathcal{T}|_{E_k} = \mathcal{T}_k$ i.e. la topologie induite par celle de $E$ sur $E_k$ coïncide avec celle de $E_k$,*
2. *si chaque $(E_k, \mathcal{T}_k)$ est séparé, alors $(E, \mathcal{T})$ l'est aussi.*

**Preuve:**
1. Si $U \in \mathcal{T}$ alors par continuité de l'injection canonique $\pi_k : E_k \to E$, $U \cap E_k = \pi_k^{-1}(U) \in \mathcal{T}_k$ de sorte que $\mathcal{T}|_{E_k} \subset \mathcal{T}_k$. Soit maintenant $U_k \in \mathcal{T}_k$, il s'agit de montrer qu'il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $U_k = U \cap E_k$. Sans perte de généralité, on peut supposer en outre que $U_k$ est convexe. En utilisant le fait que $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k+1}|_{E_k}$ et par application itérée du lemme 1.7, il existe une suite croissante de convexes $(U_{k+l})_{l\geq 1}$ telle que chaque $U_{k+l}$ est ouvert dans $E_{k+l}$ et $U_k = U_{k+l} \cap E_k$. On pose alors $U := \cup_{l\geq 1} U_{k+l}$, comme la suite $U_{k+l}$ est croissante, $U$ est convexe, $U_k = U \cap E_k$, enfin $U$ est ouvert en vertu du lemme 1.6.

2. Soit $x \in E$, $x \neq 0$, il s'agit de montrer qu'il existe $U$ voisinage de 0 dans $\mathcal{T}$ tel que $x \notin U$. Il existe $k$ tel que $x \in E_k$ et $U_k$ un ouvert convexe de $(E_k, \mathcal{T}_k)$ contenant 0 tel que $x \notin U_k$. Comme dans le point précédent, on construit une suite croissante de convexes $(U_{k+l})_{l\geq 1}$ telle que chaque $U_{k+l}$ est ouvert dans $E_{k+l}$ et $U_k = U_{k+l} \cap E_k$ et on pose $U := \cup_{l\geq 1} U_{k+l}$. Comme vu précédemment $U$ est ouvert donc voisinage de 0 et $U \cap E_k = U_k$ de sorte que $U$ ne contient pas $x$.

□

**Théorème 1.8** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$, définie comme précédemment, $(x_n)_n$ une suite de $E$ et $x \in E$, on a alors les équivalences entre :*

1. *$(x_n)_n$ converge vers $x$ dans $(E, \mathcal{T})$,*
2. *il existe $k$ tel que $x \in E_k$, $x_n \in E_k$ pour tout $n$ et $(x_n)_n$ converge vers $x$ dans $(E_k, \mathcal{T}_k)$.*

**Preuve:**

Supposons que $(x_n)_n$ converge vers $x$ dans $(E, \mathcal{T})$ et commencons par montrer qu'il existe $k$ tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n$ (ce qui impliquera en particulier que $x \in E_k$ car $E_k$ est fermé donc séquentiellement fermé). Si un tel $k$ n'existe pas alors il existerait des sous-suites $(n_l)_l$ et $(k_l)_l$ tel que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $x_{n_l} \in E_{k_{l+1}} \setminus E_{k_l}$. Comme $E_{k_l}$ est fermé, on déduit du théorème de séparation 1.11 (que nous verrons à la section suivante) qu'il existe $T_l \in E'$ telle que $T_l \equiv 0$ sur $E_{k_l}$ et $T_l(x_{n_l}) \neq 0$. Pour tout $x \in E$, posons alors

$$p(x) := \sum_{l=0}^{\infty} l \frac{|T_l(x)|}{|T_l(x_{n_l})|}.$$

En remarquant que la somme précédente est en fait finie sur chaque $E_j$, on en déduit que $p$ est une semi-norme continue sur chaque $E_j$ et donc sur $E$ (autrement dit $p \in \mathcal{P}$). En particulier, on devrait avoir que $(p(x_{n_l}))_l$ est bornée ce qui est contredit par la fait que par construction

$$p(x_{n_l}) \geq l, \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

On a donc montré qu'il existe $k$ tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n$ et $x \in E_k$. Ceci implique en particulier que $(x_n)_n$ converge vers $x$ dans $\mathcal{T}|_{E_k}$ et donc dans $(E_k, \mathcal{T}_k)$, en vertu du point 1. de la proposition 1.2.

L'implication 2. ⇒ 1. découle immédiatement du point 1. de la proposition 1.2.

□

En particulier une suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi$ si et seulement s'il existe un compact $K$ de $\Omega$ tel que toutes les fonctions $\varphi_n$ et $\varphi$ soient à support dans $K$ et $\varphi_n - \varphi$ ainsi que toutes ses dérivées convergent uniformément vers 0 sur $K$.

**Lemme 1.8** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$. Si chaque $(E_k, \mathcal{T}_k)$ est séquentiellement séparable, alors $(E, \mathcal{T})$ l'est aussi.*

**Preuve:**
Soit $D_k$ dénombrable séquentiellement dense dans $E_k$ et $D := \cup_k D_k$. Montrons que $D$ est séquentiellement dense dans $E$. Soit $x \in E$ et $k$ tel que $x \in E_k$, il existe alors une suite de $D_k$ convergeant dans $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$ vers $x$ et donc cette suite converge aussi vers $x$ dans $(E, \mathcal{T})$. $\square$

**Proposition 1.3** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$. Si chaque $(E_k, \mathcal{T}_k)$ est complet, alors $(E, \mathcal{T})$ l'est aussi.*

**Preuve:**
Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de $(E, \mathcal{T})$. On montre d'abord qu'il existe $k$ tel que $x_n \in E_k$ pour tout $n$. Pour cela, on remarque que pour tout $p \in \mathcal{P}$, la suite $(p(x_n))_n$ est bornée puis on procède par l'absurde exactement de la même manière que dans la preuve du Théorème 1.8. Utilisant à nouveau le fait que $\mathcal{T}|_{E_k} = \mathcal{T}_k$, on en déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans $(E_k, \mathcal{T}_k)$ dont la complétude permet de conclure. $\square$

En particulier on a :

**Proposition 1.4** *$\mathcal{D}(\Omega)$, muni de sa topologie usuelle (limite inductive des topologies de $\mathcal{D}_{K_j}(\Omega)$ avec $K_j$ suite exhaustive de compacts de $\Omega$) est complet.*

On a vu qu'une limite inductive d'evtlc complets était encore complète, en particulier, une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet est complète. Il est naturel de se demander si cette limite inductive est métrisable (donc de Fréchet) : pour une limite inductive stricte la réponse est toujours négative :

**Proposition 1.5** *Une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet n'est jamais métrisable.*

**Preuve:**
Notons $E$ la limite inductive stricte de la suite d'espaces de Fréchet $(E_k)_k$. Chaque $E_k$ est fermé dans $E$ et d'intérieur vide (sans quoi $E_k$ contiendrait un voisinage de 0 et ce dernier étant absorbant ceci impliquerait que $E_k = E$).

Puisque $E$ est complet, s'il était métrisable, il résulterait du Lemme de Baire que $E = \cup_k E_k$ est lui-même d'intérieur vide, ce qui est absurde.

$\square$

En particulier, $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de sa topologie usuelle (limite inductive stricte de la suite d'espaces de Fréchet $\mathcal{D}_{K_j}(\Omega)$ avec $K_j$ suite exhaustive de compacts de $\Omega$) n'est pas métrisable. Noter que la preuve précédente fournit des exemples d'espaces topologiques complets et non de Baire et montre que la propriété "être de Baire" ne passe pas à la limite inductive.

On peut être déçu par le caractère non métrisable d'une limite inductive stricte d'espaces de Fréchet, néanmoins on a :

**Proposition 1.6** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$ et soit $T \in E^*$. Si chaque $E_k$ est métrisable alors $T \in E'$ si et seulement si $T$ est séquentiellement continue.*

**Preuve:**

Si $T$ est séquentiellement continue alors $T|_{E_k}$ est séquentiellement continue pour tout $k$ et comme $\mathcal{T}_k$ est métrisable on en déduit que $T|_{E_k}$ est continue pour tout $k$ et donc $T \in E'$ en vertu du lemme 1.5.

$\square$

En particulier, une forme linéaire $T$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (autrement dit c'est une *distribution* c'est à dire un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$) si et seulement si $T$ est séquentiellement continue.

Indiquons une application immédiate mais utile du théorème de Banach-Steinhaus aux limites inductives d'espaces de Fréchet :

**Proposition 1.7** *Soit $(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'espaces de Fréchet $(E_k, \mathcal{T}_k)_k$ (de topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P}_k$), $F$ un evtlc (de topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{Q}$) et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de $E$ dans $F$ tels que*

$$\forall q \in \mathcal{Q},\ \forall x \in E,\ \sup_{i \in I} q(T_i(x)) < +\infty$$

*alors pour tout $q \in \mathcal{Q}$ et tout $k$, il existe $C \geq 0$, $J \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_J \in \mathcal{P}_k^J$ tels que*

$$\forall i \in I,\ \forall x \in E_k,\ q(T_i(x)) \leq C \sup_{j=1,\dots,J} p_j(x).$$

On notera au passage que sous les hypothèses précédentes

$$x \in E \mapsto \sup_{i \in I} q(T_i(x))$$

est une semi-norme continue sur $E$ (puisqu'elle l'est sur chaque $E_k$).

**Exercice 1.9** *Montrer que les fermés bornés de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ sont séquentiellement compacts et qu'il en est de même dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (propriété de Montel).*

**Exercice 1.10** *$(E, \mathcal{T})$ limite inductive de la suite d'evtlc $(E_k)_k$, montrer que $B \subset E$ est borné si et seulement s'il existe $k$ tel que $B \subset E_k$ et $B$ est borné dans $E_k$.*

## 1.5 Théorèmes de Hahn-Banach

Avant de prouver le Théorème de Hahn-Banach sous sa forme analytique, procédons à quelques rappels sur les ensembles ordonnés. Soit $A$ un ensemble non vide muni d'un ordre (partiel) $\preccurlyeq$. Un élément $m$ de $A$ est dit maximal si $\{x \in A \ : \ m \preccurlyeq x\} = \{m\}$. Une partie $B$ de $A$ est dite totalement ordonnée si pour tout $(x, y) \in B^2$ on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$ ; on dit que $m \in A$ est un majorant de $B$ si et seulement si $x \preccurlyeq m$ pour tout $x \in B$. Enfin, on dit que $A$ est inductif si toute partie totalement ordonnée de $A$ admet un majorant. Le lemme de Zorn (que nous admettrons ici, voir [7] pour une démonstration à partir de l'axiome du choix) s'énonce comme suit.

**Lemme 1.9** *Tout ensemble ordonné, inductif non vide possède un élément maximal.*

Il va sans dire qu'on peut aussi utiliser le lemme de Zorn sous la forme suivante : tout ensemble ordonné, inductif décroissant (i.e. telle que toute partie totalement ordonnée de $A$ admet un minorant) non vide possède un élément minimal (c'est à dire un élément qui n'a d'autre minorant que lui-même).

**Théorème 1.9** *(Hahn-Banach, forme analytique) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev et $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall x \in E, \ \forall \lambda > 0, \ p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall (x, y) \in E^2.$$

*Soit $G$ un sev de $E$ et $g$ une forme linéaire sur $G$ telle que*

$$g(x) \leq p(x), \ \forall x \in G$$

*alors il existe un forme linéaire $f$ sur $E$ prolongeant $g$ ($f(x) = g(x)$, $\forall x \in G$) telle que*

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in E.$$

**Preuve:**
Soit $A$ l'ensemble des couples $(H,h)$ avec $H$ sev de $E$ contenant $G$, $h$ forme linéaire sur $H$ prolongeant $g$ et tels que $h \leq p$ sur $H$. Evidemment $(G,g) \in A$ ce qui en assure la non vacuité. Munissons $A$ de la relation d'ordre $\preccurlyeq$ :

$$(H_1,h_1) \preccurlyeq (H_2,h_2) \iff H_1 \subset H_2 \text{ et } h_2 \text{ prolonge } h_1.$$

Si $(H_i,h_i)_{i\in I}$ est une partie totalement ordonnée de $E$ alors elle admet pour majorant

$$H := \cup_{i\in I} H_i,\ h(x) = h_i(x),\ \forall x \in H_i.$$

Ainsi $A$ est inductif, et possède donc un élément maximal $(H,h)$ en vertu du Lemme de Zorn rappelé plus haut. Si l'on montre que $H = E$, la preuve sera achevée. Supposons au contraire que $H \neq E$, soit alors $x_0 \in E \setminus H$ et $H_0 := H \oplus \mathbb{R}x_0$, si l'on arrive à prolonger $h$ en une forme linéaire $h_0$ sur $H_0$ majorée par $p$, on aura la contradiction souhaitée à la maximalité de $(H,h)$. Tout prolongement $h_0$ de $h$ à $H_0$ est de la forme

$$h_0(x + tx_0) = h(x) + t\alpha,\ \forall (x,t) \in H \times \mathbb{R}$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Si bien que $h_0 \leq p$ sur $H_0$ si et seulement si

$$h(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0),\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in H$$

ce qui par homogénéité revient à

$$h(x) + \alpha \leq p(x + x_0),\ \text{ et } h(x) - \alpha \leq p(x - x_0),\ \forall x \in H \tag{1.4}$$

ou encore

$$\sup_{x\in H}\{h(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x\in H}\{p(y + x_0) - h(y)\}. \tag{1.5}$$

Or si $(x,y) \in H^2$ on a

$$h(x+y) = h(x) + h(y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_0) + p(y + x_0)$$

et donc

$$\sup_{x\in H}\{h(x) - p(x - x_0)\} \leq \inf_{x\in H}\{p(y + x_0) - h(y)\}$$

ainsi on peut choisir $\alpha$ vérifiant (1.5), ce qui achève la preuve.
$\square$

On déduit immédiatement du Théorème de Hahn-Banach, quelques conséquences utiles comme le prolongement de formes linéaires continues dans les evn. Rappelons que si $E$ est un evn, on munit canoniquement son dual topologique $E'$ de le norme duale :

$$\|f\|_{E'} := \sup\{|f(x)|,\ x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$$

qui fait de $E'$ un espace de Banach.

**Corollaire 1.1** *Soit $E$ un evn, $G$ un sev de $E$ et $g \in G'$, il existe $f \in E'$, prolongeant $g$ et telle que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

**Preuve:**
On applique le Théorème 1.9 avec $p(x) := \|g\|_{G'}\|x\|$. $\square$

**Corollaire 1.2** *Soit $E$ un evn et $x_0 \in E$ il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$. On a donc pour tout $x \in E$,*

$$\|x\| = \max\{f(x),\ f \in E',\ \|f\|_{E'} \leq 1\}.$$

**Preuve:**
On applique le corollaire 1.1 avec $G = \mathbb{R}x_0$, $g(tx_0) = t\|x_0|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ si bien que $\|g\|_{G'} = 1$. La deuxième assertion s'en déduit immédiatement.
$\square$

On déduit trivialement de ce corollaire :

**Corollaire 1.3** *Soit $E$ un evn, la topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

On s'intéresse maintenat aux formes géométriques du théorème de Hahn-Banach ou théorèmes de séparation des convexes. Expliquons ce que nous entendons par le terme de "séparation" : on dit que deux parties $A$ et $B$ de l'evt $E$ sont séparées (au sens large) par l'hyperplan affine fermé $H = \{f = \alpha\}$ (avec $f \in E' \setminus \{0\}$) si

$$f(x) \leq \alpha,\ \forall x \in A,\ \text{ et } f(y) \geq \alpha\ \forall y \in B$$

ce qui exprime géométriquement le fait que $A$ et $B$ se situent "de part et d'autre" de $H$. On parle de séparation stricte si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon,\ \forall x \in A,\ \text{ et } f(y) \geq \alpha\ \forall y \in B.$$

Par la suite on appellera demi-espace fermé tout ensemble de la forme $\{f \geq \alpha\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ avec $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On commence par le cas d'un point et d'un convexe ouvert ne contenant pas ce point (et ce, dans le cadre d'un evt général) :

**Lemme 1.10** *Soit $E$ un evt, $C$ un ouvert convexe non vide et $x_0 \notin C$ alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$. En particulier l'hyperplan $\{f = f(x_0)\}$ sépare $\{x_0\}$ et $C$ au sens large.*

**Preuve:**

Quitte à effectuer une translation nous pouvons supposer que $0 \in C$ si bien que $C$ est un voisinage ouvert de 0 et nous en notons $j_C$ la jauge. Posons $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(tx_0) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $x_0 \notin C$, on a $j_C(x_0) \geq 1 = g(x_0)$ et par homogénéité on a donc $j_C(tx_0) \geq g(tx_0)$ pour tout $t \geq 0$, cette dernière inégalité étant évidemment satisfaite pour lles $t < 0$ ainsi $g \leq j_C$ sur $G$. Par le Théorème de Hahn-Banach 1.9, il existe $f \in E^*$ telle que $f \leq j_C$ sur $E$ et $f = g$ sur $G$. Si $x \in C$ on a alors $f(x) \leq j_C(x) < 1 = f(x_0)$. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $f$ est continue. Or si $x$ appartient au voisinage ouvert de 0, $C \cap (-C)$ on a $f(x) \leq j_C(x) < 1$ et $f(-x) \leq j_C(-x) < 1$ de sorte que $|f| \leq 1$ sur $C \cap (-C)$. □

**Théorème 1.10** *(Hahn-Banach, première forme géométrique) Soit $E$, un evt, $A$ et $B$ deux convexes non vides disjoints de $E$, $A$ étant ouvert alors il existe un hyperplan fermé qui sépare $A$ et $B$ au sens large.*

**Preuve:**

On remarque que $A - B$ est convexe et ouvert car $A - B = \cup_{b \in B}(A - b)$ et que $0 \notin (A - B)$. Ainsi il résulte du lemme 1.10 qu'il existe $f \in E'$ telle que

$$f(a) - f(b) < f(0) = 0, \ \forall (a, b) \in A \times B$$

Ceci implique que $f \neq 0$ et

$$\sup\{f(a), \ a \in A\} \leq \inf\{f(b), \ b \in B\}$$

de sorte que $\{f = \alpha\}$ sépare $A$ de $B$ au sens large pour tout $\alpha$ compris entre les deux membres de l'inégalité précédente. □

Pour la séparation stricte, on a le théorème suivant (bien noter la différence dans les hypothèses) :

**Théorème 1.11** *(Hahn-Banach, deuxième forme géométrique) Soit $E$, un evtlc, $A$ et $B$ deux convexes non vides disjoints de $E$, $A$ étant compact et $B$ étant fermé alors il existe un hyperplan fermé qui sépare $A$ et $B$ au sens strict.*

**Preuve:**

Comme $B$ est fermé et $A \subset E \setminus B$ pour tout $a \in A$, il existe $U_a$ voisinage ouvert convexe de 0 tel que $(a + U_a) \cap B = \emptyset$ et par continuité de $(x, y) \mapsto x + y$ en $(0, 0)$, il existe $V_a$ voisinage ouvert convexe de 0 tel que $V_a + V_a \subset U_a$. Puisque $A$ est compact il existe $n$ et $a_1, ..., a_n$ dans $A$ tels que $A \subset \cup_{i=1}^{n}(a_i + V_{a_i})$. Soit maintenant $V := \cap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ et $x \in A + V$, alors il existe un $i$ tel que

$x \in a_i + V_{a_i} + V \subset a_i + V_{a_i} + V_{a_i} \subset E \setminus B$ et donc $A + V \cap B = \emptyset$. Comme $A + V$ est un ouvert convexe disjoint de $B$, d'aprés le théorème 1.11, il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que

$$f(a) + f(v) \leq f(b),\ \forall (a, b, v) \in A \times B \times V.$$

Comme $V$ est absorbant et $f \neq 0$ il existe $v \in V$ telle que $f(v) < 0$, ce qui achève la preuve.

□

Une application immédiate nous est fournie par le

**Corollaire 1.4** *Soit $E$ un evtlc alors tout convexe fermé $C$ de $E$ est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant $C$. En particulier, tout convexe fermé $C$ de $E$ est intersection de demi-espaces fermés.*

**Preuve:**

Le cas où $C$ est vide est évident. Supposons $C$ non vide et appelons $C'$ l'intersection des demi-espaces fermés contenant $C$. S'il existe $x \in C' \setminus C$, en vertu du théorème 1.11 (appliqué au convexe fermé $C$ et au convexe compact $\{x\}$), il existe un demi-espace fermé contenant $C$ et non $x$ ce qui contredit $x \in C'$.

□

Le théorème 1.11 peut s'avérer très utile pour montrer qu'un sev est dense :

**Corollaire 1.5** *Soit $E$ un evtlc et $F$ un sev de $E$ si $\overline{F} \neq E$ il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ telle que $f \equiv 0$ sur $F$.*

**Preuve:**

Si $x \in E$ et $x \notin \overline{F}$, le théorème 1.11 appliqué à $\{x\}$ et $\overline{F}$ fournit l'existence d'un $f \in E' \setminus \{0\}$ et d'un $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \alpha \leq f(y)$, pour tout $y \in F$, ceci implique que $f \equiv 0$ sur $F$. □

Ainsi pour montrer qu'un sev $F$ est dense dans $E$ il suffit de montrer que toute forme linéaire continue sur $E$ nulle sur $F$ est identiquement nulle sur $E$.

Avant d'énoncer et démontrer le théorème de Krein-Millman comme conséquence du théorème 1.11, définissons la notion de point extrémal

**Définition 1.11** *Soit $E$ un ev, $C$ un convexe de $E$ et $x \in C$, on dit que $x$ est un point extrémal de $C$ si et seulement s'il vérifie :*

$$\forall (t, y, z) \in (0, 1) \times C \times C, x = ty + (1 - t)z \Rightarrow y = z.$$

*On note* $\mathrm{ext}(C)$ *l'ensemble des points extrémaux de $C$.*

Il s'agit d'une notion purement géométrique, on vérifie sans peine que les points extrémaux de la boule euclidienne de $\mathbb{R}^d$ forment la sphère, que les points extrémaux d'un pavé de $\mathbb{R}^d$ sont ses sommets etc... On notera aussi que $x$ est un point extrémal de $C$ est équivalent à dire que $C\backslash\{x\}$ est convexe.

**Proposition 1.8** *Soit $E$ un evtlcs et $C$ un convexe compact de $E$ alors* $\mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$.

**Preuve:**
Soit $A$ l'ensemble des fermés non vides de $C$, $F$ tels que pour tout $(x,y) \in C \times C$, si $[x,y] \cap F \neq \emptyset$ alors $[x,y] \subset F$. Comme $C \in A$, $A \neq \emptyset$, par ailleurs, il est clair que les éléments de $A$ sont convexes et que toute intersection non vide d'éléments de $A$ est encore dans $A$, enfin dire que $x \in \mathrm{ext}(C)$ revient à dire que $\{x\} \in A$. Pour montrer que $\mathrm{ext}(C) \neq \emptyset$ nous allons montrer (en utilisant le lemme de Zorn) que $A$ admet un élément minimal pour l'inclusion et que ce dernier est nécessairement réduit à un singleton. Montrons d'abord que $A$ est inductif décroissant pour l'inclusion (c'est à dire que toute partie totalement ordonnée de $A$ possède un minorant). Soit donc $(F_i)_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de $A$, $F := \cap_{i\in I} F_i$, pour montrer que $F$ est un minorant de $(F_i)_{i\in I}$, il nous suffit de montrer que $F \neq \emptyset$ mais si $F$ était vide, par compacité de $C$ une intersection finie de $F_i$ serait vide, ce qui comme la famille est ordonnée, impliquerait que l'un des $F_i$ soit vide contredisant ainsi le fait que chaque $F_i$ est dans $A$. Le lemme de Zorn permet de conclure à l'existence d'un élément minimal $F$ de $A$.

Il s'agit maintenant de montrer que $F$ est un singleton, si tel n'était pas le cas il existerait $x$ et $y$ distincts dans $F$. $E$ étant un evtlcs il existe un voisinage ouvert convexe de $y$ ne contenant pas $x$ et donc, avec le lemme 1.10 il existe $f \in E'$ telle que $f(x) < f(y)$ en particulier $f$ n'est pas constante sur $F$. Posons $\alpha := \min_F f$ et $G := F \cap \{f = \alpha\}$ (fermé non vide par compacité de $F$ et continuité de $f$) comme $G$ est inclus strictement dans $F$, si nous montrons que $G \in A$, nous aurons la contradiction recherchée à la minimalité de $F$. Soit donc $x$ et $y$ dans $C$ et $t \in [0,1]$ tels que $z = tx + (1-t)y \in G$ comme $G \subset F \in A$ on a que $x$ et $y$ apartiennent à $F$ donc en particulier $f(x) \geq \alpha$ et $f(y) \geq \alpha$ et comme $f(z) = \alpha$ on en déduit que ces inégalités sont en fait des égalités et donc $x$ et $y$ sont dans $G$, par convexité de $G$, on en déduit que $G \in A$. $\square$

**Théorème 1.12** *(Krein-Millman) Soit $E$ un evtlcs et $C$ un convexe compact de $E$ alors $C = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(C))$.*

**Preuve:**
Posons $C' = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ext}(C))$, il est clair que $C' \subset C$. Pour l'inclusion inverse,

supposons par l'absurde qu'il existe $x \in C \setminus C'$, en utilisant le Théorème 1.11, il existe $f \in E'$ tel que

$$f(x) > \max_{y \in C'} f(y)$$

si bien qu'en particulier

$$\alpha := \max_{z \in C} f(z) > \max_{y \in C'} f(y) \tag{1.6}$$

En appliquant la proposition 1.8, l'ensemble convexe compact $C_\alpha = \{z \in C : f(z) = \alpha\}$ possède au moins un point extrémal $z$ dont on vérifie facilement qu'il est aussi un point extrémal de $C$, ce qui contredit (1.6).
$\square$

Notons que si $f$ est une forme linéaire continue (ou plus généralement une fonction concave sci) sur le convexe compact $C$ alors elle atteint son minimum en au moins un point extrémal de $C$. Cette remarque est à la base de la programmation linéaire et prend tout son sens lorsque $C$ a peu de points extrémaux et notamment quand elle en a un nombre fini comme c'est le cas des polyèdres convexes, dans ce cas il suffit de déterminer et explorer (si possible intelligemment) l'ensemble des points extrémaux de $C$ (algorithme du simplexe etc...).

**Exercice 1.11** *Soit $E$ un evn séparable (i.e. admettant une famille dénombrable dense) montrer qu'il existe une famille dénombrable de formes linéaires continues séparant les points de $E$. En déduire une preuve de la proposition 1.8 n'utilisant pas le lemme de Zorn.*

**Exercice 1.12** *Soit $C$ un convexe (quelconque) de $\mathbb{R}^d$ et $x \notin C$, montrer que l'on peut séparer au sens large $x$ de $C$. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.*

**Exercice 1.13** *(Birkhoff) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A$ est bistochastique, si ses coefficients sont positifs et que la somme de ses coefficients sur chaque ligne et chaque colonne est 1. Montrer que les matrices bistochastiques sont les combinaisons convexes des matrices de permutation.*

**Exercice 1.14** *Dans le cas d'un espace de Hilbert, donner une preuve élémentaire du Théorème 1.11 à partir du théorème de projection sur un convexe fermé.*

**Exercice 1.15** *Soit* $l^1 := l^1(\mathbb{N})$ *muni de sa structure usuelle d'espace de Banach. Montrer que* $(l^1)' = l^\infty$*. Montrer que si une suite converge faiblement dans* $l^1$ *alors elle converge fortement (Schur). Montrer que l'application identité* $(l^1, \sigma(l^1, l^\infty)) \to (l^1, \|.\|_{l^1})$ *est séquentiellement continue mais pas continue et conclure.*

# Chapitre 2

# Introduction à la théorie des distributions

Une des idées de base de la théorie des distributions est de ne pas voir une fonction $f$ (disons $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$) "ponctuellement" mais à partir de son action sur des fonctions-test c'est à dire à travers les quantités

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Un des intérêts de ce point de vue est que par dualité-ou transposition-on va en fait faire porter un certain nombre d'opérations (la dérivation en particulier) sur les fonctions-test et non sur $f$ a priori trop peu régulière pour que ces opérations puissent lui être licitement directement appliquées. Le choix de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ comme espace de fonctions-test est assez naturel (mais d'autres peuvent aussi être judicieux) : on peut dériver licitement autant qu'on veut, intégrer autant qu'on veut ces dérivées et les termes de bord dans les intégrations par parties seront nuls. On disposera donc d'un cadre très général dans lequel on pourra dériver "au sens des distributions" des objets relativement pathologiques comme des mesures.

Nous verrons dans ce chapitre un certain nombre d'opérations naturelles (dérivation, multiplication, convolution, transformée de Fourier) sur les distributions et comment elles permettent de résoudre certaines équations aux dérivées partielles. Néanmoins, toutes ces opérations (et donc les EDP's que nous verrons dans ce chapitre) sont linéaires et cela est dans la nature des choses : la théorie des distributions permet-entre autres choses- de donner un sens aux dérivées d'une masse de Dirac mais pas à son carré ou son exponentielle....

## 2.1 Quelques résultats préliminaires

On se propose de regrouper dans ce paragraphe divers résultats classiques d'approximation (régularisation par convolution, troncature) et d'établir quelques formules d'intégration par parties qui nous seront utiles par la suite. Dans tout ce qui suit, $\Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et les fonctions en jeu dans ce chapitre seront à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On commence par le classique lemme de densité, vu dans le cours d'Intégration :

**Lemme 2.1** *$C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$.*

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on définit la convolution de $f$ et $g$ par

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

on vérifie sans peine que $f \star g = g \star f$, que $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Il est clair par ailleurs que la définition précédente de $f \star g$ fait sens dès que $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est $L^1$ pour presque tout $x$, on peut donc en particulier définir $f \star g$ pour $f \in L^1$ à support compact (i.e. nulle p.p. en dehors d'un compact) et $g \in L^1_{\text{loc}}$. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a :

**Lemme 2.2** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est $L^1$, $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

**Preuve:**
Le résultat est évident pour $p = \infty$ et $p = 1$. On supposera donc que $p \in ]1, \infty[$ et on note $p^*$ l'exposant conjugué de $p$ (i.e. $p^* = p/(p-1)$). Puisque $|g|^p \in L^1$, on déduit du cas $L^1$ que pour presque tout $x$ on a $y \mapsto |f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p$, comme $y \mapsto |f(x-y)|^{1/p^*}$ est $L^{p^*}$, on déduit de l'inégalité de Hölder que $y \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est $L^1$ pour presque tout $x$ avec :

$$|f \star g|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^{1/p^*} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| dy \leq \|f\|_{L^1}^{1/p^*} \left(|f| \star |g|^p\right)^{1/p}(x).$$

Puisque $|f| \star |g|^p \in L^1$ avec $\||f| \star |g|^p\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|^p_{L^p}$ , on en déduit immédiatement que $f \star g \in L^p$ avec $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. $\Box$

**Exercice 2.1** *Montrer que* $\mathcal{S} \star \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$.

Le support d'une fonction $L^p$ étant par définition le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel cette fonction s'annule presque partout alors, on vérifie facilement que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

Ainsi, en particulier si $f$ et $g$ sont à support compact, alors $f \star g$ aussi avec

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Soit $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$, $\rho \geq 0$ et $\operatorname{supp}(\rho) \subset \overline{B}(0,1)$. Un exemple typique de fonction vérifiant ces conditions étant :

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $C$ constante choisie de sorte que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit alors $\rho_\varepsilon$ par $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1}x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$. On appelle $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon > 0$ famille régularisante (mollifying en anglais), cette terminologie étant justifiée par le fait que si $f \in L^1$, $\rho_\varepsilon \star f$ est $C^\infty$ (et à support compact si $f$ l'est) avec

$$\partial^\beta(\rho_\varepsilon \star f) = (\partial^\beta \rho_\varepsilon) \star f, \forall \beta \in \mathbb{N}^d.$$

**Lemme 2.3** $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $L^1(\Omega)$.

**Preuve:**
Soit $f \in L^1$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon/2$. Soit $(\rho_\delta)_\delta$ une suite régularisante, pour $\delta < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f_\varepsilon, \mathbb{R}^d \setminus \Omega))$, $\rho_\delta \star f_\varepsilon$ est correctement définie et appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Il est aisé de déduire de l'uniforme continuité de $f_\varepsilon$ que pour $\delta$ assez petit on a $\|\rho_\delta \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon/2$ ce qui achève la preuve. $\square$

L'approximation de $f$ par $\rho_\varepsilon \star f$ s'appelle régularisation par convolution ou par noyau régularisant. Notons que dans certains cas, on peut souhaiter approcher $f$ non pas par des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ comme précedemment mais par des fonctions analytiques, on peut alors procéder par convolution en considérant $\rho_\varepsilon \star f$ avec (par exemple) $\rho_\varepsilon$ gaussienne centrée de variance $\varepsilon^2\mathrm{id}$.

Il faut retenir le procédé de régularisation par convolution qui permet d'approcher des fonctions à support compact par des fonctions $C^\infty$ à support compact. Un autre procédé important dans les applications est celui de troncature qui permet d'approcher une fonction par une fonction à support compact. Ce procédé consiste à approcher $f \in L^1(\Omega)$ (par exemple) par $\eta_n f$ avec $\eta_n$ une *fonction plateau* (ou *cut-off*) c'est-à dire une fonction continue comprise entre 0 et 1 valant 1 sur $K_n$ et 0 sur $\Omega \setminus K_{n+1}$ (avec $K_n$ une suite exhaustive de compacts de $\Omega$). L'existence de telles fonctions-plateau résulte du lemme d'Urysohn et l'on peut bien sûr les choisir $C^\infty$ par régularisation par convolution.

**Lemme 2.4** *(Partition de l'unité) Soit* $\Gamma$ *un compact de* $\mathbb{R}^d$ *et* $U_1, \dots U_k$ *un recouvrement ouvert de* $\Gamma$*, il existe des fonctions* $C^\infty$ *à support compact* $\theta_1, \dots, \theta_k$ *vérifiant* $\mathrm{supp}(\theta_i) \subset U_i$, $0 \leq \theta_i \leq 1$, $i = 1, \dots, k$ *et* $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ *sur un voisinage de* $\Gamma$ *(on appelle alors* $\theta_1, \dots, \theta_k$ *partition de l'unité subordonnée au recouvrement* $U_1, \dots U_k$*) .*

Le lemme précédent est classique et peut se démontrer par récurrence sur $k$, on en laisse la démonstration au lecteur.

**Exercice 2.2** *Ce qui suit est évident mais il est essentiel de l'avoir en tête pour comprendre les dérivées au sens des distributions. Soit* $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ *montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varphi = 0.$$

*Soit* $\varphi$ *et* $\psi$ *sont dans* $C^1(\mathbb{R}^d)$ *avec* $\varphi$ *à support compact montrer que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_i \varphi \, \psi = - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, \partial_i \psi, \; i = 1, \dots, d.$$

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que $\Omega$ est un ouvert de classe $C^k$ s'il existe $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ tel que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \; : \; \Phi(x) < 0\}, \; \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \; : \; \Phi(x) = 0\} \tag{2.1}$$

et

$$\nabla \Phi(x) \neq 0, \; \forall x \in \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Pour tout $x \in \partial\Omega$, on définit alors la normale extérieure à $\partial\Omega$ en $x$ par

$$n(x) := \frac{\nabla \Phi(x)}{|\Phi(x)|}.$$

La mesure de surface $\sigma$ sur $\partial\Omega$ est alors construite de la manière suivante. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et $e_d := n(x_0)$, on identifie l'hyperplan $e_d^\perp$ à $\mathbb{R}^{d-1}$ et on note

$x \in \mathbb{R}^d$ sous la forme $x = (x', x_d)$ avec $x_d = x \cdot e_d$ et $x'$ les coordonnées de la projection orthogonale de $x$ dans une base orthonormée de $e_d^\perp$. On a alors $\partial_d \Phi(x_0) = \nabla\Phi(x_0) \cdot e_d = 1$ et donc il résulte du théorème de l'inversion locale qu'il existe $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $x_0$, $Q'$ un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ contenant $x_0'$ et $\varepsilon > 0$ tels que $x \mapsto (x', \Phi(x))$ soit un $C^1$-difféormorphisme de $U$ sur $Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. On note l'inverse de ce $C^1$-difféomorphisme sous la forme $(x', t) \in Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto (x', g(x', t))$ et $g_0(x') := g(x', 0)$ pour tout $x' \in Q'$, de sorte que l'on a

$$\Omega \cap U = \{(x', g(x', t)),\ x' \in Q',\ t \in (-\varepsilon, 0)\},\ \partial\Omega \cap U = \{(x', g_0(x')),\ x' \in Q'\}. \tag{2.3}$$

Pour $f \in C_c(U)$, on pose alors

$$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma(x) := \int_{Q'} f(x', g_0(x')) \sqrt{1 + |\nabla g_0(x')|^2} dx'. \tag{2.4}$$

Pour $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on recouvre $\partial\Omega \cap \text{supp}(f)$ par un nombre fini d'ouverts $U_j$ sur chacun desquels $\partial\Omega$ se représente comme un graphe sous la forme (2.3), et on note $\theta_j$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement par les $U_j$. Comme chaque terme $\theta_j f$ est à support dans $U_j$, on définit $\int_{\partial\Omega} \theta_j f d\sigma$ de manière analogue à (2.4), et on pose enfin

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \sum_j \int_{\partial\Omega} \theta_j f d\sigma.$$

A ce stade, le fait que cette définition ne dépende pas du choix des $U_j$, des paramétrisations locales $g_j$ et de la partition de l'unité n'est pas totalement clair. Cela résulte en particulier du résultat suivant :

**Lemme 2.5** *(Mesure de surface sur le bord d'un ouvert régulier comme dérivée d'une intégrale de volume) Soit $\Omega$ un ouvert de classe $C^1$, $\Phi$ et la mesure de surface $\sigma$ définies comme précédemment et $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a alors*

$$\int_{\partial\Omega} f(x) d\sigma(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx$$

*où*

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega\ :\ \Phi(x) > -\delta\}.$$

**Preuve:**

On peut supposer sans perte de généralité que $\text{supp}(f) \subset U$ où $U$ est un ouvert tel que $\partial\Omega \cap U$ et $\Omega \cap U$ soient de la forme donnée par (2.3). Pour

$\delta < \varepsilon$ on a alors $\Omega_\delta \cap U = \{(x', g(x',t)),\ x' \in Q',\ t \in (-\delta, 0)\}$. En notant que le Jacobien du changement de variables $(x',t) \mapsto (x', g(x',t))$ est $\partial_t g(x',t)$, il vient donc

$$\int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx = \int_{-\delta}^{0} \int_{Q'} |\nabla\Phi(x', g(x',t))| f(x', g(x',t)) |\partial_t g(x',t)| dx' dt. \tag{2.5}$$

Par construction on a $\Phi(x', g(x',t)) = t$, pour tout $(x',t) \in Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, en dérivant cette relation par rapport à $t$ et à $x'$ on a en particulier

$$\partial_d \Phi(x', g(x',t)) \partial_t g(x',t) = 1,\ \nabla_{x'} \Phi(x', g(x',t)) = -\partial_d \Phi(x', g(x',t)) \nabla_{x'} g(x',t). \tag{2.6}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi(x', g(x',t))|^2 &= |\partial_d \Phi(x', g(x',t))|^2 + |\nabla_{x'} \Phi(x', g(x',t))|^2 \\ &= |\partial_d \Phi(x', g(x',t))|^2 \left(1 + |\nabla_{x'} g(x',t)|^2\right) \\ &= \frac{1 + |\nabla_{x'} g(x',t)|^2}{|\partial_t g(x',t)|^2}. \end{aligned}$$

En substituant la relation précédente dans (2.5), il vient

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{0} \int_{Q'} f(x', g(x',t)) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} g(x',t)|^2} dx' dt.$$

On conclut aisément à partir de l'expression précédente, en utilisant les théorèmes de Fubini et de convergence dominée de Lebesgue. $\square$

On rappelle que la divergence d'un champ de vecteurs $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ est par définition donnée par

$$\operatorname{div}(\varphi(x)) := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_i(x) = \operatorname{tr}(D\varphi(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

**Théorème 2.1** *(Formule de Stokes) Soit $\Omega$ un ouvert de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi) = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot n(x) d\sigma(x)$$

**Preuve:**
Notons d'abord que si $\eta \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $\eta \equiv 1$ sur un voisinage de $\partial\Omega$ on a

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi) = \int_\Omega \operatorname{div}(\eta\varphi) = \int_\Omega \eta \operatorname{div}(\varphi) + \nabla\eta \cdot \varphi.$$

Soit maintenant pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, $\eta_{\varepsilon,\delta} = f_\delta(\varepsilon^{-1}\Phi)$ avec $f_\delta = \rho_{\delta/2} \star g_\delta$ et $g_\delta$ paire, à support dans $[-1,1]$, valant 1 sur $[-\delta,\delta]$ et affine entre $\delta$ et 1. On a donc

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi) = \int_\Omega \eta_{\varepsilon,\delta} \operatorname{div}(\varphi) + \nabla \eta_{\varepsilon,\delta} \cdot \varphi.$$

Le théorème de convergence dominée implique que le premier terme dans le membre de droite de l'égalité précédente tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0^+$ (et ce uniformément en $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$). Quant au second terme, il se réecrit sous la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\varepsilon(1+\delta/2)}} \dot{f}_\delta(\varepsilon^{-1}\Phi) \nabla \Phi \cdot \varphi.$$

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il est facile de voir que $\{\Phi = -\varepsilon\} \cap \operatorname{supp}(\varphi)$ est de mesure nulle, ainsi, pour un tel $\varepsilon$, en appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée, la quantité précédente converge quand $\delta \to 0^+$ vers

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \Phi \cdot \varphi.$$

En vertu du lemme 2.5, on a enfin

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \Phi \cdot \varphi = \int_{\partial\Omega} \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \cdot \varphi d\sigma = \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n d\sigma$$

ce qui achève la preuve.

□

Mentionnons maintenant quelques formules d'intégration par parties, corollaires immédiats de la formule de Stokes. Pour $u$ et $v$ dans $C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, et $i = 1, \ldots, d$, on a d'abord la formule d'intégration par parties

$$\int_\Omega u\, \partial_i v = -\int_\Omega \partial_i u\, v + \int_{\partial\Omega} uv\, n_i d\sigma. \tag{2.7}$$

Pour $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, en utilisant $\operatorname{div}(u\varphi) = u \operatorname{div}(\varphi) + \nabla u \cdot \varphi$, on obtient

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) = -\int_\Omega \nabla u \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} u\, \varphi \cdot n d\sigma. \tag{2.8}$$

En particulier, lorsque $\varphi = \nabla v$ avec $v \in C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, et en rappelant que $\Delta v := \operatorname{div}(\nabla v)$ et que $\partial v / \partial n := \nabla v \cdot n$, on obtient les formules de Green :

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u = -\int_\Omega \Delta v\, u + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma, \tag{2.9}$$

et

$$\int_\Omega \Delta v\, u = \int_\Omega \Delta u\, v + \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \tag{2.10}$$

## 2.2 Définitions et propriétés premières des distributions

**Définition 2.1** *On appelle distribution sur $\Omega$ toute forme linéaire continue sur l'espace des fonctions-test $\mathcal{D}(\Omega)$ (muni de sa topologie usuelle telle que définie au chapitre précédent) et l'on note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\Omega$.*

Pour $T$ forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on notera désormais $\langle T, \varphi\rangle$ plutôt que $T(\varphi)$.

Au risque de nous répéter, rappelons que les résultats du chapitre précédent, impliquent en particulier que si $T$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ on a les équivalences entre :

- $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ($T$ est une distribution sur $\Omega$),
- pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &\leq C\, p_{m,K}(\varphi) \\ &= C\ \sup\{|\partial^\alpha \varphi(x)|,\ x \in K,\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq m\}, \\ &\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ :\ \mathrm{supp}(\varphi) \subset K, \end{aligned}$$

- $T$ est séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ : i.e. si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (ce qui rappelons le signifie qu'il existe un compact $K$ tel que pour tout $n$, $\varphi_n$ et $\varphi$ soient à support dans $K$ et $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \varphi$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}^d$) alors $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.
- $T$ est séquentiellement continue en 0,
- pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction de $T$ à $\mathcal{D}_K(\Omega)$ est continue.

On munit $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topologie faible-$*$, i.e. de la topologie d'evtlcs associée à la famille de semi-normes $T \mapsto |\langle T, \varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dira qu'une suite $(T_n)_n$ de distributions sur $\Omega$ converge au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (ce que l'on notera simplement $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$) si $\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

**Exemples**

Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ alors $f$ définit une distribution $\{f\}$ via :

$$\langle \{f\}, \varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit $a \in \Omega$, on appelle masse de Dirac en $a$ et l'on note $\delta_a$ la distribution définie par $\langle \delta_a, \varphi\rangle := \varphi(a)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. De même pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi(a)$ est une distribution ; $\varphi \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^{(j)}(j)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$... On notera aussi que si $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille régularisante, alors $\{\rho_\varepsilon\} \to \delta_0$ quand $\varepsilon \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

(*Valeur principale de* $1/x$) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

admet une limite quand $\varepsilon \to 0$, que l'on note $\langle \mathrm{VP}(1/x), \varphi\rangle$ ; $\mathrm{VP}(1/x)$ est une distribution sur $\mathbb{R}$ appelée valeur principale de $1/x$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, les éléments de $\mathcal{E}'(\Omega)$ définissent (par restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$) des distributions sur $\Omega$ appelées distribution à support compact (cette terminologie sera justifiée ultérieurement). Rappelons ici qu'une forme linéaire $T$ sur $\mathcal{E}(\Omega)$ appartient à $\mathcal{E}'(\Omega)$ si et seulement s'il existe un compact $K$ de $\Omega$, $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C p_{m,K}(\varphi) = C \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

De la même manière, les éléments de $\mathcal{S}'$ (dual topologique de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$) sont des distributions sur $\mathbb{R}^d$ appelées distributions *tempérées* (cadre naturel comme nous le verrons plus loin pour la transformation de Fourier). Par définition même, une forme linéaire $T$ sur $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}'$ si et seulement s'il existe $m$ et $k$ dans $\mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi\rangle \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha|\leq m} (1 + |x|^k)|\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Par exemple $\mathrm{VP}(1/x)$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Enfin, pour $m \in \mathbb{N}$, les (restrictions à $\mathcal{D}(\Omega)$ des) éléments de $(C_c^m(\Omega))'$ sont appelées distributions d'ordre $m$ (les distributions d'ordre 0 étant appelées mesures de Radon sur $\Omega$, le terme "mesure" sera justifié et explicité au chapitre 6). Une forme linéaire $T$ sur $C_c^m(\Omega)$ (muni comme au chapitre 1 de sa topologie, limite inductive des $C_{K_j}^m(\Omega)$) est continue si pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $C \geq 0$ telle que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in K} \sup_{|\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in C_c^m(\Omega) \ : \ \mathrm{supp}(\varphi) \subset K.$$

**Lemme 2.6** *Soit* $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)^\mathbb{N}$, $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)^\mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *tels que* $\varphi_n \to \varphi$ *dans* $\mathcal{D}(\Omega)$ *et* $T_n \to T$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *alors* $\langle T_n, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$.

**Preuve:**

On écrit $\langle T_n, \varphi_n\rangle - \langle T, \varphi\rangle = \langle T_n - T, \varphi\rangle + \langle T_n, \varphi_n - \varphi\rangle$, le premier terme tend vers 0 par convergence de $T_n$ vers $T$ et le second aussi en vertu du Théorème de Banach-Steinhaus (sous la forme de la proposition 1.7). $\square$

**Lemme 2.7** *Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ alors $\{f\} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si $f = 0$ p.p.*

**Preuve:**
Supposons $\{f\} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $K$ un compact de $\Omega$. Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < d(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ et $f_\varepsilon := \rho_\varepsilon \star (\mathbf{1}_K f/(|f|+\varepsilon))$. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en passant à la limite dans $\langle \{f\}, f_\varepsilon \rangle = 0$ on obtient $\int_K |f| = 0$.
$\square$

**Définition 2.2** *Soit $U$ un ouvert inclus dans $\Omega$, $x_0 \in \Omega$ et $T_1$ et $T_2$ deux distributions sur $\Omega$. On dit que $T_1 = T_2$ sur $U$ si $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que* $\text{supp}(\varphi) \subset U$*. On dit que $T_1$ et $T_2$ sont égales au voisinage de $x_0$ s'il existe un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\Omega$ sur lequel $T_1 = T_2$.*

On a alors :

**Lemme 2.8** *Soit $T_1$ et $T_2$ deux distributions sur $\Omega$. Si $T_1$ et $T_2$ sont égales au voisinage de tout point de $\Omega$ alors $T_1 = T_2$.*

**Preuve:**
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $K := \text{supp}(\varphi)$. Il existe alors un nombre fini d'ouverts $U_1, ..., U_k$ de $\Omega$ recouvrant $K$ et tels que $T_1 = T_2$ sur chacun des $U_i$. Soit $\theta_i$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de $K$ par les $U_i$, on a alors

$$\langle T_1 - T_2, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle T_1 - T_2, \theta_i \varphi \rangle$$

et chacun des termes de la somme précédente est nul car $\theta_i \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\text{supp}(\theta_i \varphi) \subset U_i$. $\square$

La réunion de tous les ouverts sur lesquels une distribution est nulle est ainsi le plus grand ouvert sur lequel cette distribution est nulle. Le support d'une distribution est alors défini comme suit

**Définition 2.3** *(*Support d'une distribution*) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on appelle support de $T$ et l'on note* $\text{supp}(T)$ *le complémentaire dans $\Omega$ du plus grand ouvert sur lequel $T$ est nulle. On dit que $T$ est à support compact si son support est compact.*

**Exemples** Si $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\text{supp}\{f\}$ est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f = 0$ p.p, $\text{supp}(\delta_a) = \{a\}$, sur $\mathbb{R}$, $\text{supp}(\text{VP}(1/x) = \mathbb{R}$...

Le résultat suivant permet d'identifier l'ensemble des distributions à support compact à $\mathcal{E}'(\Omega)(= \cup_m (C^m(\Omega)'))$ :

**Proposition 2.1** *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ alors la restriction de $T$ à $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution à support compact. Réciproquement si $T$ est une distribution à support compact, alors $T$ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$.*

**Preuve:**
Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ alors il existe un compact $K \subset \Omega$, $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$$

ce qui implique évidemment que $\text{supp}(T) \subset K$.

Réciproquement, soit $T$ une distribution à support compact $\text{supp}(T) := K$. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction plateau valant 1 sur un voisinage de $K$. Pour $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, posons alors

$$\left\langle \widetilde{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \psi\varphi \rangle .$$

En utilisant la formule de Leibniz, il est facile de voir que $\widetilde{T} \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et par construction, $\widetilde{T}$ prolonge $T$ à $\mathcal{E}(\Omega)$. Pour montrer l'unicité de ce prolongement, il suffit de remarquer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$ (troncature par multiplication par fonction plateau). □

Passons maintenant à la notion d'ordre d'une distribution :

**Définition 2.4** (Distributions d'ordre fini) *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $m \in \mathbb{N}$, on dit que $T$ est une distribution d'ordre $\leq m$ si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C$ telle que*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \ \text{supp}(\varphi) \subset K.$$

Il est clair à partir de la définition précédente que $T$ est une distribution d'ordre $\leq m$ si et seulement si $T$ se prolonge continûment à $C_c^m(\Omega)$ qu'on identifie souvent l'espace des distributions d'ordre $\leq m$ à $(C_c^m(\Omega))'$. Rappelons aussi que l'espace des distributions d'ordre 0 (identifié à $(C_c^0(\Omega))'$) est l'espace des mesures de Radon sur $\Omega$. Par définition, les distributions d'ordre fini sont les distributions d'ordre $\leq m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Enfin, on dit qu'une distribution est d'ordre $m$ si elle est d'ordre $\leq m$ mais n'est pas d'ordre $\leq m-1$.

On déduit immédiatement de la proposition 2.1 le résultat suivant :

**Proposition 2.2** *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

**Exemples** Si $f \in L^1_{\text{loc}}$ alors $\{f\}$ est d'ordre 0, de même que $\delta_a$. Sur $\mathbb{R}$, $\text{VP}(1/x)$ est d'ordre 1, et $\varphi \mapsto \sum_j \varphi^{(j)}(j)$ est d'ordre infini.

Soit $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$, alors l'application "multiplication par $\psi$" :

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \psi\varphi$$

est un endomorphisme continu de $\mathcal{D}(\Omega)$. On peut donc définir la multiplication d'une distribution et d'une fonction $C^\infty$ par transposition comme suit :

**Définition 2.5** *Soit $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on appelle produit de $T$ et $\psi$ et l'on note $\psi T$ la distribution définie par :*

$$\langle \psi T, \varphi \rangle := \langle T, \psi\varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On remarque que pour $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on a $\text{supp}(\psi T) \subset \text{supp}(\psi) \cap \text{supp}(T)$. En considérant une suite de fonction-plateaux $\eta_n$ et $T_n = \eta_n T$, il est facile de voir que $T_n$ est une suite de distributions à support compact convergeant vers $T$. Ainsi $\mathcal{E}'(\Omega)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

La dérivation des distributions se définit aussi par transposition :

**Définition 2.6** (Dérivées d'une distribution) *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on définit la distribution $\partial^\alpha T$ par :*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il résulte de la définition précédente que si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $\partial^\alpha T \to \partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On notera $\partial_i T$ les dérivées partielles premières de $T$, $\nabla T = (\partial_1 T, ..., \partial_d T)$. Notons également que si $T$ est d'ordre $\leq m$ alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre $\leq |\alpha| + m$.

L'intérêt de la définition précédente est évident : il permet de dériver les distributions et donc en particulier les fonctions de $L^1_{\text{loc}}$, les mesures etc.... Evidemment si $T = \{f\}$ avec $f \in C^1(\Omega)$ alors $\partial_i\{f\} = \{\partial_i f\}$ autrement dit les dérivées partielles au sens des distributions et au sens classique coïncident dans ce cas. Il convient de retenir que l'idée dans la définition précédente est de faire porter les dérivées sur les fonctions-test (nous retrouverons cette idée quand nous verrons la formulation variationnelle de certains problèmes aux limites). On peut ainsi chercher à résoudre des EDP's linéaires dans un espace beaucoup plus gros (et donc dans lequel on a plus de chance d'effectivement trouver des solutions) que l'espace des fonctions pour lesquelles les dérivées intervenant dans l'équation ont un sens classique.

**Exemples** Soit $H$ la fonction de Heaviside : $H(x) = 0$ pour $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour $x \geq 0$, un calcul immédiat donne $\{H\}' = \delta_0$. De même la dérivée de $\{|x|\}$ est la fonction signe.

**Exercice 2.3** *Montrer que* $x \mapsto \log(|x|)$ *est une distribution tempérée sur* $\mathbb{R}$ *et que sa dérivée est* $\mathrm{VP}(1/x)$*. Pour* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *on pose :*

$$\left\langle \mathrm{PF}(\frac{1}{x^2}), \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$$

*montrer que* $\mathrm{PF}(\frac{1}{x^2})$ *est une distribution (appelée partie dinie de* $1/x^2$*) et que c'est la dérivée de* $\mathrm{VP}(\frac{1}{x})$*. Donner une formule générale pour la dérivée d'une fonction* $C^1$ *par morceaux d'une variable.*

On remarquera que $\mathrm{supp}(\partial^\alpha T) \subset \mathrm{supp}(T)$ et qu'évidemment le théorème de Schwarz se transpose aux distributions : $\partial_i(\partial_j T) = \partial_j(\partial_j T)$. De même la formule de Leibniz se transpose immédiatement au produit $\psi T$ avec $\psi \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ :

$$\partial^\alpha(\psi T) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha - \beta} \psi \; \partial^\beta T.$$

On définit alors les espaces de Sobolev (que nous étudierons plus en détail au chapitre **??**) de la manière suivante :

**Définition 2.7** *Soit* $p \in [1, +\infty]$*, on définit l'espace de Sobolev d'ordre* 1 *:*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \; : \; \partial_i\{f\} \in L^p, \; \forall i \in \{1, ..., d\}\}$$

*pour* $m \in \mathbb{N}$*,* $m \geq 1$*, on définit l'espace de Sobolev d'ordre* $m$

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \; : \; \partial^\alpha\{f\} \in L^p, \; \forall \alpha \; : \; |\alpha| \leq m\}.$$

**Exercice 2.4** *Soit* $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *une distribution à support compact d'ordre* $\leq m$ *et* $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ *telle que* $\partial^\alpha \varphi = 0$ *sur* $\mathrm{supp}(T)$ *pour tout* $|\alpha| \leq m$*. Montrer que* $\langle T, \varphi \rangle = 0$*.*

**Exercice 2.5** *L'objectif de cet exercice est de montrer que toute distribution à support dans* $\{x\}$ *est combinaison linéaire de* $\delta_x$ *et ses dérivées (utiliser l'exercice précédent et un développement de Taylor).*

## 2.3 Convolution et régularisation

Dans ce paragraphe, sauf mention explicite du contraire nous nous placerons dans le cas de l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier et ce afin de ne pas avoir à discuter des questions (parfois plus subtiles qu'il n'y parait) des domaines de définition. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on définit $\check{\varphi}$ par $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on définit alors $\check{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ (symétrique de $T$) par

$$\left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Evidemment la définition précédente fait aussi sens sur un ouvert symétrique $\Omega$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on note $\tau_h \varphi$ la translatée de $\varphi$ définie par $\tau_h\varphi(x) := \varphi(x+h)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ on définit alors la distribution translatée $\tau_h T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \tau_h T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle \,,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

**Lemme 2.9** *Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N)$ telle que tout $r > 0$ il existe $M(r) > 0$ tel que* $\operatorname{supp}(\varphi(.,y)) \subset \overline{B}_d(M(r))$ *pour tout $y \in \overline{B}_N(r)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. L'application $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \langle T, \varphi(.,y) \rangle$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$ et l'on a*

$$\partial^\alpha(\langle T, \varphi(.,y) \rangle) = \left\langle T, \partial_y^\alpha \varphi(.,y) \right\rangle \,,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

**Preuve:**
Posons pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ $G(y) := \langle T, \varphi(.,y) \rangle$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R} \neq 0$, on a alors $t^{-1}(G(y+th) - G(y)) = \langle T, t^{-1}(\varphi(.,y+th) - \varphi(.,y)) \rangle$. On montre aisément sous les hypothèses précédentes que $t^{-1}(\varphi(.,y+th)-\varphi(.,y))$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vers $\nabla_y \varphi(.,y) \cdot h$ de sorte que $G$ est Gâteaux dérivable avec $G'(y)(h) = \langle T, \nabla_y \varphi(.,y) \cdot h \rangle$. Comme $y \mapsto \nabla_y \varphi(.,y)$ est continue de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que $G$ est de classe $C^1$ et $\nabla G(y) = \langle T, \nabla_y \varphi(.,y) \rangle$. En itérant l'argument précédent, on obtient que $G$ est de classe $C^\infty$ et

$$\partial^\alpha G(y) = \left\langle T, \partial_y^\alpha \varphi(.,y) \right\rangle \,,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

□

**Lemme 2.10** (Lemme fondamental du calcul intégral) *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$\langle T, \tau_x \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \langle T, \tau_{tx} \nabla \varphi \cdot x \rangle \, dt.$$

**Preuve:**
Posons pour tout $t \in [0,1]$ $g(t) := \langle T, \tau_{tx}\varphi\rangle$. Soit $t \in (0,1)$ et $h \neq 0$ tel que $t+h \in (0,1)$ on a alors $h^{-1}(g(t+h)-g(t)) = \langle T, \psi_h\rangle$ avec $\psi_h = h^{-1}(\tau_{(t+h)x}\varphi - \tau_{tx}\varphi)$ et il est facile de voir que $\psi_h \to \tau_{tx}\nabla\varphi\cdot x$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ quand $h \to 0$ de sorte que $g$ est dérivable (et même de classe $C^\infty$) avec $g'(t) = \langle T, \tau_{tx}\nabla\varphi\cdot x\rangle$. Ainsi

$$\langle T, \tau_x\varphi\rangle - \langle T, \varphi\rangle = g(1)-g(0) = \int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 \langle T, \tau_{tx}\nabla\varphi\cdot x\rangle\, dt.$$

□

On cherche maintenant à définir la convolution d'une distribution et d'une fonction-test et ce, évidemment de manière à étendre la convolution des fonctions telle que définie au début de ce chapitre. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}$ pour $g \in \mathcal{D}$, $f\star g$ est la fonction $C^\infty$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par :

$$(f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy = \langle\{f\}, \tau_x\check{g}\rangle\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Une première stratégie pour définir $T\star g$ (avec $T \in \mathcal{D}'$ et $g \in \mathcal{D}$) est donc de considérer $(T\star g)$ comme la fonction $x \mapsto \langle T, \tau_x\check{g}\rangle$ (qui, en vertu du lemme 2.9 est $C^\infty$). Revenant au cas $f \in L^1_{\text{loc}}$, on peut aussi considérer $f\star g$ comme une distribution c'est à dire à partir de son action sur les fonctions-test $\varphi \in \mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned}\langle\{f\star g\}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dydx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\check{g}(y-x)dxdy = \langle\{f\}, \check{g}\star\varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Ce qui suggère une deuxième stratégie pour définir $T\star g$ comme une distribution. Nous verrons un peu plus loin qu'en fait ces deux points de vue coïncident.

**Définition 2.8** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On définit la convolée de $T$ et de $g$ en tant que fonction $C^\infty$ (i.e. $(T\star_1 g) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$) par :*

$$(T\star_1 g)(x) := \langle T, \tau_x\check{g}\rangle\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

*On définit la convolée de $T$ et de $g$ en tant que distribution (i.e. $(T\star_2 g) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$) par :*

$$\langle(T\star_2 g), \varphi\rangle := \langle T, \check{g}\star\varphi\rangle\,,\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

En posant $G := \mathbb{Z}^d$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ à coordonnées entières, un exercice standard sur les sommes de Riemann, laissé au lecteur, donne

**Lemme 2.11** *Soit $F \in C_c(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, et soit*

$$f(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx,\ f_\varepsilon(y) := \varepsilon^d \sum_{x \in G} F(\varepsilon x, y),\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^d$$

*alors $f_\varepsilon$ converge uniformément vers $f$.*

Pour $g$ et $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on déduit facilement du lemme précédent que

$$\varepsilon^d \sum_{x \in G} \tau_{\varepsilon x}\ \check{g}\ \varphi(\varepsilon x) \to \check{g} \star \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \tag{2.11}$$

quand $\varepsilon \to 0$. Ceci permet de conclure que les deux notions de convolution définies plus haut coïncident :

**Lemme 2.12** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\{T \star_1 g\} = T \star_2 g$.*

**Preuve:**
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a d'abord

$$\langle \{T \star_1 g\}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, \tau_x \check{g}\rangle\, \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^d \sum_{x \in G} \langle T, \tau_{\varepsilon x}\check{g}\rangle\, \varphi(\varepsilon x).$$

Par continuité et linéarité de $T$, on a ensuite en utilisant (2.11) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\langle T, \sum_{x \in G} \varepsilon^d \tau_{\varepsilon x}\check{g}\ \varphi(\varepsilon x)\right\rangle = \langle T, \check{g} \star \varphi\rangle = \langle T \star_2 g, \varphi\rangle\,.$$

□

Evidemment par la suite, nous noterons la convolution de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ simplement sous la forme $T \star g$.

**Lemme 2.13** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a alors*

$$\partial^\alpha (T \star g) = \partial^\alpha T \star g = T \star \partial^\alpha g.$$

**Preuve:**
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \partial^\alpha (T \star g), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \check{g} \star \partial^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha (\check{g} \star \varphi)\rangle = \langle \partial^\alpha T \star g, \varphi\rangle\,.$$

et donc $\partial^\alpha (T \star g) = \partial^\alpha T \star g$. Pour l'autre identité, on remarque que $\partial^{\check{\alpha}} g = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \check{g}$ et donc

$$\langle \partial^\alpha (T \star g), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \check{g} \star \varphi)\rangle = \left\langle T, \partial^{\check{\alpha}} g \star \varphi\right\rangle = \langle T \star \partial^\alpha g, \varphi\rangle\,.$$

□

**Lemme 2.14** *Soit* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$*,* $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^d$*, on a alors*

$$\mathrm{supp}(T \star g) \subset \mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(g).$$

**Preuve:**
Soit $\omega$ un ouvert inclus dans $\mathbb{R}^d \setminus (\mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(g))$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{supp}(\varphi)$ ; il s'agit de montrer que $\langle T \star g, \varphi \rangle = 0$. Or $\langle T \star g, \varphi \rangle = \langle T, \check{g} \star \varphi \rangle$ et $\mathrm{supp}(\check{g} \star \varphi) \subset \omega - \mathrm{supp}(g) \subset \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{supp}(T)$ et donc $\langle T \star g, \varphi \rangle = 0$.
□

Le lemme précédent montre que si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ alors $S \star g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ce qui permet de définir le produit de convolution de deux distributions dont l'une est à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle T \star S, \varphi \rangle = \left\langle T, \check{S} \star \varphi \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

On a alors $\mathcal{E}' \star \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}'$ et $\mathcal{E}' \star \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$. Notons aussi que $T \star \delta_0 = T$ pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. En utilisant le fait que $\mathcal{S} \star \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ et en définissant pour $T \in \mathcal{S}'$ et $g \in \mathcal{S}$ la convolution de $T \star g$ comme précédemment (i.e. $\langle T \star g, \varphi \rangle = \langle T, \check{g} \star \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$) il est facile de voir qu'en fait cette définition coïncide avec la convolution de $T$ et $g$ en tant que fonction ($(T \star g(x)) := \langle T, \tau_x \hat{g} \rangle$ pour tout $x$) et que $T \star g \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{E}$. Enfin, pour $m \in M_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ la convolution de $m$ et $\varphi$ est la fonction continue définie par :

$$(m \star \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) dm(y).$$

**Lemme 2.15** *Soit* $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *et* $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ *une famille régularisante alors* $T \star \rho_\varepsilon$ *converge vers* $T$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *quand* $\varepsilon \to 0^+$*.*

**Preuve:**
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle T \star \rho_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle T, \check{\rho}_\varepsilon \star \varphi \rangle$$

et on conclut en utilisant le fait que $\check{\rho}_\varepsilon \star \varphi$ converge vers $\varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. □

Comme $T \star \rho_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, on déduit du lemme précédent que $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Par des argument classiques de troncature, on en déduit le résultat de densité suivant :

**Théorème 2.2** *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *alors* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est séquentiellement dense dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

**Preuve:**
Soit $K_n$ une suite exhaustive de compacts de $\Omega$, $\eta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\mathrm{supp}(\eta_n) \subset K_{n+1}$ et $\eta_n \equiv 1$ sur $K_n$ et soit $\rho_n$ une suite régularisante telle qu'en outre $\mathrm{supp}(\rho_n) + K_{n+1} \subset \Omega$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $T_n := (\eta_n T) \star \rho_n$, on a alors $T_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T_n$ converge vers $T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. □

**Lemme 2.16** (Lemme de Dubois-Reymond) *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\nabla T$ soit une fonction continue alors $T$ est une fonction de classe $C^1$ et ses dérivées premières au sens des distributions et au sens classique coïncident.*

**Preuve:**
Notons $\nabla T = \{G\}$ (avec $G$ continue sur $\Omega$). Soit $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r) \subset \Omega$, soit $r_0 \in (0, r)$ et $\varepsilon \in (0, r - r_0)$. On peut alors définir $T_\varepsilon := \rho_\varepsilon \star T$ à la fois comme distribution sur $B(x_0, r_0)$ (étant entendu que l'on prolonge par 0 en dehors de $B(x_0, r_0)$ les fonctions-test de $\mathcal{D}(B(x_0, r_0))$) et comme fonction $C^\infty$ sur $B(x_0, r_0)$. En particulier sur $B(x_0, r_0)$, on a $\nabla T_\varepsilon = G_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star G$, de sorte que pour tout $x, y$ dans $\overline{B}(x_0, r_0)$, on a :

$$T_\varepsilon(y) - T_\varepsilon(x) = \int_0^1 G_\varepsilon(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dt. \tag{2.12}$$

Comme $r_0 + \varepsilon < r$, et $G$ est bornée sur $\overline{B}(x_0, r)$, on a aussi

$$\sup_{\overline{B}(x_0, r_0)} |G_\varepsilon| \le \sup_{\overline{B}(x_0, r)} |G| := K < +\infty. \tag{2.13}$$

On déduit de (2.14) et (2.13) que $T_\varepsilon$ est une famille équilipschitzienne sur $\overline{B}(x_0, r_0)$. Comme $T_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{D}'(B(x_0, r_0))$ il est facile d'en déduire que $T_\varepsilon$ est uniformément bornée sur $\overline{B}(x_0, r_0)$ (sans quoi il existerait une sous suite qui convergerait uniformément vers $+\infty$ ou $-\infty$ ce qui est incompatible avec la convergence des intégrales $\int_{B(x_0, r_0)} T_\varepsilon \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, r_0))$). On déduit donc du théorème d'Ascoli qu'il existe une suite $\varepsilon_n$ tendant vers 0 telle que $T_n := T_{\varepsilon_n}$ converge uniformément sur $\overline{B}(x_0, r_0)$ vers une fonction continue $f$. On a évidemment $\langle \{f\}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(x_0, r_0)$ de sorte que $T$ coïncide avec une fonction continue sur $B(x_0, r_0)$. Enfin, en passant à la limite dans (2.14), on obtient que pour tout $x, y$ dans $\overline{B}(x_0, r_0)$, on a :

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 G(x + t(y - x)) \cdot (y - x) dt \tag{2.14}$$

de sorte que $f$ est de classe $C^1$ et $\nabla f = G$ sur $B(x_0, r_0)$. Le résultat cherché étant de nature locale, sa preuve en est achevée.
□

Comme corollaire immédiat du résultat précédent, on a :

**Lemme 2.17** *Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\nabla T = 0$ alors il existe une constante $C$ telle que $T = \{C\}$.*

**Exercice 2.6** *Montrer que $\mathcal{S}$ ne possède pas d'élément neutre pour $\star$.*

## 2.4 Transformation de Fourier

**Définition 2.9** *Soit $f \in L^1 := L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de $f$ est la fonction notée $\hat{f}$ (ou $\mathcal{F}(f)$) définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ par*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Dans la définition précédente, $x \cdot \xi$ est le produit scalaire usuel de $x$ et $\xi$. On rencontre dans la littérature un certain nombre d'autres définitions de la transformée de Fourier, consistant par exemple à considérer $e^{-2i\pi x\cdot\xi}$ plutôt que $e^{-ix\cdot\xi}$ dans la définition précédente, ou encore à diviser l'expression de $\mathcal{F}(f)$ donnée ci-dessus par $(2\pi)^d$ ou $(2\pi)^{d/2}$... Il s'agit là d'une affaire de convention ou de commodité d'écriture sans grande importance.

En notant $C_0 = C_0(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ tendant vers 0 à l'infini, on a alors :

**Lemme 2.18** *Pour tout $f \in L^1$, on a $\hat{f} \in C^0$ et*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

**Preuve:**
La continuité de $\hat{f}$ découle immédiatement du théorème de convergence dominée de Lebesgue et l'estimation uniforme est évidente. Seul le fait que $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini (c'est le lemme de Riemann-Lebesgue) est réellement à démontrer. Un calcul immédiat donne le résultat dans le cas où $f$ est l'indicatrice d'un pavé, on conclut le cas général par densité des combinaisons linéaires de telles indicatrices dans $C_c$ puis par densité de $C_c$ dans $L^1$.
$\square$

Notons que pour $f \in L^1$, on n'a pas en général $\hat{f} \in L^1$. En effet, si $f$ est l'indicatrice de $[-a, a]^d$, un calcul immédiat donne

$$\hat{f}(\xi) = 2^d \Pi_{j=1}^d \frac{\sin(\xi_j a)}{\xi_j}$$

qui n'est pas intégrable.

Un changement de variable et le théorème de Fubini impliquent immédiatement que si $f$ et $g$ sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ on a l'identité :

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g). \tag{2.15}$$

**Lemme 2.19** *(Dérivation et transformée de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(f)$ admet une dérivée partielle par rapport à $\xi_j$ et*

$$\mathcal{F}(\xi_j f) = i\partial_j \mathcal{F}(f).$$

*Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(\partial_j f) = i\xi_j \mathcal{F}(f)$.*

**Preuve:**
Le premier point découle simplement du théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe somme. Pour le second point, on raisonne par approximation et on se contente de montrer le résultat pour $f \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, dans ce cas en effectuant une intégration par parties on a

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} \partial_j f(x) dx = i\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x) dx.$$

□

**Lemme 2.20** *(Transformée de Fourier de la gaussienne) Soit $\theta > 0$ et $f_\theta(x) := e^{-|x|^2/(2\theta)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, alors on a*

$$\hat{f}_\theta(\xi) = (2\pi\theta)^{d/2} e^{-\frac{\theta|\xi|^2}{2}},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

**Preuve:**
Par produit et un argument d'homogénéité, il suffit de démontrer le résultat pour $d = 1$ et $\theta = 1$, dans ce cas on considère l'équation différentielle ordinaire linéaire :

$$g'(x) + xg(x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

dont les solutions sont de la forme $Cf_1$. En utilisant le lemme 2.19 on a

$$0 = \mathcal{F}(f_1' + xf_1) = i(\xi\mathcal{F}(f_1) + \mathcal{F}(f_1)')$$

ainsi $\mathcal{F}(f_1)$ résout (2.16) et donc est de la forme $Ce^{-\xi^2/2}$ on conclut en notant que

$$C = \hat{f}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} f_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

□

**Lemme 2.21** *Soit $f$ et $g$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(x+\xi)d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

*et donc en particulier*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi.$$

**Preuve:**
Comme $(y,\xi) \to g(y)f(\xi) \in L^1$, on appliquant le théorème de Fubini on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)f(\xi)d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}g(y)dy\right)f(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi}f(\xi)d\xi\right)g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(y-x)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)g(x+\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

□

**Théorème 2.3** *(Inversion de la transformation de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a alors*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^d$$

*si bien qu'en particulier $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.*

**Preuve:**
Pour $\varepsilon > 0$, soit $g_\varepsilon(x) := e^{-\frac{\varepsilon^2|x|^2}{2}}$, avec les lemmes 2.21 et 2.20, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}}d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d}\hat{g}_\varepsilon(\xi)f(x+\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\varepsilon^{-d}e^{-\frac{|\xi|^2}{2\varepsilon^2}}f(x+\xi)d\xi \\
&= (2\pi)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\frac{|y|^2}{2}}f(x+\varepsilon y)dy.
\end{aligned}$$

Comme $\hat{f} \in L^1$, il découle du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)e^{-\frac{\varepsilon^2|\xi|^2}{2}}d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Par ailleurs, il est facile de voir (en procédant par approximation comme au lemme 2.3) que

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y|^2}{2}} f(x+\varepsilon y)dy$$

converge dans $L^1$ vers $(2\pi)^{d/2} f$ quand $\varepsilon \to 0^+$, ce qui achève la preuve. $\square$

On notera aussi que que la formule d'inversion de la transformée de Fourier peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = (2\pi)^d \check{f},\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)\ :\ \mathcal{F}(f) \in L^1.$$

avec $\check{f}(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

On rappelle que l'espace de Schwartz est défini par :

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) :\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|^k)|\partial^\beta f(x)| < \infty, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

On munit, comme au chapitre 1, $\mathcal{S}$ de la famille de semi normes

$$f \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|^k)|\partial^\beta f(x)|,\ k \in \mathbb{N},\ \beta \in \mathbb{N}^d\}.$$

Il est facile de voir que les applications suivantes sont des endomorphismes continus de $\mathcal{S}$ :

$$f \mapsto \partial^\beta f\ (\beta \in \mathbb{N}^d),\ f \mapsto x^\alpha f\ (\alpha \in \mathbb{N}^d),$$
$$f \mapsto \psi f\ (\psi \in \mathcal{S}),\ f \mapsto (1+|x|^2)^s f\ (s \in \mathbb{R}).$$

Il résulte du lemme 2.19 que la transformée de Fourier d'un élément de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est encore dans $\mathcal{S}$ et que pour tout $f \in \mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a :

$$\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}(f),\ \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(f). \tag{2.17}$$

Autrement dit, $\mathcal{F}$ échange la dérivation $\partial^\alpha$ et la multiplication par $\xi^\alpha$. Par ailleurs il est facile de voir que $\mathcal{F}$ est un automorphisme continu de $\mathcal{S}$ et il découle du théorème 2.3 que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = (2\pi)^d \check{f},\ \forall f \in \mathcal{S}.$$

**Proposition 2.3** *(Formule de Parseval) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $g \in L^1$, alors on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}\bar{\hat{g}}.$$

*(Formule de Plancherel) En particulier, pour tout $f \in \mathcal{S}$ on a*

$$\|f\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d}\|\hat{f}\|_{L^2}^2.$$

**Preuve:**
En utilisant le lemme 2.21 et la formule d'inversion de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}(\bar{g}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(-\xi)\hat{\bar{g}}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f}(\xi)\hat{\bar{g}}(-\xi)d\xi$$

et on conclut en remarquant que $\hat{\bar{g}}(-\xi) = \bar{\hat{g}}(\xi)$.
□

La formule de Plancherel permet de prolonger la transformée de Fourier à $L^2$. En effet, en notant $J$ l'injection (continue et dense) de $\mathcal{S}$ dans $L^2$, on a

$$\|(J \circ \mathcal{F})(f)\|_{L^2} = (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2},\ \forall f \in \mathcal{S}$$

de sorte que $J \circ \mathcal{F}$ est une application linéaire de $\mathcal{S}$ munie de la topologie trace de $L^2$ dans $L^2$. Par densité de $\mathcal{S}$ dans $L^2$, $J \circ \mathcal{F}$ admet un unique prolongement linéaire continu à $L^2$, que l'on notera encore $\mathcal{F}$ (ou $\hat{f}$ avec $f \in L^2$) et qu'on appelle transformée de Fourier dans $L^2$. Pour $f \in L^2 \cap L^1$, $\mathcal{F}(f)$ est évidemment défini par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

mais cette formule intégrale n'a pas de sens si $f$ est seulement $L^2$, dans ce cas $\mathcal{F}(f)$ est la limite dans $L^2$ de $\mathcal{F}(f_n)$ avec $(f_n)$ suite de $\mathcal{S}$ convergeant dans $L^2$ vers $f$. Par prolongement/densité, on obtient immédiatement que la transformée de Fourier dans $L^2$ hérite des propriétés suivantes :

**Proposition 2.4** *$\mathcal{F}$ est un automorphisme bicontinu de $L^2$ et l'on a la formule d'inversion :*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(f) = (2\pi)^d \check{f},\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

*Pour tous $f$ et $g$ dans $L^2$ on a*

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = (2\pi)^{-d}\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle_{L^2}\ \textit{(avec } \langle f, g\rangle_{L^2} = \textstyle\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g}\textit{)}$$

*et donc en particulier*

$$\|f\|_{L^2} = (2\pi)^{-d/2}\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2}.$$

Nous avons vu que la transformée de Fourier est un automorphisme bicontinu de $\mathcal{S}$, la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'$ est donc définie par transposition comme suit :

**Définition 2.10** *Soit $T \in \mathcal{S}'$ on appelle transformée de Fourier et l'on note $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ la distribution tempérée définie par*

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

On vérifie sans peine les propriétés suivantes de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$ :

**Proposition 2.5** *$\mathcal{F}$ est un automorphisme (faiblement) bicontinu de $\mathcal{S}'$ et l'on a la formule d'inversion :*

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = (2\pi)^d \check{T}, \ \forall T \in \mathcal{S}'$$

*(avec $\left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$). Pour tout $T \in \mathcal{S}'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a :*

$$\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}(T), \ \mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(T).$$

Evidemment si $T \in L^1$ les transformées de Fourier dans $L^1$ et dans $\mathcal{S}'$ coïncident. Plus généralement si $T$ est une mesure bornée, sa transformée de Fourier est définie par

$$\hat{T}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} dT(x), \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

et l'on vérifie sans peine que $\hat{T} \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et que pour $T$ mesure bornée, la définition précédente coïncide avec $\mathcal{F}(T)$ au sens de $\mathcal{S}'$. Un calcul immédiat donne en particulier $\hat{\delta_0} = 1$ ce qui montre que la transformée de Fourier d'une mesure n'est généralement pas dans $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Nous avons vu que le fait que la transformée de Fourier d'une fonction possède des moments finis se traduit en terme de dérivabilité. On peut donc (dans un cadre $L^2$) définir des dérivées fractionnaires par transformée de Fourier, c'est ce qui motive la définition suivante. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev $H^s = H^s(\mathbb{R}^d)$ par

$$H^s := \{u \in \mathcal{S}' \ : \ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2\}$$

on vérifie sans peine que $H^s$ est un espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi))} \left(1 + |\xi|^2\right)^s d\xi$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^s} := \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_{L^2} = \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s d\xi\right]^{1/2}.$$

On a évidemment que $H^0 = L^2$ et pour $s \in \mathbb{N}$ on vérifie sans peine que $H^s$ défini précédemment coïncide avec l'espace de Sobolev $W^{s,2}$

$$H^s = W^{s,2} = \{f \in L^2 \ : \ \partial^\alpha f \in L^2, \ \forall \alpha : \ |\alpha| \leq s\}.$$

Pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ on définit

$$\begin{aligned}(I-\Delta)^{t/2} : H^{s+t} &\to H^s \\ T &\mapsto \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{T})\end{aligned}$$

Pour $T \in H^{s+t}$ on a alors par définition :

$$\|(I-\Delta)^{t/2}T\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{(s+t)/2}\hat{T}\|_{L^2} = \|T\|_{H^{s+t}}$$

de sorte que $(I-\Delta)^{t/2}$ est une isométrie linéaire de $H^{s+t}$ dans $H^s$ pour tout $s$ (et donc en particulier de $H^t$ sur $L^2$). On vérifie immédiatement que l'inverse de $(I-\Delta)^{s/2}$ est $(I-\Delta)^{-s/2}$.

**Exercice 2.7** *Montrer que pour $s > d/2$, $H^s \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue.*

**Exercice 2.8** *Montrer que $\delta_0 \in H^s$ dès que $s < -d/2$. Montrer que l'injection de $H^s$ dans $\mathcal{S}'$ est continue et dense. Soit $s_1 \geq s_2$ montrer que l'injection de $H^{s_1}$ dans $H^{s_2}$ est continue.*

**Exercice 2.9** *Montrer que si $u \in H^s$ et $f \in \mathcal{S}$ alors $uf \in H^s$. Montrer que si $u \in H^s$ alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$. Montrer que $\mathcal{E}' \subset \cup_s H^s$ et $\cap_s H^s \subset \mathcal{E}$.*

**Exercice 2.10** *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ montrer que $T \in H_{-m}$ si et seulement $T = \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha T_\alpha$ pour des $T_\alpha$ dans $L^2$.*

## 2.5 Solution fondamentale du Laplacien

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment ce que nous avons vu dans ce chapitre (convolution et transformée de Fourier notamment) permet de résoudre quelques EDP's linéaires "modèle".

**Théorème 2.4** *Soit $d$ un entier $d \geq 3$ et*

$$f(x) := \frac{1}{|x|^{d-2}}, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

*alors on a*

$$-\Delta f = (d-2) s_d \delta_0 \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

*avec $s_d$ la mesure superficielle de la sphère unité $S^{d-1}$ ($s_d = d|\omega_d|$ avec $\omega_d$ la mesure de Lebesgue de la boule unité). Pour $d = 2$, soit*

$$g(x) := \ln(|x|),\ \forall x \in \mathbb{R}^2$$

*alors on a*

$$-\Delta g = 2\pi \delta_0 \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

**Preuve:**
On se contentera ici de démontrer le cas $d \geq 3$, le cas $d = 2$ étant similaire. Pour $x \neq 0$ on a, $\partial_i |x| = x_i/|x|$ et donc $\partial_i f(x) = (2-d)|x|^{-d} x_i$, $\partial^2_{ii} f(x) = (2-d)|x|^{-d} - d(2-d)|x|^{-d-2} x_i^2$, de sorte que

$$\Delta f(x) = d(2-d)|x|^{-d} - d(2-d)|x|^{-d-2}|x|^2 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \quad (2.18)$$

Comme $f \in L^1_{\text{loc}}$, on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle -\Delta f, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} -\Delta \varphi f$$

comme $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon$, en utilisant la formule de Green et (2.18), on a :

$$-\int_{|x|>\varepsilon} \Delta\varphi f = \int_{|x|=\varepsilon} \left( \varphi \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma = \int_{|x|=\varepsilon} \left( \varphi (d-2)\varepsilon^{1-d} - \varepsilon^{2-d} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma.$$

On conclut en remarquant que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-d} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi d\sigma = s_d \varphi(0), \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = O(\varepsilon^{d-1}).$$

$\square$

Le Théorème précédent nous ayant fourni la solution fondamentale du laplacien :

$$g_2(x) = \frac{1}{2\pi}\ln(|y|),\ g_d(y) = \frac{1}{(d-2)s_d|y|^{d-2}}, d \geq 3,$$

nous pouvons en déduire qu'une solution au sens des distributions de l'équation

$$-\Delta u = f,\ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

avec $f \in \mathcal{E}'$ est donnée par convolution avec la solution fondamentale, c'est à dire $u = g_d \star f$. En effet, $\Delta(g_d \star f) = (\Delta g_d) \star f = \delta_0 \star f = f$. Notons que l'on n'a pas unicité de la solution au sens des distributions pour l'équation précédente (ajouter à $u$ déterminée précédemment une fonction harmonique quelconque). Si $f$ a davantage de régularité, par exemple $f \in \mathcal{S}$, alors $u \in L^1 \cap \mathcal{E}$ et on a la formule explicite :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|) f(y) dy$$

en dimension 2 et

$$u(x) = \frac{1}{(d-2)s_d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x-y|^{d-2}} f(y) dy$$

en dimension supérieure.

Considérons maintenant l'EDP linéaire :

$$-\Delta u + u = f$$

avec $f \in \mathcal{S}$ et dont on cherche une solution dans $\mathcal{S}$. En prenant la transformée de Fourier de cette équation on obtient une équation algébrique en $\hat{u}$ :

$$(1 + |\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}$$

dont la solution est évidemment donnée par $u = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-1}\hat{f})$. Notons que l'on a $\hat{u} \in \mathcal{S}$ et donc on a bien $u \in \mathcal{S}$. Pour calculer effectivement $u$, on utilise le fait que $(1+|\xi|^2)^{-1} \in \mathcal{S}'$ et l'identité

$$\mathcal{F}^{-1}(gh) = \mathcal{F}^{-1}(g) \star \mathcal{F}^{-1}(h), \forall g \in \mathcal{S},\ \forall h \in \mathcal{S}'$$

de sorte qu'en définissant $B$ (noyau de Bessel) par :

$$B := \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{-1}\right) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{-1}\right)$$

on a

$$u = B \star f.$$

Pour clore ce chapitre, indiquons formellement comment les notions vues dans ce chapitre permettent également de résoudre certaines équations d'évolution linéaires standard (mais importantes) comme l'équation de la chaleur. Nous nous bornerons ici au cas de l'équation de la chaleur et à une description heuristique pour ne pas avoir à introduire le cadre fonctionnel rigoureux mais un peu lourd permettant de traiter la variable temporelle. Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur homogène s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u(0,.) = u_0, \end{cases}$$

avec une condition initiale $u_0 \in L^2$. En prenant la transformée de Fourier de cette équation par rapport à la seule variable spatiale on obtient une équation différentielle ordinaire pour $t \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ :

$$\partial_t \hat{u} = -|\xi|^2 \hat{u}$$

et donc

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}(0,\xi) e^{-t|\xi|^2}$$

de sorte que

$$u(t,x) = (G_t \star u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_t(x-y) u_0(y) dy \text{ avec } G_t = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}).$$

On a l'expression explicite suivante pour $G_t$ (noyau de la chaleur) :

$$G_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-t|\xi|^2} d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

d'où la formule de représentation pour la solution de l'équation de la chaleur :

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

Le fait que le noyau de la chaleur soit la densité d'une gaussienne centrée de variance $t$ ne doit rien au hasard étant donné le lien très étroit entre cette équation (et plus généralement les équations paraboliques) et le mouvement Brownien (et plus généralement les processus de diffusion).

# Chapitre 3

# Espaces de Banach et topologies faibles

## 3.1 Topologie faible

Soit $E$ un espace de Banach et $E'$ son dual topologique, muni de sa norme duale. La topologie faible sur $E$ est alors définie de la manière suivante :

**Définition 3.1** *La topologie faible sur $E$, notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine (i.e. ayant le moins d'ouverts) rendant continus les éléments de $E'$.*

La topologie faible sur $E$, $\sigma(E, E')$, est donc un cas particulier de topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications définies sur $E$ à valeurs réelles. La construction de telles topologies a déja été vue dans le cours de topologie. Rappelons-en simplement les grandes lignes. Il est clair que la topologie $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine contenant (ou encore la topologie engendrée par) la famille $\Lambda := \{f^{-1}(\omega),\ f \in E',\ \omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}\}$. La topologie engendrée par cette famille est formée par les réunions quelconques d'intersections finies d'éléments de $\Lambda$. Pour montrer que cette nouvelle famille est effectivement une topologie (et donc la moins fine contenant $\Lambda$), il suffit de montrer qu'elle est stable par intersection finie, ce qui résulte de :

$$\bigcap_{k=1,2} \left( \bigcup_{i \in I_k} \bigcap_{j \in J_k} O_{i_j} \right) = \bigcup_{(i_1,i_2) \in I_1 \times I_2} \left( \bigcap_{j \in J_1} O_{i_{1_j}} \bigcap_{j \in J_2} O_{i_{2_j}} \right)$$

**Lemme 3.1** *Soit $X$ un espace topologique et $\varphi$ une application de $X$ vers $E$, alors $\varphi$ est continue pour la topologie $\sigma(E, E')$ si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f \circ \varphi$ est continue sur $X$.*

**Preuve:**
Si $\varphi$ est continue de $X$ dans $(E, \sigma(E, E'))$ comme par définition tout $f \in E'$ est continue pour $(E, \sigma(E, E'))$ alors par composition pour tout $f \in E'$, $f \circ \varphi$ est continue sur $X$. Réciproquement, supposons que $f \circ \varphi$ soit continue sur $X$ pour tout $f \in E'$, il s'agit de montrer que $\varphi$ est continue de $X$ dans $(E, \sigma(E, E'))$. Pour cela, il s'agit de montrer que $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert de $X$ pour tout ouvert $U$ pour $\sigma(E, E')$. Or nous savons que $U$ est de la forme :

$$U = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} f_i^{-1}(\omega_i)$$

où chaque $I_j$ est fini, $f_i \in E'$ et $\omega_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On a alors

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} (f_i \circ \varphi)^{-1}(\omega_i)$$

qui est bien ouvert puisque chaque $f_i \circ \varphi$ est continue.
$\square$

**Lemme 3.2** *Soit $x \in E$, un système fondamental de voisinages de $x \in E$ pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ est donné par les ensembles de la forme :*

$$V_{\varepsilon, f_1, \ldots f_k} := \{y \in E \,:\, |f_i(x-y)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$$

*avec $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_k \in (E')^k$.*

**Preuve:**
Par définition de la topologie $\sigma(E, E')$, $V_{\varepsilon, f_1, \ldots f_k}$ est un ouvert de la topologie faible contenant $x$. Soit maintenant $U$ un voisinage de $x$ pour $\sigma(E, E')$, il existe alors un ensemble fini $I$, des formes linéaires continues $(f_i)_{i \in I}$ et des ouverts de $\mathbb{R}$, $(\omega_i)_{i \in I}$ tels que $f_i(x) \in \omega_i$ et $\cap_{i \in I} f_i^{-1}(\omega_i) \subset U$. On choisit alors $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $(f_i(x) - \varepsilon, f_i(x) + \varepsilon) \subset \omega_i$ pour tout $i \in I$ de sorte que $V := \{y \in E \,:\, |f_i(x-y)| < \varepsilon,\ \forall i \in I\} \subset U$.
$\square$

La topologie $\sigma(E, E')$ est ainsi une topologie d'evtlc puisqu'elle peut de manière équivalente être définie par la famille de semi-normes $\{p_f,\ f \in E'\}$ avec $p_f(x) := |f(x)|$ pour tout $(x, f) \in E \times E'$. Nous avons déja vu au chapitre 1 qu'il résulte du théorème de Hahn-Banach que :

**Lemme 3.3** *La topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Par définition même tout ouvert pour la topologie faible est ouvert pour la topologie forte et l'on vérifie sans peine que les deux topologies coïncident lorsque $E$ est de dimension finie (pour s'en convaincre, il suffit de considérer la base duale d'une base de $E$). Lorsque $E$ est de dimension infinie, les deux topologies sont distinctes et il existe toujours des fermés "fort" (i.e. pour la topologie de la norme) qui ne sont pas fermés faibles (i.e. pour $\sigma(E, E')$). En effet, supposons $E$ de dimension infinie et définissons $S := \{x \in E \ : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $E$, alors $S$ n'est pas faiblement fermée est plus précisément l'adhérence de $S$ pour $\sigma(E, E')$ contient la boule fermée $B_E$ toute entière. En effet soit $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| < 1$ et soit $V$ un voisinage de $x_0$ pour $\sigma(E, E')$, on peut sans perte de généralité supposer que $V$ est de la forme $V = \{y \in E \ : \ |f_i(y - x_0)| < \varepsilon, i = 1, ..., k\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et une famille finie d'éléments de $E'$, $f_1, ...., f_k$. Comme $E$ est de dimension infinie il existe $y_0 \in E$, $y_0 \neq 0$ tel que $f_i(y_0) = 0$ pour $i = 1, ..., k$ (faute de quoi $E$ s'injecterait dans $\mathbb{R}^k$). On peut alors choisir $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + ty_0 \in S$ comme $x_0 + ty_0 \in V$ on en déduit bien que $x_0$ est adhérent à $S$ pour $\sigma(E, E')$. En dimension infinie, il convient de retenir de l'argument précédent que les parties d'intérieur non vides pour $\sigma(E, E')$ " contiennent toujours un sous-espace affine (de dimension infinie !) de $E$, et donc sont non bornées. En particulier tout borné de $E$ est d'intérieur vide pour $\sigma(E, E')$. Pour $A \subset E$, on notera $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ l'adhérence de $A$ pour la topologie faible et $\overline{A}$ son adhérence pour la topologie forte, comme les fermés faibles sont fermés forts on a toujours $\overline{A} \subset \overline{A}^{\sigma(E,E')}$, l'inclusion étant en générale stricte. Pour les sous-ensembles convexes toutefois on a le résultat suivant :

**Proposition 3.1** *Soit $C$ un convexe fermé de $E$ alors $C$ est faiblement fermé.*

**Preuve:**
Soit $x \in E \setminus C$ il s'agit de montrer que $E \setminus C$ est voisinage de $x$ pour $\sigma(E, E')$ or il résulte du théorème de Hahn-Banach 1.11 qu'il existe $f \in E'$ et $\varepsilon > 0$ tels que le voisinage de $x$ pour $\sigma(E, E')$, $V := \{y \in E : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$ ne rencontre pas $C$.

□

Par la suite nous dirons qu'une suite $(x_n)$ de $E$ converge *faiblement* vers $x \in E$ (ou au sens de $\sigma(E, E')$), ce que nous noterons $x_n \rightharpoonup x$ lorsque $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$. Passons en revue quelques propriétés élémentaires de la convergence faible :

- si $(x_n)$ converge faiblement sa limite faible est unique,
- si $x_n \to x$ alors $x_n \rightharpoonup x$

– toute suite faiblement convergente de $E$ est bornée (conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus),
– si $x_n \rightharpoonup x$ alors $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$ (utiliser le fait que $\|x\| = \sup\{f(x),\ f \in E',\ \|f\|_{E'} \leq 1\}$),
– si $x_n \rightharpoonup x$ et si $f_n \to f$ dans $E'$ alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

On se persuade aisément que la convergence faible n'entraine en général pas la convergence forte (sauf en dimension finie et dans quelques cas "pathologiques" comme celui de $l^1$). On a cependant comme première conséquence de la proposition 3.1 :

**Lemme 3.4** (Lemme de Mazur) *Soit $(x_n)$ une suite convergeant faiblement vers $x$ dans $E$ alors il existe une suite $(y_n)$ avec chaque $y_n$ combinaison convexe des $\{x_k,\ k \geq n\}$ convergeant fortement vers $x$ dans $E$.*

**Preuve:**
Posons $C_n := \text{co}(\{x_k,\ k \geq n\})$ comme $x_n \rightharpoonup x$ on a $x \in \overline{C_n}^{\sigma(E,E')}$ pour tout $n$. Comme $C_n$ est convexe, il découle facilement de la proposition 3.1 que l'on a $\overline{C_n}^{\sigma(E,E')} = \overline{C_n}$ et donc $x \in \overline{C_n}$ il existe donc $y_n \in C_n$ tel que $\|x - y_n\| \leq 1/n$ ce qui achève la preuve. □

Une autre conséquence de la proposition 3.1 est donnée par :

**Proposition 3.2** *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i pour la topologie forte de $E$ alors $f$ est s.c.i. pour $\sigma(E, E')$. En particulier, si $x_n \rightharpoonup x$ alors*

$$f(x) \leq \liminf f(x_n).$$

**Preuve:**
Il suffit de remarquer que les sous-niveaux de $f$ (i.e. $\{f \leq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$) sont convexes fermés donc faiblement fermés. Le deuxième point résulte du fait que la semi-continuité inférieure faible implique la semi-continuité inférieure faible séquentielle.
□

Si $E$ est un espace de Banach de dimension infinie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ n'est jamais métrisable. C'est l'objet de l'exercice suivant :

**Exercice 3.1** *Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie dont on suppose que la topologie faible $\sigma(E, E')$ est métrisable par la distance $d$. Montrer qu'il existe alors une suite $x_n$ telle que $\|x_n\| \to +\infty$ et $x_n \rightharpoonup 0$ et conclure.*

**Exercice 3.2** *Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie, montrer que toute base algébrique de $E$ est non dénombrable (utiliser le théorème de Baire). Supposons maintenant que $\sigma(E, E')$ soit métrisable montrer que ceci implique l'existence d'une famille au plus dénombrable de $E'$ engendrant $E'$. Conclure.*

**Exercice 3.3** *Soit $E$ un espace de Banach, $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$ tels que $x_n \rightharpoonup x$. Montrer que pour tout $n$, il existe $z_n \in \mathrm{co}(\{x_k,\ k \leq n\})$ tel que $z_n \to x$ (on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument de séparation).*

**Exercice 3.4** *Soit $E$ un espace de Banach, $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$ tels que $x_n \rightharpoonup x$. Pour tout $n \geq 1$ on pose $z_n := n^{-1}(\sum_{i=1}^n x_i)$, montrer que $z_n \rightharpoonup x$.*

**Proposition 3.3** *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Alors $T$ est continue de $E$ (fort) dans $F$ (fort) si et seulement si elle est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$.*

**Preuve:**
Supposons d'abord $T$ continue de $E$ fort dans $F$ fort. Pour tout $f \in F'$, $f \circ T$ appartient à $E'$ et donc est continue pour $\sigma(E, E')$, on en déduit que $T$ est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$ grâce au lemme 3.1.

Supposons maintenant que $T$ est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$ alors son graphe est fermé pour $\sigma(E \times F, E' \times F')$ et donc aussi fortement fermé dans $E \times F$. Comme $E$ et $F$ sont de Banach, grâce au théorème du graphe fermé (voir chapitre 4) on en déduit bien que $T$ est continue de $E$ fort dans $F$ fort. □

## 3.2 Topologie faible-$*$

La topologie faible-$*$ sur $E'$, est définie comme suit :

**Définition 3.2** *La topologie faible-$*$ sur $E'$, notée $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine (i.e. ayant le moins d'ouverts) rendant continus les formes linéaires $f \mapsto f(x)$ pour tout $x \in E$.*

Il est à noter qu'on dispose désormais de trois topologies sur $E'$ : la topologie forte, la topologie faible-$*$, $\sigma(E', E)$ et la topologie faible $\sigma(E', E'')$. En dimension finie, évidemment ces trois topologies coïncident. De plus comme $E$ s'injecte continûment dans $E''$, $\sigma(E',E)$ est toujours moins fine que $\sigma(E',E'')$.

En transposant ce que nous avons vu sur la topologie faible $\sigma(E,E')$, on montre aisément qu'un système fondamental de voisinages de $f \in E'$ pour la topologie faible $*$ $\sigma(E,E')$ est donné par les ensembles de la forme :

$$V_{\varepsilon,x_1,\dots x_k} := \{g \in E' : |(g-f)(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1,\dots,k\}$$

avec $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_k \in E^k$. La topologie faible-$*$ sur $E'$ est donc une topologie d'evtlcs sur $E'$ associée à la famille de semi-normes $f \in E' \mapsto q_x(f) := |f(x)|$, pour $x \in E$.

On a naturellement une notion de convergence pour la topologie faible-$*$ sur $E'$ qui se définit comme suit. On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de $E'$ converge faiblement-$*$ vers $f$, ce que l'on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, pour tout $x \in E$. On vérifie sans peine les propriétés suivantes de la convergence faible-$*$ :

– si $(f_n)$ converge faiblement-$*$, sa limite faible-$*$ est unique,
– si $f_n \to f$ (i.e. $\|f_n - f\| \to 0$) alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$,
– si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E',E'')$ alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$,
– toute suite faiblement-$*$ convergente de $E'$ est bornée,
– si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ alors $\|f\| \le \liminf_n \|f_n\|$,
– si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ et si $x_n \to x$ dans $E$ (fort) alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Le résultat de compacité suivant découle du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki que nous avons établi au chapitre 1 dans le cadre plus général des evtlc :

**Théorème 3.1** (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *La boule unité fermée de $E'$, $B_{E'}$ est compacte pour la topologie faible $*$ $\sigma(E',E)$.*

Terminons ce paragraphe par un critère utile de fermeture faible $*$ dont on omettra ici la preuve (le lecteur pourra consulter par exemple [])

**Théorème 3.2** (Krein-Smulian) *Soit $E$ un espace de Banach et $C$ un convexe de $E'$ tel que $C \cap rB_{E'}$ soit fermé pour la topologie faible $*$ pour tout $r > 0$, alors $C$ est fermé pour la topologie faible $*$.*

## 3.3 Espaces réflexifs

Etant donné un espace de Banach $E$ (ou plus généralement un evn), on rappelle que $E$ s'injecte dans son bidual $E''$ via l'injection canonique $J : E \to E''$ définie par :

$$J(x)(f) := f(x), \ \forall x \in E, \ \forall f \in E'.$$

Il résulte du corollaire 1.2 que $J$ est une isométrie de $E$ sur $E''$, en particulier $J$ est une injection continue.

**Définition 3.3** *On dit que l'evn $E$ est réflexif si $J$ est surjective.*

Autrement dit, dire que $E$ est réflexif revient à dire qu'on peut identifier $E''$ à $E$. Evidemment tout espace de Hilbert est réfexif (ceci découle du théorème de Riesz qui permet d'identifier un espace de Hilbert à son dual topologique). Pour tout $p \in (1, \infty)$ les espaces $l^p$, $L^p$ et $W^{1,p}(\Omega)$ sont réflexifs. Par contre $l^1$, $L^1$, $W^{1,1}$, $l^\infty$, $L^\infty$, $W^{1,\infty}$, $C^0$, les espaces de mesures ne sont pas réflexifs.

L'importance fondamentale de la réflexivité provient du résultat de compacité énoncé dans le théorème de Kakutani 3.3 plus bas. Avant d'énoncer et de démontrer ce résultat important nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires :

**Lemme 3.5** (Helly) *Soit $E$ un espace de Banach, $f_1, ...., f_n$ dans $E'$ et $\alpha_1, ...., \alpha_n$ des réels on a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que*

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., n$$

2. *pour tout $\beta_1, ...., \beta_n \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \|.$$

**Preuve:**
Supposons d'abord 1., et soit $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}^d$, on a alors

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1} \beta_i \alpha_i| &\leq |\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x_\varepsilon)| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| \\ &\leq \| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_i| \end{aligned}$$

d'où l'on déduit 2. en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

Pour établir la réciproque remarquons que 1 signifie exactement que $\alpha := (\alpha_1, ...., \alpha_n) \in \overline{F(B_E)}$ avec $F(x) := (f_1(x), ..., f_n(x))$ pour tout $x \in E$. Supposons donc que $\alpha \notin \overline{F(B_E)}$, comme $\overline{F(B_E)}$ est convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$, en utilisant le théorème de séparation stricte, il existe $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x) < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i, \ \forall x \in B_E$$

ce qui implique en particulier

$$\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \| < | \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i |$$

contredisant ainsi la seconde assertion.

□

**Lemme 3.6** (Goldstine) *Soit $E$ un espace de Banach, alors $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$.*

**Preuve:**

Soit $\eta \in B_{E''}$ et $V$ un voisinage de $\eta$ pour $\sigma(E'', E')$, il s'agit de montrer que $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $n$, $\varepsilon > 0$ et $f_1, ..., f_n \in (E')^n$ tels que

$$V = \{\xi \in E'' : |(\xi - \eta)(f_i)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, ..., n\}.$$

Posons $\alpha_i := \eta(f_i)$ pour $i = 1, ..., n$ et soit $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{R}^n$, on a alors puisque $\eta \in B_{E''}$ :

$$| \sum_{i=1} \beta_i \alpha_i | = |\eta(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i)| \leq \| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \|.$$

On déduit alors du lemme 3.5 qu'il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que $|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$ pour $i = 1, ..., n$ ce qui signifie exactement que $J(x_\varepsilon) \in V$ et donc on a bien $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$.

□

**Théorème 3.3** *(*Kakutani*) Soit $E$ un espace de Banach alors $E$ est réflexif si et seulement si $B_E$ est compacte pour $\sigma(E, E')$.*

**Preuve:**

Supposons d'abord que $E$ est réflexif on a alors $J(B_E) = B_{E''}$ et il résulte du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki que $B_{E''}$ est compacte pour $\sigma(E'', E')$. Il suffit donc de montrer que $J^{-1}$ est continue de $(E'', \sigma(E'', E'))$ vers $(E, \sigma(E, E'))$ pour en conclure que $B_E$ est compacte pour $\sigma(E, E')$. Avec le lemme 3.1, il s'agit donc de montrer que pour tout $f \in E'$, $f \circ J^{-1}$ est continue pour $\sigma(E'', E')$. Or si $\eta \in E''$ il existe $x \in E$ tel que $\eta = J(x)$ on a donc $f(J^{-1}(\eta)) = f(x) = \eta(f)$ et comme $f \in E'$, on en déduit bien que $f \circ J^{-1}$ est continue pour $\sigma(E'', E')$.

Réciproquement, supposons que $B_E$ soit compacte pour $\sigma(E, E')$. Comme $J$ est continue de $E$ (fort) dans $E''$ (fort), il découle de la proposition 3.3 que $J$ est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ vers $(E'', \sigma(E'', E'''))$. Comme $\sigma(E'', E')$ est moins fine que $\sigma(E'', E''')$, $J$ est aussi continue de $(E, \sigma(E, E'))$ vers $(E'', \sigma(E'', E'))$. Cela implique que $J(B_E)$ est compact pour $\sigma(E'', E')$ mais comme, par le lemme 3.6, $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour $\sigma(E'', E')$ on doit avoir $B_{E''} = B_E$ et donc $E'' = J(E)$.

$\square$

Examinons maintenant quelques conséquences du théorème de Kakutani.

**Corollaire 3.1** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif et $F$ un sev fermé de $E$ alors $F$ muni de la topologie induite par la topologie forte de $E$ est réflexif.*

**Preuve:**

Il est facile de voir que la topologie faible $\sigma(M, M')$ coïncide avec la trace de $\sigma(E, E')$ à $M$ de sorte que $B_M$ est compacte pour $\sigma(M, M')$ car $M$ est fermé pour $\sigma(E, E')$ et $B_E$ est compacte pour $\sigma(E, E')$. D'après le théorème de Kakutani, $M$ est donc réflexif. $\square$

**Corollaire 3.2** *Soit $E$ un espace de Banach, alors $E$ est réflexif si et seulement si $E'$ est réflexif.*

**Preuve:**

Supposons d'abord $E$ réflexif. Il résulte du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki que $B_{E'}$ est compacte pour $\sigma(E', E)$ mais comme $E$ est réflexif, $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$ donc on déduit du théorème de Kakutani que $E'$ est réflexif.

Si $E'$ est réflexif alors d'après ce qui précède $E''$ est réflexif. Comme $J$ est une isométrie de $E$ sur $E''$, on vérifie facilement que $J(E)$ est un sev fermé de $E''$ et donc que $J(E)$ est réflexif. Comme $J^{-1} : J(E) \to E$ est un isomorphisme isométrique entre espaces de Banach on en déduit aisément que $E$ est réflexif.

$\square$

**Corollaire 3.3** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif et $K$ une partie convexe fermée bornée de $E$ alors $K$ est compacte pour $\sigma(E, E')$.*

**Preuve:**
$K$ est fermé faible en vertu de la proposition 3.1 et inclus dans une boule fermée laquelle est faiblement compacte en vertu du théorème de Kakutani.
□

**Corollaire 3.4** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif, $C$ un convex non vide fermé de $E$, $f : C \to \mathbb{R} \cup +\infty$ une fonction convexe s.c.i. non identiquement égale à $+\infty$, si $C$ est bornée ou si*

$$f(x) \to +\infty \text{ quand } x \in C, \ \|x\| \to +\infty. \tag{3.1}$$

*alors il existe $\overline{x} \in C$ tel que $f(\overline{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in C$.*

**Preuve:**
Soit $x \in C$ tel que $f(x) < +\infty$ alors $A := \{y \in C : f(y) \leq f(x)\}$ est compact pour $\sigma(E, E')$ d'après le corollaire 3.3 et $f$ est faiblement s.c.i. sur $A$ d'après la proposition 3.2 ; $f$ atteint donc son mimimum sur $A$ qui est aussi son minimum sur $C$.
□

## 3.4 Espaces séparables

**Définition 3.4** *On dit que l'espace de Banach $E$ est séparable si et seulement si $E$ possède une partie dénombrable dense.*

Il est immédiat de démontrer que si $E$ est séparable alors toute partie de $E$ l'est également.

**Proposition 3.4** *Soit $E$ un espace de Banach tel que $E'$ soit séparable alors $E$ est séparable.*

**Preuve:**
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'^{\mathbb{N}}$ dense dans $E'$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in E$ tel que $\|x_n\| = 1$ et

$$f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|.$$

Soit $F$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ de $\{x_n, \ n \in \mathbb{N}\}$. Notons que $F$ est dénombrable, montrons maintenant que $F$ est dense dans $E$. Pour cela, comme $F$ est dense dans $G := \text{vect}(\{x_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ il suffit de montrer que $G$ est dense dans $E$. D'après le corollaire 1.5 il suffit de montrer que si $f \in E'$ vérifie $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$ alors $f \equiv 0$. Soit donc $f$ vérifiant la propriété précédente $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\| \leq \varepsilon/3$, on a alors

$$\|f\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2f_n(x_n) = \frac{\varepsilon}{3} + 2(f_n - f)(x_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\|f_n - f\| \leq \varepsilon$$

comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on, en déduit bien que $f \equiv 0$.

□

Il est à noter que la séparabilité de $E$ n'entraine généralement pas celle de $E'$ (par exemple $L^1(\Omega)$ est séparable tandis que son dual $L^\infty(\Omega)$ ne l'est pas, nous renvoyons le lecteur au chapitre 5 pour plus de détails). Dans le cas où $E$ est réflexif on a cependant :

**Corollaire 3.5** *Soit $E$ un espace de Banach alors $E$ est réflexif et séparable si et seulement si $E'$ est réflexif et séparable.*

**Preuve:**

Si $E'$ est réflexif alors $E$ aussi (proposition 3.4) et si $E'$ est séparable alors $E$ aussi (corollaire 3.2). Réciproquement si $E$ est réflexif et séparable alors $E'' = J(E)$ est réflexif et séparable et donc $E'$ aussi. □

**Théorème 3.4** *Soit $E$ un espace de Banach alors $E$ est séparable si et seulement si la trace de la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ à $B_{E'}$ est métrisable.*

**Preuve:**

Le fait que si $E$ est séparable alors la trace de la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$ à $B_{E'}$ est métrisable résulte de la proposition 1.1.

Réciproquement supposons que la distance $d$ métrise $\sigma(E', E)$ sur $B_{E'}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(0, 1/n) := \{f \in E' \ : \ d(0, f) < 1/n\}$ est un voisinage de 0 pour $\sigma(E', E)$ de sorte qu'il existe $\varepsilon_n$, $I_n$ fini et $(x_i)_{i \in I_n}$ tels que $V_n := \{f \in E' : |f(x_i)| < \varepsilon_n, \ \forall i \in I_n\} \subset B(0, 1/n)$. Pour montrer que $E$ est séparable il nous suffit de montrer que l'espace vectoriel engendré par $\cup_n \{x_i, \ i \in I_n\}$, $F$ est dense dans $E$. Soit $f \in E'$ telle que $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$ alors $f \in V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $d(0, f) = 0$ de sorte que $f = 0$, on conclut alors avec le corollaire 1.5.

□

De manière symétrique on a :

**Proposition 3.5** *Soit $E$ un espace de Banach, si $E'$ est séparable alors la trace de la topologie faible $\sigma(E, E')$ à $B_E$ est métrisable.*

La réciproque est également vraie mais sa démonstration est plus difficile. Noter que la proposition précédente n'est pas contradictoire avec le fait que $\sigma(E, E')$ ne soit jamais métrisable sur $E$ *tout entier* lorsque $E$ est de dimension infinie. La métrisabilité de la topologie faible-$*$ sur les bornés combinée au théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki fournit immédiatement le résultat de compacité séquentielle suivant :

**Corollaire 3.6** *Soit $E$ un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_n$ une suite bornée de $E'$, alors $(f_n)_n$ possède une sous-suite qui converge pour la topologie faible-$*$ $\sigma(E', E)$.*

**Preuve:**
Sans perte de généralité nous pouvons supposer tous les $f_n$ dans $B_{E'}$ qui est un compact métrisable pour $\sigma(E', E)$, d'où le résultat.
□

Dans le cas où $E$ est réflexif, on a de même le résultat de compacité séquentielle suivant :

**Théorème 3.5** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif et $(x_n)_n$ une suite bornée de $E$ alors $(x_n)_n$ possède une sous-suite qui converge faiblement.*

**Preuve:**
Soit $M := \overline{\text{vect}\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}}$, $M$ est un sev fermé de $E$ donc est réflexif (corollaire 3.1) et $M$ est séparable par construction. Ainsi $M'$ est séparable et donc pour tout $r > 0$, $\sigma(M, M')$ est métrisable sur $rB_M$ qui est compacte pour $\sigma(M, M')$ d'après le théorème de Kakutani. La suite $(x_n)_n$ admet donc une sous-suite convergente pour $\sigma(M', M)$, cette sous-suite est aussi évidemment convergente pour $\sigma(E', E)$ (par restriction des éléments de $E'$ à $M$).
□

## 3.5 Espaces uniformément convexes

**Définition 3.5** *Soit $E$ un espace de Banach, on dit que $E$ est dit uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x$ et $y$ dans $B_E$ si $\|x - y\| \geq \varepsilon$ alors*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

La définition précédente est de nature géométrique et exprime le fait que la boule unité de $E$ doit être "bien ronde". Cette propriété n'est pas stable par passage à une norme équivalente ($\mathbb{R}^d$ est uniformément convexe lorsque muni de la norme euclidienne il ne l'est pas lorsque muni de la norme 1 ou de la norme du max). Tout espace de Hilbert est uniformément convexe (conséquence facile de l'identité du parallélogramme), les espaces $L^p$ et $l^p$ sont uniformément convexes pour $1 < p < \infty$, $L^1$, $l^1$, $L^\infty$ et $l^\infty$ ne sont pas uniformément convexes.

**Théorème 3.6** (Millman-Pettis) *Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

**Preuve:**
Supposons $E$ uniformément convexe et montrons que $J(B_E) = B_{E''}$. Comme $J(B_E)$ est clairement fermée, il suffit par homogénéité de montrer que $J(B_E)$ est dense (fort) dans $S_{E''} := \{\eta \in E'' : \|\eta| = 1\}$. Soit $\eta \in S_{E''}$ et $\varepsilon > 0$ montrons qu'il existe $x \in B_E$ tel que $\|J(x) - \eta\| \le \varepsilon$. Comme $E$ est uniformément convexe, il existe $\delta \in (0,1)$ tel que $\|x+y\| \le 2 - 2\delta$ pour tout $(x, y) \in B_E^2$ tels que $\|x - y\| \ge \varepsilon$. Choisissons $f \in E'$ tel que

$$\|f\| = 1 \text{ et } \eta(f) \ge 1 - \frac{\delta}{2}$$

d'après le lemme de Goldstine, il existe $x \in B_E$ tel que

$$|\eta(f) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Supposons que $\eta \notin B(J(x), \varepsilon)$ alors comme $E'' \setminus B(J(x), \varepsilon)$ est ouvert pour $\sigma(E'', E')$, il résulte du lemme de Goldstine qu'il existe $y \in B_E$ tel que

$$\|J(y) - J(x)\| = \|x - y\| > \varepsilon \text{ et } |\eta(f) - f(y)| < \frac{\delta}{2}$$

on a alors d'une part

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \ge 1 - \delta$$

et d'autre part

$$1 - \frac{\delta}{2} \le \eta(f) < \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{\delta}{2} \le \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{\delta}{2}$$

d'où la contradiction recherchée. $\square$

**Théorème 3.7** *Soit $E$ un espace de Banach uniformément convexe et $(x_n)$ une suite convergeant faiblement vers $x$ dans $E$, si $\|x_n\|$ converge vers $\|x\|$ alors $(x_n)$ une suite converge fortement vers $x$ dans $E$.*

**Preuve:**
Si $x = 0$, le résultat est évident, on peut donc sans perte de généralité supposer $x \neq 0$. En posant $\lambda_n := \max(\|x_n\|, \|x\|)$, on a $\lambda_n \to \|x\| > 0$. En définissant alors $y_n := \lambda_n^{-1} x_n$ et $y := x/\|x\|$, on a $(y_n + y)/2 \rightharpoonup y$ et donc

$$\|y\| = 1 \leq \liminf_n \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\|$$

et comme $\|y_n\| \leq 1$ on a en fait $\|\frac{y_n+y}{2}\| \to 1$. Avec l'uniforme convexité de $E$ ceci implique que $\|y_n - y\| \to 0$ ce qui implique aussi que $\|x_n - x\| \to 0$.
□

# Chapitre 4

# Opérateurs linéaires, opérateurs compacts

On rappelle dans ce chapitre un certain nombre de résultats, pour la plupart déja vus au premier semestre dans le cours de Frédéric Paulin, sur les opérateurs linéaires dans les espaces de Banach et en particulier sur les opérateurs compacts. Dans tout ce chapitre $E$ et $F$ désigneront des espaces de Banach, nous noterons $\mathcal{L}(E,F)$ (respectivement $\mathcal{L}(E)$) l'espace des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ (respectivement des endomorphismes continus de $E$) muni de sa norme d'opérateur habituelle.

## 4.1 Généralités

Par la suite pour $f \in E'$ et $x \in E$, nous noterons parfois $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ l'adjoint de $T$ noté $T^*$ est l'opérateur linéaire $F' \to E'$ défini par :

$$\langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle \,,\ \forall f \in E',\ \forall x \in E.$$

On vérifie immédiatement que $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ (et que $T$ et $T^*$ ont même norme). Pour $A \subset E$, on note

$$A^{\perp} := \{f \in E' \ :\ f(x) = 0,\ \forall x \in A\}$$

et de même pour $B \subset E'$, on note

$$B^{\perp} := \{x \in E \ :\ f(x) = 0,\ \forall f \in B\}.$$

Notons que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ on a

$$\ker(T) = (\mathrm{Im}(T^*))^{\perp} \tag{4.1}$$

et de plus :

**Lemme 4.1** *Soit* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *alors* $\mathrm{Im}(T)$ *est fermé si et seulement si*

$$\mathrm{Im}(T) = (\mathrm{ker} T^*)^{\perp}. \tag{4.2}$$

**Preuve:**
Si (4.2) a lieu alors $\mathrm{Im}(T)$ est évidemment fermé. Par ailleurs, l'inclusion

$$\mathrm{Im}(T) \subset (\mathrm{ker}(T^*))^{\perp}$$

est évidente. Supposons $\mathrm{Im}(T)$ fermé et que l'inclusion précédente soit stricte, alors il existe $y \in (\mathrm{ker}(T^*))^{\perp} \setminus \mathrm{Im}(T)$. Par le théorème de séparation stricte, il existe alors $f \in F'$ telle que $f(y) > 0$ et $f \equiv 0$ sur $\mathrm{Im}(T)$ c'est à dire $f \in \mathrm{ker}(T^*)$ ce qui contredit le fait que $y \in (\mathrm{ker}(T^*))^{\perp}$. $\Box$

Le lemme 4.1 découle évidemment de l'énoncé (légèrement) plus général :

**Exercice 4.1** *Soit* $A$ *une partie de* $E$, *montrer que* $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{vect}(A)}$.

**Exercice 4.2** *Soit* $B$ *une partie de* $E'$, *montrer que* $\overline{\mathrm{vect}(B)} \subset (B^{\perp})^{\perp}$. *Montrer qu'il y a égalité dans le cas où* $E$ *est réflexif, est ce le cas en général ? Caractériser dans le cas général* $(B^{\perp})^{\perp}$ *en terme de la topologie faible* $*$ $\sigma(E', E)$.

## 4.2 Conséquences de la théorie de Baire

On rappelle dans cette section quelques résultats sur les applications linéaires continues entre espaces de Banach qui ont déja été vus et résultent du théorème de Baire.

**Théorème 4.1** (Banach-Steinhaus ou principle of uniform boudedness) *Soit* $E$ *un espace de Banach,* $F$ *un evn et* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathcal{L}(E,F)$. *Si,*

$$\forall x \in E, \sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_F < +\infty$$

*alors*

$$\sup_{i\in I} \|f_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

**Preuve:**
Soit $E_n := \{x \in E \ : \ \|f_i(x)\|_F \leq n, \ \forall i \in I\}$, chaque $E_n$ est fermé et par hypothèse on a $\cup_n E_n = E$. Il résulte donc du théorème de Baire qu'il existe $n_0$ tel que $E_{n_0}$ soit d'intérieur non vide : soit donc $r > 0$ et $x_0 \in E$ tels que

$$\|f_i(x_0 + ru)\|_F \leq n_0, \forall i \in E, \forall u \in B_E.$$

Pour tout $u \in B_E$ et tout $j \in I$, on a alors

$$\|f_j(u)\|_F \leq \frac{1}{r}\left(n_0 + \sup_{i \in I} \|f_i(x_0)\|_F\right).$$

□

Une autre conséquence du théorème de Baire est le théorème de l'application ouverte :

**Théorème 4.2** (Théorème de l'application ouverte) *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach Spaces et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors $f$ est une application ouverte au sens où pour tout $U$ ouvert de $E$, $f(U)$ est un ouvert de $F$.*

**Preuve:**
Par linéarité de $f$, il suffit de montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $B_F(0, r_0) \subset \overline{f(B_E(0,1))}$. Soit $F_n := \overline{nf(B_E(0,1))}$, comme $f$ est surjective, $F = \cup_n F_n$ et donc il résulte du théorème de Baire qu'il existe $n_0$ tel que $F_{n_0}$ soit d'intérieur non vide. Ainsi, il existe $y_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que $B_F(y_0, \rho) \subset \overline{f(B_E(0, n_0))}$, par linearité, on a aussi $B_F(-y_0, \rho) \subset \overline{f(B_E(0, n_0))}$ de sorte que $B_F(0, \rho) = -y_0 + B_F(y_0, \rho) \subset \overline{f(B_E(0, 2n_0))}$. Par homogénéité, on a donc $B_F(0, r) \subset \overline{f(B_E(0,1))}$ avec $r = \rho/2n_0$.

Prouvons maintenant que $B_F(0, r) \subset f(\overline{B}_E(0,2))$. Soit $y \in B_F(0, r)$, il existe $x_1 \in B_E(0,1)$ tel que $y - f(x_1) \in B_F(0, r/2)$, comme $B_F(0, r/2) \subset \overline{f(B_E(0, 1/2))}$, il existe $x_2 \in B_E(0, 1/2)$ tel que $y - f(x_1) - f(x_2) \in B_F(0, r/4)$. En itérant l' argument, on construit une suite $(x_n)_n$ de $E$ telle que $\|x_n\|_E \leq 1/2^{n-1}$ et $\|y - f(x_1 + .... + x_n)\|_F \leq r/2^n$ pour tout $n$. Comme la suite des sommes partielles $x_1 + .... + x_n$ est de Cauchy sequence, elle converge vers un certain $x \in \overline{B}_E(0,2)$ et par continuité $y = f(x)$, ce qui prouve que $B_F(0, r) \subset f(\overline{B}_E(0,2)) \subset f(B_E(0, 5/2))$ et donc $B_F(0, r_0) \subset f(B_E(0,1))$ avec $r_0 = 2r/5$.

□

Une application immédiate du théorème précédent est que si $E$ est de Banach muni de n'importe laquelle des deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et s'il existe $C \geq 0$ tel que $\|.\|_1 \leq C\|.\|_2$ alors $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont en fait équivalentes. Une autre conséquence du résultat précédent est le théorème suivant de continuité automatique dû à Banach :

**Théorème 4.3** (Théorème de continuité de l'inverse de Banach) *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une bijection alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Une conséquence classique du théorème de Banach nous est fournie par :

**Théorème 4.4** (Théorème du graphe fermé) *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach, $f \in L(E, F)$ tel que le graphe de $f$ soit fermé dans $E \times F$ (muni sa structure d'evn produit) alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*

**Preuve:**
Soit $G$ le graphe de $f$ muni de la norme induite par celle de $E \times F$, comme $G$ est fermé dans $E \times F$ c'est un espace de Banach. L'application linéaire $(x, y) = (x, f(x)) \in G \mapsto x$ est une bijection linéaire continue, il résulte donc du théorème de Banach que son inverse : $x \in E \mapsto (x, f(x))$ est continue, la continuité de $f$ en découle trivialement.
$\square$

Le résultat suivant est classique mais peut s'avérer utile :

**Proposition 4.1** *Soit $E$ un espace de Banach et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$ alors $\mathrm{id} + f$ est inversible avec*

$$(\mathrm{id} + f)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^k$$

**Preuve:**
Comme $\mathcal{L}(E)$ est de Banach et $\|f\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, la suite des sommes partielles

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^k$$

étant de Cauchy, elle converge. De plus $S_n \circ (\mathrm{id} + f) = \mathrm{id} + (-1)^n f^{n+1}$, ce dont on tire le résultat voulu en faisant tendre $n$ vers $\infty$. $\square$

## 4.3 Opérateurs compacts, alternative de Fredholm

Par la suite, nous noterons $B_E$ la boule unité fermée de $E$.

**Définition 4.1** *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ on dit que $T$ est un opérateur compact si et seulement si $T(B_E)$ est relativement compact. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de $E$ vers $F$ et $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des endomorphismes compacts de $E$.*

Il découle immédiatement de la définition précédente que la composition (à droite ou à gauche) d'un opérateur compact et d'un opérateur linéaire continu est compacte.

**Lemme 4.2** *$\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.*

**Preuve:**
Le seul point à établir est la fermeture de $\mathcal{K}(E,F)$. Supposons donc que $T_n \in \mathcal{K}(E,F)$ et $T_n \to T$, il s'agit de montrer que $T(B_E)$ est relativement compact. Comme $F$ est complet, ceci revient à montrer que $T(B_E)$ est precompact. Soit $\varepsilon$ et $n$ tel que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon/2$, comme $T_n$ est compact, il existe $k$ et $y_1, \dots, y_k \in F^k$ tels que $T_n(B_E) \subset \cup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon/2)$ de sorte que $T(B_E) \subset \cup_{i=1}^k B(y_i, \varepsilon)$. $\Box$

**Proposition 4.2** *Soit $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{K}(E,F)$ alors si $(x_n)$ est une suite de $E$ convergeant faiblement vers $x$, $Tx_n$ converge fortement dans $F$ vers $Tx$.*

**Preuve:**
Comme $(x_n)$ est bornée et $T$ est compact, $Tx_n$ prend ses valeurs dans un compact (fort) de $F$. Comme par ailleurs $Tx_n$ converge faiblement vers $Tx$ on en déduit que $Tx$ est l'unique valeur d'adhérence forte de la suite $(Tx_n)$ et donc que toute la suite converge fortement vers $Tx$. $\Box$

Les opérateurs de rang fini (i.e. dont l'image est de dimension finie) sont évidemment compacts et donc les limites dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de rang fini sont des opérateurs compacts. Réciproquement, il n'est pas vrai en général qu'un opérateur compact soit limite d'opérateurs de rang fini (mais cette propriété est vraie dans les espaces de Hilbert).

**Théorème 4.5** *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$ alors $T^* \in \mathcal{K}(F',E')$. Réciproquement, si $T^* \in \mathcal{K}(F',E')$ alors $T \in \mathcal{K}(E,F)$.*

**Preuve:**
Soit $(v_n)$ une suite de $B_{F'}$ il s'agit de montrer que $T^*(v_n)$ possède une sous suite convergente (ou de manière équivalente, de Cauchy) dans $E'$. Soit $K := \overline{T(B_E)}$, $K$ est un compact de $F$, et posons

$$f_n(y) = \langle v_n, y \rangle \ , \ \forall y \in K.$$

Comme les $v_n$ sont dans $B_{F'}$, chaque $f_n$ est 1-Lipschitzienne sur $K$ et $f_n(0) = 0$ de sorte qu'avec le théorème d'Ascoli, la suite $(f_n)$ possède une sous-suite (encore notée $f_n$ par simplicité) convergeant uniformément sur $K$ vers $f \in C(K,\mathbb{R})$. Par construction, on a

$$\|T^*v_n - T^*v_m\|_{E'} \le \sup_{y\in K} |(f_n - f_m)(y)|$$

si bien que la suite $(T^*v_n)$ est de Cauchy dans $E'$.

Réciproquement, si $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$, on déduit de ce qui précède $T^{**} \in \mathcal{K}(E'', F'')$ c'est-à dire que $T^{**}(B_{E''})$ est relativement compact dans $F''$. Comme $T(B_E) \subset T^{**}(B_{E''})$ et $F$ est fermé dans $F''$, on en déduit bien que $T(B_E)$ est relativement compact dans $F$.

$\square$

**Lemme 4.3** (Lemme de Riesz) *Soit $E$ un evn et $F$ un sev fermé strict de $E$, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u,F) \ge 1-\varepsilon$.*

**Preuve:**
Soit $v \notin F$, $d := d(v,F) > 0$ (car $F$ est fermé) et $u_0 \in F$ tel que

$$d \le \|v - u_0\| \le \frac{d}{1-\varepsilon} \tag{4.3}$$

posons alors

$$u := \frac{v-u_0}{\|v-u_0\|}$$

et montrons que $d(u,F) \ge 1-\varepsilon$. Soit $f \in F$, on a alors en utilisant (4.3) et le fait que $u_0 + \|v-u_0\| f \in F$ :

$$\|u - f\| = \frac{1}{\|v-u_0\|}\Big\|v - u_0 - \|v-u_0\|f\Big\| \ge \frac{d}{\|v-u_0\|} \ge 1-\varepsilon.$$

$\square$

**Théorème 4.6** (Alternative de Fredholm) *Soit $T \in \mathcal{K}(E)$, alors on a :*

1. $\ker(I-T)$ *est de dimension finie,*
2. $\mathrm{Im}(I-T)$ *est fermé et*

$$\mathrm{Im}(I-T) = (\ker(I-T^*))^{\perp},$$

3. $\ker(I-T) = \{0\}$ *si et seulement si* $\mathrm{Im}(I-T) = E$,
4. $\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*)$.

**Preuve:**
1. Soit $F := \ker(I-T)$ on a $B_F = T(B_F) \subset T(B_E)$ et donc $B_F$ est relativement compacte ce qui implique que $F$ est de dimension finie.

2. Soit $f_n := u_n - Tu_n$ une suite de $\mathrm{Im}(I-T)$ convergeant vers $f \in E$, montrons que $f \in \mathrm{Im}(I-T)$. Comme $\ker(I-T)$ est de dimension finie, il existe $v_n \in \ker(I-T)$ tel que

$$\|u_n - v_n\| = d(u_n, \ker(I-T)).$$

Et évidemment on a

$$f_n = u_n - v_n - T(u_n - v_n). \tag{4.4}$$

Montrons que $(u_n - v_n)$ est bornée, si tel n'était pas le cas, à une extraction près, on aurait $\|u_n - v_n\| \to \infty$. En posant $w_n := (u_n - v_n)/\|u_n - v_n\|$, et en utilisant (4.4) et le fait que $f_n$ est borné, ceci implique que $w_n - Tw_n \to 0$. Comme $T$ est compact, on peut, à nouveau à une extraction près supposer que $Tw_n$ converge vers $z \in E$ et donc $w_n \to z$ et $z \in \ker(I-T)$. Mais par ailleurs, on a :

$$d(w_n, \ker(I-T)) = \frac{1}{\|u_n - v_n\|} d(u_n, \ker(I-T)) = 1$$

et donc en passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $d(z, \ker(I-T)) = 1$ ce qui est absurde. Ainsi, on a bien que $(u_n - v_n)$ est bornée, comme $T$ est compacte on peut à une extraction près supposer que $T(u_n - v_n)$ converge vers un certain $g \in E$ de sorte que $u_n - v_n$ converge vers $f + g$ et donc $f = (f+g) - T(f+g) \in \mathrm{Im}(I-T)$. Comme $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermé, on déduit du lemme 4.1 que

$$\mathrm{Im}(I-T) = (\ker(I-T^*))^{\perp}.$$

3. Supposons d'abord que $\ker(I-T) = \{0\}$ et supposons par l'absurde que $E_1 := \mathrm{Im}(I-T) \neq E$. On a $T(E_1) \subset E_1$ et il découle du point précédent que $E_1$ est fermé et donc que $T|_{E_1}$ est compact. Posons $E_2 := (I-T)^2(E) = (I-T)(E_1)$, comme $(I-T)$ est injective $E_2$ est un sev strict de $E_1$ et est fermé d'après le point 2. ; en posant $E_n := (I-T)^n(E)$, $E_n$ est ainsi une suite strictement décroissante de sev fermés de $E$. Il résulte du lemme de Riesz qu'il existe $x_n \in E_n$ tel que $\|x_n\| = 1$ et

$$d(x_n, E_{n+1}) \geq 1/2. \tag{4.5}$$

Soit $n > m$, on a

$$Tx_m - Tx_n = Tx_m - x_m - (Tx_n - x_n) + x_m - x_n$$

et par construction, les vecteurs $Tx_m - x_m$, $Tx_n - x_n$ et $x_n$ appartiennent à $E_{m+1}$, de sorte qu'avec (4.5), on a :

$$\|Tx_m - Tx_n\| \geq d(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde puisque $T$ est compact et $(x_n)$ est bornée.

Réciproquement supposons que $\mathrm{Im}(I-T) = E$, il découle alors du lemme 4.1 que $\ker(I-T^*) = \{0\}$ et donc, en utilisant ce qui précède, $\mathrm{Im}(I-T^*) = E'$ et donc avec (4.1) :

$$\ker(I-T) = (\mathrm{Im}(I-T^*))^\perp = \{0\}.$$

4. Posons $d := \dim\ker(I-T)$ et $d^* := \dim\ker(I-T^*)$ et montrons tout d'abord que $d^* \leq d$. Supposons par l'absurde que $d < d^*$. Comme $\ker(I-T)$ est de dimension finie, il existe un projecteur continu $P$ de $E$ sur $\ker(I-T)$ (voir [2] pour les détails). De plus $\mathrm{Im}(I-T) = \ker(I-T^*)^\perp$ est de codimension finie $d^*$ et admet donc un supplémentaire $F$ fermé de dimension $d^*$ dans $E$. Comme $d < d^*$, il existe un opérateur linéaire $\Lambda : \ker(I-T) \to F$ injectif et non surjectif. Posons alors $S := T + \Lambda \circ P$, $S$ est un opérateur compact car $\Lambda \circ P$ est de rang fini. Soit $u \in \ker(I-S)$ : $0 = (u - Tu) - (\Lambda \circ P)(u)$ on a alors $u - Tu \in \mathrm{Im}(I-T) \cap F$ et donc $u - Tu = 0$ et $\Lambda(Pu) = 0$. Comme $u \in \ker(I-T)$, $Pu = u$ et donc $u = 0$ car $\Lambda$ est injective. On a donc $\ker(I-S) = \{0\}$ si bien, qu 'en vertu du point 3., $\mathrm{Im}(I-S) = E$. Soit $f \in F$ avec $f \notin \mathrm{Im}(\Lambda)$, s'il existait $u \in E$ tel que $(I-S)(u) = u - Tu - (\Lambda \circ P)(u) = f$ alors on aurait $u - Tu \in F$ et donc $u - Tu = 0$ ce qui impliquerait que $f \in \mathrm{Im}(\Lambda)$. Donc $(I-S)$ n'est pas surjective ce qui constitue la contradiction cherchée. On a donc bien $d^* \leq d$. Appliquant le même argument que précédemment à $T^*$, il vient

$$\dim\ker(I-T^{**}) \leq \dim\ker(I-T^*) \leq \dim\ker(I-T)$$

comme par ailleurs il est évident que $\ker(I-T) \subset \ker(I-T^{**})$, ceci permet d'en conclure que $d = d^*$.

□

Le théorème précédent appelle quelques commentaires. Tout d'abord le point 3. exprime que les opérateurs de la forme $(I-T)$ avec $T$ compact sont injectifs si et seulement si ils sont surjectifs, cette propriété (automatique et familière en dimension finie) est remarquable en dimension infinie. Ensuite, l'alternative de Fredholm proprement dite concerne la solvabilité de l'équation $u - Tu = f$. Elle exprime que :

- ou bien pour tout $f \in E$, l'équation $u - Tu = f$ possède une unique solution

- ou bien l'équation homogène $u - Tu = 0$ possède $d = \dim \ker(I - T)$ solutions linéairement indépendantes et dans ce cas, l'équation non homogène $u - Tu = f$ est résoluble si et seulement si $f$ vérifie $d$ conditions d'orthogonalité correspondant à $f \in \ker(I - T^*)^\perp$.

## 4.4 Décomposition spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

Pour la preuve des résultats de ce paragraphe et en particulier l'important théorème spectral, nous renvoyons le lecteur au cours de Frédéric Paulin [10].

Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble résolvant de $T$, $\rho(T)$ est donné par définition par :

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ bijective}\}.$$

Le spectre de $T$, noté $\sigma(T)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant de $T$. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $T$ (notation : $\lambda \in \mathrm{VP}(T)$) si et seulement si $(T - \lambda I)$ n'est pas injective et dans ce cas on appelle $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda$.

On a toujours $\mathrm{VP}(T) \subset \sigma(T)$ mais (hormis évidemment en dimension finie) l'inclusion est stricte. Par exemple pour $T \in \mathcal{L}(l^p)$ défini par $T((x_n)_n) = (0, x_0, x_1, ....)$, 0 est dans le spectre de $T$ car $T$ n'est pas surjective mais n'est pas valeur propre de $T$ car $T$ est injective.

**Proposition 4.3** *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, le spectre de $T$ est un ensemble compact inclus dans l'intervalle* $[-\|T\|, \|T\|]$.

Pour un opérateur compact en dimension infinie on a :

**Théorème 4.7** *Soit $E$ un espace de Banach de dimension infinie et soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors on a :*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \mathrm{VP}(T) \setminus \{0\}$,
3. *l'une des situations suivantes*
   - *ou bien* $\sigma(T) = \{0\}$,
   - *ou bien* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est fini,*
   - *ou bien* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est une suite qui tend vers* 0.

Dans le cas où $E = H$ est un espace de Hilbert, pour $T \in \mathcal{L}(H)$, en identifiant $H'$ à $H$, on peut identifier $T^*$ à un élément de $\mathcal{L}(H)$. Dans ce cadre Hilbertien, les opérateurs autoajoints sont alors définis par :

**Définition 4.2** *Soit $H$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ on dit que $T$ est autoajoint si $T^* = T$ c'est-à-dire si*

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \,, \ \forall (u, v) \in H \times H.$$

Une première propriété spectrale des opérateurs autoadjoints nous est fournie par la

**Proposition 4.4** *Soit $H$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur autoadjoint. On pose*

$$m := \inf\{\langle Tu, u \rangle \,, \ u \in H, \ \|u\| \leq 1\}, \ M := \sup\{\langle Tu, u \rangle \,, \ u \in H, \ \|u\| \leq 1\}.$$

*Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$ et $(m, M) \in \sigma(T)^2$.*

On termine ce chapitre avec une propriété fondamentale des opérateurs compacts et autoadjoints :

**Théorème 4.8** (Théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints) *Soit $H$ un espace de Hilbert séparable et $T$ un opérateur autoadjoint compact de $H$, alors il existe une base hilbertienne de $H$ formée de vecteurs propres de $T$.*

# Chapitre 5

# Espaces $L^p$

On suppose le lecteur familier avec les résultats de base de la théorie de la mesure. On se limitera dans ce chapitre aux espaces de Lebesgue pour la mesure de Lebesgue (ce qui signifie que dans ce chapitre quand on parlera de "presque partout", ce sera au sens de la mesure de Lebesgue) sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^d$, en laissant le soin au lecteur de généraliser les résultats à des espaces plus généraux. Enfin, on notera $|A|$ la mesure de Lebesgue de la partie $A$ de $\mathbb{R}^d$ et $\chi_A$ son indicatrice. On note $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables à valeurs réelles (et l'on identifie naturellement deux éléments de $L^1$ qui coïncident presque partout). Pour $f \in L^1(\Omega)$ on note

$$\|f\|_{L^1} := \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Quand cela n'engendrera pas de confusion, on notera simplement par la suite $L^1$ (et de même pour $L^p$) plutôt que $L^1(\Omega)$ et pour $f \in L^1(\Omega)$, on notera $\int f$ au lieu de $\int_\Omega f(x)dx$.

## 5.1 Rappels d'intégration

Passons en revue quelques résultats de base qu'il faut absolument connaitre.

**Théorème 5.1** (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi) *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante d'éléments de $L^1$. Si $\sup_n \int f_n < \infty$ alors $(f_n)$ converge presque partout vers $f = \sup_n f_n$. De plus $f \in L^1$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ quand $n \to \infty$.*

**Lemme 5.1** (Lemme de Fatou) *Soit* $(f_n)$ *une suite de fonctions* $L^1$ *telle que chaque* $f_n$ *est positive et* $\sup_n \int f_n < \infty$. *Alors* $f := \liminf_n f_n \in L^1$ *et*

$$\int f \leq \liminf_n \int f_n.$$

**Théorème 5.2** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite d'éléments de* $L^1$. *Si* $(f_n(x))$ *converge p.p. vers une limite* $f(x)$ *et s'il existe* $g \in L^1$ *telle que pour tout* $n$, $|f_n\|g$ *p.p. (on dit qu'un tel* $g$ *est une majorante intégrable de* $(f_n)$*) alors* $f \in L^1$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

**Lemme 5.2** (Densité des fonctions continues à support compact) *Soit* $f \in L^1(\Omega)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in C_c(\Omega)$ *tel que* $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

Par convolution avec un noyau régularisant, on en déduit immédiatement

**Théorème 5.3** (Densité des fonctions $C^\infty$ à support compact) *Soit* $f \in L^1(\Omega)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $g \in C_c^\infty(\Omega)$ *tel que* $\|f - g\|_{L^1} \leq \varepsilon$.

Soit maintenant $\Omega$ et $U$ respectivement des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^q$ et $f$ une fonction mesurable $\Omega \times U \to \mathbb{R}$. Dans ce qui suit on notera $g(x) \in L^1_x$ au lieu de $x \mapsto g(x)$ est dans $L^1$. On a alors

**Théorème 5.4** (Fubini) *Si* $f \in L^1(\Omega \times U)$ *alors pour presque tout* $x$, $f(x,y) \in L^1_y(U)$ *et* $\int_U f(x,y)dy \in L^1_x(\Omega)$ *et on a*

$$\int_\Omega \int_U f(x,y)dxdy = \int_\Omega \left( \int_U f(x,y)dy \right) dx.$$

**Théorème 5.5** (Tonelli) *Si pour presque tout* $x$, $f(x,y) \in L^1_y(U)$ *et*

$$\int_\Omega \left( \int_U |f(x,y)|dy \right) dx$$

*alors* $f \in L^1(\Omega \times U)$.

**Exercice 5.1** *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *montrer que*

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} |\{|f| > t\}|dt.$$

**Exercice 5.2** *Soit* $f \in L^1(\Omega)$ *montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\int_A |f| \leq \varepsilon$$

*pour tout mesurable* $A$ *tel que* $|A| \leq \delta$.

## 5.2 Propriétés élémentaires des espaces $L^p$

Soit $p : 1 \leq p < \infty$, on définit :

$$L^p(\Omega) := \{f \ : \ \Omega \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

et pour $f \in L^p(\Omega)$

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

Pour $p = \infty$, $L^\infty$ est par définition l'ensemble des fonctions mesurables $f$ telles qu'il existe $C \geq 0$ tel que $|f| \leq C$ p.p. et pour $f \in L^\infty$

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{C : |f| \leq C \text{ p.p.}\}.$$

Notons que si $f \in L^\infty$ alors on a p.p :

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Nous vérifierons ultérieurement que $\|.\|_{L^p}$ est bien une norme sur $L^p$, cela est évident pour $p = 1$ et $p = \infty$ mais aussi pour $p = 2$ car dans ce cas, $\|.\|_{L^2}$ est la norme associé au produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_\Omega fg$.

Pour $p : 1 \leq p \leq \infty$, on note $p'$ l'exposant conjugué de $p$. Pour $p \in ]1, \infty[$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \text{ i.e. } p' = \frac{p}{p-1}$$

et évidemment $1' = \infty$, $\infty' = 1$.

**Théorème 5.6** (Inégalité de Hölder) *Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ alors $fg \in L^1$ et*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

**Preuve:**
La conclusion est évidente si $p = 1$ ou $p = \infty$ supposons donc $1 < p < \infty$. Par concavité de log on a pour $a$ et $b$ strictement positifs

$$\log\left( \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \right) \geq \log(ab)$$

et donc

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

cette inégalité étant évidente pour $a = 0$ ou $b = 0$. On a donc (en supposant $f$ et $g$ non nulles, ce qui est le cas où l'inégalité de Hölder n'est pas triviale) :

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}}$$

on en déduit que $fg \in L^1$ et on obtient en intégrant l'inégalité précédente :

$$\int_\Omega \frac{|fg|}{\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}} \leq 1.$$

□

**Théorème 5.7** *Soit $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.*

**Preuve:**
A nouveau, la conclusion est évidente si $p = 1$ ou $p = \infty$ supposons donc $1 < p < \infty$. Soit donc $f$ et $g$ dans $L^p$ on a par convexité de $t \mapsto t^p$ :

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

de sorte que $f + g \in L^p$. Pour montrer que $\|.\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$, il nous suffit de montrer l'inégalité triangulaire. Soit $f$ et $g$ dans $L^p$ , on a

$$\|f+g\|_{L^p}^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|$$

et comme $|f + g|^{p-1} \in L^{p/(p-1)} = L^{p'}$, il résulte de l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p}^p &\leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\left(\int |f+g|^p\right)^{(p-1)/p} \\ &= (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\|f+g\|_{L^p}^{p-1}\end{aligned}$$

de sorte que l'on a bien

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

□

**Exercice 5.3** *Soit $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ $(1 \leq p \leq q \leq \infty)$. Montrer que $f \in L^r(\Omega)$, pour tout $r \in [p, q]$ et que*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

*où $\alpha \in [0, 1]$ satisfait*

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{(1-\alpha)}{q}.$$

**Théorème 5.8** *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $p$, $1 \leq p \leq \infty$.*

**Preuve:**
Traitons d'abord le cas $p = \infty$. Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy de $L^p$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe $n_k$ tel que pour tout $m$ et $n \geq n_k$ on a

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}.$$

Ceci implique qu'il existe $E_k$ négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k},\ \forall m, n \geq n_k,\ \forall x \in \Omega \setminus E_k. \tag{5.1}$$

Ainsi pour tout $x \in \Omega \setminus E_k$, $(f_n(x))_n$ est de Cauchy et converge donc vers une limite notée $f(x)$. En posant $E = \cup_k E_k$ (de sorte que $E$ est négligeable) et en passant à la limite $m \to \infty$ dans (5.1) on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k},\ \forall n \geq n_k\ \forall x \in \Omega \setminus E$$

ce qui prouve que $f - f_n$ (et donc $f$) est dans $L^\infty$ et que $\|f_n - f\|_{L^\infty}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

Supposons maintenant $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)$ une suite de Cauchy de $L^p$. Pour montrer que $(f_n)$ converge dans $L^p$, il nous suffit de montrer que $(f_n)$ possède une valeur d'adhérence dans $L^p$. Soit $(f_{n_k})_k$ une sous-suite vérifiant

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k},\ \forall k \geq 1. \tag{5.2}$$

Posons alors $g_k := f_{n_k}$ et

$$h_n := \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k|.$$

Par construction, $(h_n)$ est une suite croissante vérifiant

$$\|h_n\|_{L^p} \leq 1,\ \forall n.$$

Il résulte du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi que $(h_n)$ converge p.p. vers $h \in L^p$. Pour $m \geq n \geq 2$ on a

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq h(x) - h_{n-1}(x) \tag{5.3}$$

et donc pour presque tout $x$, $(g_n(x))$ est une suite de Cauchy de limite $g(x)$. En faisant $m \to \infty$ dans (5.3), on a

$$|g_n - g| \leq h \text{ p.p.} \tag{5.4}$$

et comme $h \in L^p$, on déduit du théorème de convergence dominée de Lebesgue que $\|g_n - g\|_{L^p} \to 0$ ce qui achève la preuve.

$\square$

Il convient de distinguer le cas $p = 2$, en effet $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)g(x)dx,\ \forall (f,g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

**Proposition 5.1** *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p$ et $f \in L^p$. Si $f_n$ converge vers $f$ dans $L^p$ alors $(f_n)$ possède une sous-suite qui admet une majorante $L^p$ et qui converge vers $f$ presque partout.*

**Preuve:**
Le cas $p = \infty$ étant évident on suppose $p \in ]1, \infty[$ et on construit comme dans la preuve précédente $(g_k) = (f_{n_k})$ de sorte que (5.2) soit satisfaite. Comme dans la preuve précédente on a (5.4) avec $h \in L^p$ et $(g_n)$ converge vers $g$ p.p. et dans $L^p$. On a donc $f = g$ et il résulte de (5.4) que $|g_n| \le h + |f| \in L^p$ ce qui fournit la majorante $L^p$ recherchée.

$\square$

## 5.3 Dualité, réflexivité, séparabilité

**Lemme 5.3** (Inégalité de Clarkson) *Soit $p \in [2, \infty[$, pour tout $f$ et $g$ dans $L^p$, on a :*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \le \frac{1}{2}\Big(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\Big).$$

**Preuve:**
On commence par remarquer que $t \mapsto (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc

$$t^p + 1 \le (t^2+1)^{p/2},\ \forall t \ge 0$$

(en remplaçant $t$ par $t/s$ dans l'inégalité précédente) il en résulte que

$$t^p + s^p \le (t^2+s^2)^{p/2}\ \forall t \ge 0,\ \forall s \ge 0$$

et donc pour tout $(f,g) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \le \Big(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2}\Big)^{p/2}$$

en utilisant la convexité de $t \mapsto t^{p/2}$ pour $p \geq 2$, il vient donc

$$\Big|\frac{f+g}{2}\Big|^p + \Big|\frac{f-g}{2}\Big|^p \leq \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p$$

et l'inégalité recherchée en découle immédiatement.

□

Notons que $p = 2$ est un cas limite dans lequel l'inégalité de Clarkson est une égalité (c'est l'identité du parallélogramme !). On déduit immédiatement du lemme précédent :

**Lemme 5.4** *$L^p$ est uniformément convexe pour $2 \leq p < \infty$.*

**Preuve:**
Soit $\varepsilon > 0$, $f$ et $g$ dans $L^p$ avec $\|f\|_{L^p} \leq 1$, $\|g\|_{L^p} \leq 1$ et $\|f-g\|_{L^p} \geq \varepsilon$, il résulte du lemme 5.3 que

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{L^p} \leq 1 - \delta, \text{ avec } \delta := 1 - \Big(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\Big)^{1/p}$$

ce qui prouve $L^p$ est uniformément convexe.

□

Dans le cas ou1 $< p \leq 2$, $L^p$ est également uniformément convexe, la preuve est cependant un peu plus compliquée et repose sur l'inégalité suivante :

**Lemme 5.5** *(Inégalité de Hanner) Soit $p \in ]1, 2]$, pour tout $f$ et $g$ dans $L^p$, on a :*

$$\Big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\Big)^p + \Big|\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}\Big|^p \leq \|f+g\|^p_{L^p} + \|f-g\|^p_{L^p}.$$

**Preuve:**
On commence par remarquer que la fonction $F : (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto F(x, y) = (x^{1/p} + y^{1/p})^p + |x^{1/p} - y^{1/p}|^p$ est convexe et homogène de degré 1. On a donc par l'inégalité de Jensen :

$$F(\int |f|^p, \int |g|^p) \leq \int F(|f|^p, |g|^p)$$

c'est à dire :

$$\Big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\Big)^p + \Big|\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}\Big|^p \leq \int \Big(|f| + |g|\Big)^p + \int \Big||f| - |g|\Big|^p$$

on conclut en remarquant (en distinguant le cas où $f$ et $g$ ont même signe de celui où $f$ et $g$ sont de signes opposés) que l'on a

$$\Big(|f| + |g|\Big)^p + \Big||f| - |g|\Big|^p = |f+g|^p + |f-g|^p.$$

□

**Lemme 5.6** *$L^p$ est uniformément convexe pour* $1 < p \leq 2$.

**Preuve:**
Soit $\varepsilon > 0$, $f$ et $g$ dans $L^p$ avec $\|f\|_{L^p} \leq 1$, $\|g\|_{L^p} \leq 1$ et $\|f-g\|_{L^p} \geq \varepsilon$. Appliquant 'inégalité de Hanner à $(f+g)/2$ et $(f-g)/2$, il vient

$$\Big(\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{L^p}+\Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_{L^p}\Big)^p+\Big|\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{L^p}-\Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_{L^p}\Big|^p \leq \|f\|^p_{L^p}+\|g\|^p_{L^p} \leq 2. \tag{5.5}$$

Posons $\varphi(t) := t^p$ pour tout $t \geq 0$, soit $a \geq b \geq 0$, la formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi(a+b)+\frac{1}{2}\varphi(a-b) &= \varphi(a)+\frac{b^2}{2}\int_0^1(1-t)(\varphi''(a+tb)+\varphi''(a-tb))dt \\ &= a^p+p(p-1)b^2\int_0^1(1-t)\frac{1}{2}(\varphi''(a+tb)+\varphi''(a-tb))dt\end{aligned}$$

utilisant le fait que comme $p \leq 2$, $s > 0 \mapsto s^{p-2}$ est convexe, il vient donc que pour $a \geq b \geq 0$, on a :

$$\frac{1}{2}(a+b)^p+\frac{1}{2}(a-b)^p \geq a^p+p(p-1)b^2a^{p-2}. \tag{5.6}$$

Dans le cas où $\|f+g\|_{L^p} \geq \|f-g\|_{L^p}$, avec (5.5) et (5.6), il vient donc

$$1 \geq \Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|^p_{L^p}+p(p-1)\Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|^2_{L^p}\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|^{p-2}_{L^p}$$

en multipliant par $\|\frac{f+g}{2}\|^{2-p}_{L^p}$ on obtient

$$1 \geq \Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|^{2-p}_{L^p} \geq \Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|^2_{L^p}+p(p-1)\Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|^2_{L^p}$$

de sorte que

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|^2_{L^p} \leq 1-\frac{p(p-1)\varepsilon^2}{4}.$$

Dans le cas où $\|f+g\|_{L^p} \leq \|f-g\|_{L^p}$, on tire immédiatement de (5.5) que

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|^p_{L^p} \leq 2^{1-p}$$

ce qui achève la preuve.
$\square$

Pour résumer, on a donc établi :

**Théorème 5.9** *Pour tout $p \in ]1, \infty[$, $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe.*

On vérifie très facilement "à la main" que $L^1$ et $L^\infty$ ne sont pas uniformément convexes. Il résulte du théorème précédent et du théorème de Milman-Pettis 3.6 :

**Théorème 5.10** *$L^p(\Omega)$ est un espace réflexif pour tout $p$, $1 < p < \infty$.*

Une autre conséquence utile en pratique de l'uniforme convexité de $L^p$ nous est fournie par le théorème 3.7 qui ici se traduit par :

**Théorème 5.11** *Soit $p \in ]1, \infty[$, $(f_n)$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. Si $(f_n)$ converge faiblement vers $f$ dans $L^p$ et si*

$$\lim_n \|f_n\| = \|f\|$$

*alors $(f_n)$ converge fortement dans $L^p$ vers $f$.*

**Exercice 5.4** *Monter que le résultat précédent est faux dans $L^1$ (faible) et $L^\infty$ (faible $*$).*

Le résultat de représentation suivant montre que si $1 < p < \infty$, on peut identifier $(L^p)'$ à $L^{p'}$ :

**Théorème 5.12** (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $p : 1 < p < \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ alors il existe un unique $u \in L^{p'}$ tel que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \ \forall f \in L^p(\Omega)$$

*de plus on a*

$$\|\varphi\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}}.$$

**Preuve:**
Définissons $T : L^{p'} \to (L^p)'$ par

$$\langle Tu, f \rangle := \int_\Omega uf, \forall u \in L^{p'}, \ \forall f \in L^p.$$

Il résute de l'inégalité de Hölder que $T$ est continue et plus précisément :

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \leq \|u\|_{L^{p'}}, \ \forall u \in L^p.$$

Soit $u \in L^{p'}$, $u \neq 0$, alors $f := |u|^{p'-2}u$ appartient à $L^p$ et donc

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \geq \frac{\int fu}{\|f\|_{L^p}} = \|u\|_{L^p}.$$

On en déduit donc que $T$ est une isométrie de $L^{p'}$ dans $(L^p)'$. En particulier, $T$ est injective, ce qui montre l'unicité. Pour l'existence il s'agit de montrer que $T$ est surjective, $T(L^p)$ étant fermé, il suffit de montrer que $T(L^{p'})$ est dense dans $(L^p)'$. Soit $h \in (L^p)''$ tel que $h \equiv 0$ sur $T(L^{p'})$ comme $L^p$ est réflexif, on peut identifier $h$ à un élément (encore noté $h$) de $L^p$, en prenant $u := |h|^{p-2}h \in L^{p'}$, on a alors

$$\langle Tu, h\rangle = 0 = \int |h|^p = 0$$

et donc $h = 0$ ce qui montre que $T(L^{p'})$ est dense dans $(L^p)'$.

□

S'agissant du dual de $L^1$ on a le théorème de représentation suivant :

**Théorème 5.13** *Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ alors il existe un unique $u \in L^\infty$ tel que*

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf,\ \forall f \in L^1(\Omega)$$

*de plus on a*

$$\|\varphi\|_{(L^1)'} = \|u\|_{L^\infty}.$$

**Preuve:**

Montrons l'existence d'un $u$ dans $L^\infty$ représentant $\varphi$. Soit $K$ un compact inclus dans $\Omega$, pour $f \in L^2$ on a

$$|\langle \varphi, \chi_K f\rangle| \leq \|\varphi\|_{(L^1)'}|K|^{1/2}\|f\|_{L^2}$$

de sorte que $f \in L^2 \mapsto \langle \varphi, \chi_K f\rangle$ est dans $(L^2)' = L^2$. Par le théorème de Riesz pour les Hilbert ou le théorème 5.12, il existe donc $u_K \in L^2$ telle que

$$\langle \varphi, \chi_K f\rangle = \int_\Omega f u_K, \forall f \in L^2$$

on vérifie aisément que $u_K$ est nécessairement de la forme $u_K = \chi_K u$ avec $u \in L^2_{\rm loc}$. En particulier on a

$$\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf,\ \forall f \in C_c(\Omega). \tag{5.7}$$

Montrons que $u \in L^\infty$ et plus précisément que $|u| \leq \|\varphi\|_{(L^1)'}$ p.p. ; si tel n'était pas le cas, il existerait $\delta > 0$ tel que

$$A_\delta := \left\{|u| \geq \|\varphi\|_{(L^1)'} + \delta\right\}$$

soit de mesure strictement positive, ceci entrainant qu'il existe $K$ compact inclus dans $\Omega$ tel que $K_\delta := K \cap A_\delta$ soit aussi de mesure strictement positive. Soit alors $f := \chi_{K_\delta}\mathrm{sg(u)}$ on a alors

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{(L^1)'}\|f\|_{L^1} = \|\varphi\|_{(L^1)'}|K_\delta| \\ \geq \langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega uf = \int_{K_\delta} |u| \\ \geq |K_\delta|\Big(\|\varphi\|_{(L^1)'} + \delta\Big)\end{aligned}$$

ce qui constitue la contradiction recherchée. On a donc $u \in L^\infty$ et $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)'}$. Par densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^1$ avec (5.7), on a donc

$$\langle \varphi, f\rangle = \int uf,\ \forall f \in L^1(\Omega)$$

ce qui implique aussi $\|\varphi\|_{(L^1)'} \leq \|u\|_{L^\infty}$. Enfin l'unicité de $u \in L^\infty$ représentant $\varphi$ découle immédiatement du lemme 2.7.

□

Le résultat précédent précédent prouve en particulier que $L^\infty$ est un dual topologique, on pourra donc en particulier lui appliquer le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki.

**Théorème 5.14** *Soit $p \in [1, +\infty[$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

**Preuve:**

Soit $T \in (L^p)'$ tel que $T(\varphi) = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$. Il résulte des théorèmes 5.12 et 5.13 qu'il existe $u \in L^{p'}$ (en particulier $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$) représentant $T$, on a alors $\{u\} = 0$ dans $\mathcal{D}'$ et donc $u = 0$ p.p. en vertu du Lemme 2.7. On a donc $T = 0$, on en conclut que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ grâce au corollaire 1.5

□

**Théorème 5.15** *$L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $p \in [1, \infty[$.*

**Preuve:**

Soit $E$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'indicatrices de pavés de la forme $\Pi_{i=1}^d ]x_i, y_i[$ inclus dans $\Omega$ et avec les $x_i$, $y_i$ à coordonnées rationnelles. Par construction $E$ est dénombrable, il nous suffit donc de montrer que $E$ est dense dans $L^p(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, on commence par choisir $g \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f-g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon/2$. Soit $\omega$ un ouvert borné contenant $\text{supp}(g)$, en utilisant l'uniforme continuité de $g$, on construit facilement $h \in E$ tel que $\text{supp}(h) \subset \omega$ et $\|g-h\|_{L^\infty(\omega)} \leq \varepsilon/(2|\omega|^{1/p})$, de sorte que l'on a $\|g-h\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon/2$ et donc aussi $\|f-h\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$.

□

Notons que $L^2$ est un Hilbert séparable. En particulier, $L^2$ admet des bases Hilbertiennes, mieux encore : on peut appliquer le théorème de décomposition spectrale dans $L^2$, nous reviendrons sur ce point plus en détail par la suite.

Comme $L^1$ est séparable et $L^\infty = (L^1)'$, on déduit du corollaire 3.6 du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki :

**Théorème 5.16** *Toute suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ possède une sous-suite convergente pour la topologie faible-$*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Nous avons laissé en suspens la question de la réflexivité de $L^1$ et $L^\infty$, à cette question, la réponse est négative :

**Théorème 5.17** *$L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ ne sont pas réflexifs.*

**Preuve:**
Comme $(L^1)' = L^\infty$, en vertu du corollaire 3.2 , il nous suffit de montrer que $L^1$ n'est pas réflexif c'est à dire que $L^1 \neq (L^\infty)'$. Soit $x_0 \in \Omega$ et $\varphi$ la forme linéaire sur $C_c(\Omega)$ définie par

$$\langle \varphi, f \rangle := f(x_0),\ \forall f \in C_c(\Omega)$$

comme $\langle \varphi, f \rangle \leq \|f\|_{L^\infty}, \forall f \in C_c(\Omega)$, grâce au théorème de Hahn-Banach, on peut prolonger $\varphi$ en un élément de $(L^\infty)'$ (qu'on notera encore $\varphi$). S'il existait $u \in L^1$ représentant $\varphi$, on aurait en particulier $\{f\} = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega \setminus \{x_0\})$ ce qui avec le lemme 2.7 entrainerait $f = 0$ p.p. sur $\Omega \setminus \{x_0\}$ et donc aussi $f = 0$ p.p. sur $\Omega$, on aurait alors $\varphi = 0$ ce qui est absurde.

□

Le résultat qui suit va nous permettre de répondre négativement à la question de la séparabilité de $L^\infty$ :

**Lemme 5.7** *Soit $E$ un evn, s'il existe, $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides de $E$ vérifiant $I$ non dénombrable et $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $(i,j) \in I^2$ et $i \neq j$ alors $E$ n'est pas séparable.*

**Preuve:**
Supposons par l'absurde que $(u_n)$ soit dense dans $E$ alors pour chaque $i \in I$, il existe $n = n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. Comme $i \in I \mapsto n(i)$ est injective on en déduit que $I$ est au plus dénombrable, d'où la contradiction recherchée.

□

**Proposition 5.2** *$L^\infty$ n'est pas séparable.*

**Preuve:**
Soit $x \in \Omega$ et $r_x < d(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$, posons $u_x := \chi_{B(x,r_x)}$ et

$$O_x := \left\{ u \in L^\infty : \|f - u_x\|_{L^\infty} < \frac{1}{2} \right\}.$$

On vérifie facilement que la famille $(O_x)_{x\in\Omega}$ vérifie les hypothèses du lemme 5.7 dans $L^\infty$ et donc que $L^\infty$ n'est pas séparable.
□

**Exercice 5.5** *Soit $(\rho_n)$ une suite régularisante et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ montrer que $\rho_n \star f$ converge vers $f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

**Exercice 5.6** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $p : 1 < p < \infty$. Soit $(u_n)$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $u \in L^p(\Omega)$ tels que $u_n \rightharpoonup u$ pour $\sigma(L^p, L^{p'})$ et il existe $\lambda \geq 0$ tel que $|\{|u_n| \geq \lambda\}| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $u \in L^\infty$ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \lambda$.*

**Exercice 5.7** *(Théorème de Lusin) Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f$ mesurable $\Omega \to \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\Omega)$ tel que $|\{f \neq g\}| \leq \varepsilon$. Dans le cas où $f \in L^\infty$ montrer que $g$ peut être choisie satisfaisant en plus $\|g\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty}$*

**Exercice 5.8** *(Théorème d'Egorov) Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, $(f_n)$ et $f$ mesurables telles que $(f_n)$ converge vers $f$ p.p. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \subset \Omega$ mesurable tel que $|\Omega \setminus A_\varepsilon| \leq \varepsilon$ et $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A_\varepsilon$.*

**Exercice 5.9** *Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, montrer que*

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0$$

*(on rappelle que $\tau_h f(x) := f(x+h)$).*

## 5.4 Compacité dans $L^p$

Nous avons déja vu que $L^p$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ il résulte donc du théorème de Kakutani que les parties bornées de $L^p$ sont faiblement relativement compactes et du théorème 3.5 (ou du fait que $L^{p'}$ est séparable) que les suites bornées de $L^p$ admettent des sous-suites faiblement convergentes :

**Théorème 5.18** *Soit $p \in ]1, \infty[$. Toute partie bornée de $L^p$ est faiblement relativement compacte. Toute suite bornée de $L^p$ possède une sous-suite qui converge faiblement $\sigma(L^p, L^{p'})$.*

Pour $p = \infty$, comme $L^\infty = (L^1)'$ on a comme conséquence immédiate du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki d'une part et de la séparabilité de $L^1$ et du corollaire 3.6 d'autre part :

**Théorème 5.19** *Toute partie bornée de $L^\infty$ est faiblement $*$ relativement compacte. Toute suite bornée de $L^\infty$ possède une sous-suite qui converge faiblement -$*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Pour la compacité forte, on a le critère suivant :

**Théorème 5.20** (Théorème de compacité de Riesz-Fréchet-Kolmogorov) *Soit $p \in [1, \infty[$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\Omega)$. Si d'une part pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe $\delta$ : $0 < \delta < d(\omega, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ tel que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \varepsilon, \ \forall h \in \mathbb{R}^d \ : \ |h| \leq \delta$$

*et d'autre part pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\omega \subset\subset \Omega$ (i.e. $\omega$ ouvert, $\overline{\omega}$ compact et inclus dans $\Omega$) tel que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \varepsilon$$

*alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(\Omega)$.*

**Preuve:**

Comme $L^p(\Omega)$ est complet il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est précompact dans $L^p(\Omega)$. Soit donc $\varepsilon > 0$, il s'agit de montrer que $\mathcal{F}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon$ de $L^p(\Omega)$. On commence par choisir $\omega \subset\subset \Omega$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{5.8}$$

c'est à dire

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f - f\chi_\omega\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.9}$$

Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^{-1} < d(\omega, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ et

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall h \in \mathbb{R}^d \ : \ |h| \leq n^{-1}. \tag{5.10}$$

Soit $\rho_n$ un noyau régularisant ($C^\infty$, positif, à support dans $B(0, n^{-1})$ et d'intégrale 1) et

$$\mathcal{F}_{n,\omega} := \{(\rho_n \star f) \mid_{\overline{\omega}}, \ f \in \mathcal{F}\}.$$

Pour $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \Omega$ on a

$$|(\rho_n \star f - f)(x)| \leq \int_{B(0,n^{-1})} \rho_n(h) |\tau_{-h} f(x) - f(x)| dh$$

et donc avec l'inégalité de Jensen

$$|(\rho_n \star f - f)(x)|^p \leq \int_{B(0,n^{-1})} \rho_n(h) |\tau_{-h} f(x) - f(x)|^p dh$$

et donc en utilisant le théorème de Fubini et (5.10) on a

$$\|\rho_n \star f - f\|_{L^p(\omega)}^p \leq \int_{B(0,n^{-1})} \rho_n(h) \|\tau_{-h} f - f\|_{L^p(\omega)}^p dh \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p$$

ainsi

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\rho_n \star f - f\|_{L^p(\omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.11}$$

Pour $f \in \mathcal{F}$ on a

$$\|\rho_n \star f\|_{L^\infty(\omega)} \leq \|\rho_n\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

et

$$\|\nabla(\rho_n \star f)\|_{L^\infty(\omega)} \leq \|\nabla \rho_n\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p}$$

de sorte que $\mathcal{F}_{n,\omega}$ est uniformément bornée et équilipschitzienne et donc, en vertu du théorème d'Ascoli, relativement compact dans $C(\overline{\omega})$ et donc aussi dans $L^p(\omega)$. Il existe donc $N$ et $g_1, ..., g_N$ dans $L^p(\omega)$ (qu'on prolonge par 0 en dehors de $\omega$) tel que

$$\mathcal{F}_{n,\omega} \subset \bigcup_{i=1}^N B(g_i, \frac{\varepsilon}{3}).$$

Grâce à (5.9) et (5.11) on en déduit que

$$\mathcal{F}_{n,\omega} \subset \bigcup_{i=1}^N B(g_i, \varepsilon)$$

ce qui achève la démonstration.

□

**Exercice 5.10** *Montrer que les conditions sur $\mathcal{F}$ dans le Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sont en fait aussi nécessaires pour la relative compacité de $\mathcal{F}$.*

**Exercice 5.11** *Soit $g \in L^1$, $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, montrer que $\{(g \star f)\chi_\omega,\ f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$. Le résultat précédent est-il vrai quand on remplace $\omega$ par $\mathbb{R}^d$ ?*

## 5.5 Compacité faible dans $L^1$

**Définition 5.1** *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$, alors $\mathcal{F}$ est dite uniformément intégrable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que*

$$\int_A |f| \leq \varepsilon, \text{ pour tout } f \in \mathcal{F} \text{ et tout } A \subset \Omega \text{ tel que } |A| \leq \delta. \tag{5.12}$$

Le théorème de Dunford-Pettis énonce que l'uniforme intégrabilité est une condition nécessaire et suffisante de relative compacité faible dans $L^1$. Nous nous contenterons ici de démontrer le caractère suffisant pour la compacité faible séquentielle, la preuve du caractère nécessaire étant a priori moins utile, nous renvoyons le lecteur intéressé à [4] pour plus de détails.

**Théorème 5.21** (Dunford-Pettis) *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$, alors si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, de toute suite de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous suite convergeant pour $\sigma(L^1, L^\infty)$.*

**Preuve:**
On commence par remarquer que l'on peut supposer les éléments de $\mathcal{F}$ positifs (écrire $f = f_+ - f_-$ et remarquer que $\{f_\pm,\ f \in \mathcal{F}\}$ sont uniformément intégrables). Soit $(f_n)$ une suite de $\mathcal{F}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n^k := f_n \chi_{\{f_n \leq k\}}$. Soit $C = \sup_n \int f_n$, on a

$$C \geq \int f_n \geq k|\{f_n > k\}|$$

il résute donc de l'uniforme intégrabilité de $\mathcal{F}$ que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \int_{\{f_n > k\}} f_n = 0$$

et donc que

$$\delta^k := \sup_n \|f_n - f_n^k\|_{L^1} = \sup_n \int_{\{f_n > k\}} f_n \to 0 \text{ quand } k \to \infty. \tag{5.13}$$

On remarque ensuite que comme $(f_n^k)_n$ est bornée dans $L^\infty$, elle admet une sous-suite qui converge pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ et donc a fortiori pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ (c'est ici qu'intervient le fait que $\Omega$ soit borné). On applique alors le procédé habituel d'extraction diagonal de Cantor. Pour tout $k$, il existe $\varphi_k$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et il existe $f^k \in L^\infty$ tels que $(f^k_{\varphi_k(n)})$ converge vers $f^k$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ quand $n \to \infty$ (et on choisit $\varphi_{k+1}$ de la forme $\varphi_{k+1} = \varphi_k \circ \psi_k$ avec $\psi_k$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ de sorte que $(f^l_{\varphi_k(n)})$ converge vers $f^l$ pour $l \leq k$). On a

$$\int f^k \leq \liminf_n \int f^k_{\varphi_k(n)} \leq \liminf_n \int f_{\varphi_k(n)} \leq C$$

et de plus $(f^k)$ est croissante par rapport à $k$ (passer à la limite dans $\int g(f_n^{k+1} - f_n^k) \geq 0$ pour $g \geq 0$, $g \in L^\infty$). Il résulte donc du théorème de convergence monotone de Beppo-Levi que $(f_n)$ converge fortement dans $L^1$ vers $f$. Il nous reste maintenant à montrer que $(f_{\varphi(n)})$ (avec $\varphi(n) := \varphi_n(n)$) converge vers $f$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$. Soit $g \in L^\infty$, $\varepsilon > 0$ et $k_0$ tel que

$$\|g\|_\infty(\delta_{k_0} + \|f^{k_0} - f\|_{L^1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

on a alors

$$\begin{aligned}\Big|\int g(f_{\varphi(n)} - f)\Big| &= \Big|\int g(f_{\varphi(n)} - f^{k_0}_{\varphi(n)} + f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0} + f^{k_0} - f)\Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \Big|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\Big|\end{aligned}$$

et comme $(f^{k_0}_{\varphi(n)})_n$ converge faiblement dans $L^1$ vers $f^{k_0}$, on a pour $n$ assez grand

$$\Big|\int g(f_{\varphi(n)} - f)\Big| \leq \varepsilon$$

ce qui achève la preuve.

$\Box$

**Exercice 5.12** *Montrer que l'uniforme intégrabilité est aussi une condition nécessaire à la relative compacité faible séquentielle.*

**Exercice 5.13** *Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement si*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \to 0, \text{ quand } M \to +\infty.$$

**Exercice 5.14** *(Critère de de La Vallée-Poussin) Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^1(\Omega)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante (et que l'on peut en outre choisir convexe) et telle que $g(t)/t \to +\infty$ quand $t \to \infty$ et*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\Omega} g(|f(x)|)dx < +\infty.$$

Pour les suites bornées de $L^1$ (mais non nécessairement uniformément intégrables) on a le résultat suivant que nous donnons ici sans démonstration :

**Lemme 5.8** (Biting Lemma) *Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $(f_n)$ une suite bornée de $L^1(\Omega)$. Il existe une suite décroissante d'ensemble mesurables $(E_k)$ telle que $|E_k| \to 0$ et une sous suite de $(f_n)$, $(f_{n_k})$ tels que $(\chi_{\Omega\setminus E_k} f_{n_k})$ soit uniformément intégrable.*

Nous évoquerons au prochain chapitre le principe de concentration-compacité de Pierre-Louis Lions qui donne précisément les différents comportements possibles des suites de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

# Chapitre 6

# Espaces de mesures

## 6.1 Rappels sur les espaces de fonctions continues

Rappelons à toutes fins utiles le théorème d'Ascoli-Arzelà que nous avons d'ailleurs déjà utilisé à plusieurs reprises

**Théorème 6.1** (Théorème d'Ascoli-Arzelà) *Soit $(K, d)$ un espace métrique compact et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $C(K)$ uniformément équicontinue c'est à dire vérifiant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x_1, x_2) \in K^2$ si $d(x_1, x_2) \leq \delta$ alors*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{F}.$$

*Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C(K)$.*

En pratique, pour montrer l'uniforme équicontinuité d'une famille $\mathcal{F}$ on montre souvent (et c'est équivalent !) qu'elle possède un module de continuité uniforme c'est à dire une fonction croissante $\omega$ tendant vers 0 en 0 et telle que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega(d(x_1, x_2)), \ \forall (x_1, x_2) \in K^2 \times \mathcal{F}.$$

Pour $\omega(t) = Ct$, on a une famille équilipschitzienne, pour $\omega(t) = Ct^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$, une famille équi-Hölderienne d'exposant $\alpha$....

**Proposition 6.1** (Lemme d'Urysohn) *Soit $(X, d)$ un espace localement compact (c'est à dire dont tout point possède un voisinage compact) soit $K$ une partie non vide compacte de $X$ et $V$ un ouvert contenant $K$ alors il existe $f \in C_c(X)$ tel que $\chi_K \leq f \leq \chi_V$.*

**Preuve:**
Il est facile de voir qu'il existe $O$, voisinage ouvert et relativement compact de $K$ contenu dans $V$. En posant :

$$f(x) := \frac{d(x, X \setminus O)}{d(x, K) + d(x, X \setminus O)}, \ \forall x \in X$$

il est clair que $f$ a les propriétés requises.
$\square$

**Proposition 6.2** (Partition de l'unité) *Soit $(X, d)$ un espace localement compact, $K$ une partie compacte de $X$ et $V_1, ..., V_n$ un recouvrement ouvert de $K$. Il existe $g_1, .., g_n \in C_c(X)^n$ vérifiant $0 \leq g_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(g_i) \subset V_i$ et*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1, \ \forall x \in K.$$

*La famille $g_1, .., g_n$ s'appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_1, ..., V_n$ de $K$.*

**Preuve:**
Pour tout $x \in K$, il existe $W_x$ un voisinage ouvert de $x$ tel que $\overline{W}_x$ soit compact et inclus dans l'un des $V_i$. Par compacité de $K$, on peut le recouvrir par les ouverts $W_{x_j}$, $j = 1, ..., p$. On définit alors pour $i = 1, ..., n$

$$K_i := \bigcup_{j \,:\, \overline{W}_{x_j} \subset V_i} \overline{W}_{x_j}.$$

On déduit du Lemme d'Urysohn qu'il existe $f_i \in C_c(X)$, tel que $\chi_{K_i} \leq f_i \leq \chi_{V_i}$. Définissons

$$g_1 := f_1, \ g_2 := f_2(1 - f_1), ...., \ g_n := f_n(1 - f_{n-1})....(1 - f_1)$$

on a alors

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1 - (1 - f_1(x))...(1 - f_n(x))$$

or si $x \in K$, $x \in K_i$ pour un certain $i$ et donc $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$.
$\square$

**Théorème 6.2** (Prolongement de Tietze) *Soit $(K, d)$ un espace métrique compact, $F$ un fermé de $K$ et $f \in C(F)$, alors $f$ admet un prolongement continu à $K$.*

**Preuve:**
Soit $\omega$ un module de continuité de $f$ sur $F$ (correctement défini car $F$ est compact et donc $f$ est uniformément continue sur $F$) qu'on suppose sans perte de généralité sous-additif ($\omega(s+t) \le \omega(s) + \omega(t)$). Pour tout $x \in K$ posons

$$g(x) := \inf_{y \in F} \{f(y) + \omega(d(x,y))\}$$

on vérifie sans peine que $g$ prolonge $f$ et admet $\omega$ comme module de continuité. $\Box$

**Théorème 6.3** *Si $(K,d)$ est un espace métrique compact alors $C(K)$ est séparable.*

**Preuve:**
$K$ étant compact, il est séparable ; soit donc $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans $K$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on déduit du lemme d'Urysohn qu'il existe $f_{i,n} \in C(K)$ vérifiant

$$\chi_{\overline{B}(x_i, 2^{-n-1})} \le f_{i,n} \le \chi_{B(x_i, 2^{-n})}.$$

Pour tout $n$, il existe $I_n \subset \mathbb{N}$ fini tel que

$$K = \bigcup_{i \in I_n} B(x_i, 2^{-n-1})$$

on pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in I_n$ :

$$g_{i,n}(x) := \frac{f_{i,n}(x)}{\sum_{j \in I_n} f_{j,n}(x)}, \ \forall x \in K.$$

On vérifie sans peine que l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par la famille $\{g_{i,n},\ n \in \mathbb{N},\ i \in I_n\}$ est dense dans $C(K)$.
$\Box$

On déduit des résultats précédents que si l'espace métrique $(X,d)$ est $\sigma$-compact (i.e. réunion d'une suite croissante de compacts $K_n$) alors $C_c(X)$ (limite inductive des espaces $C_{K_n}(X)$) est séquentiellement séparable.

## 6.2 Théorème de Riesz et mesures de Radon dans le cas compact

On rappelle que si $(X,d)$ est un espace métrique (ici on ne considèrera par simplicité que ce cas même si la plupart des résultats de ce chapitre s'étendent au cas séparé), sa tribu Borélienne, $\mathcal{B}_X$, est par définition la tribu engendrée par ses ouverts. Une mesure borélienne sur $X$ est une mesure définie sur la tribu borélienne de $X$ (c'est à dire une application $\sigma$-additive de $\mathcal{B}_X$ à valeurs dans $[0,\infty]$). Nous omettrons parfois par la suite le terme borélienne, étant entendu implicitement que nous ne considèrerons que des mesures boréliennes. On dit en outre que $\mu$ est finie si $\mu(X) < +\infty$ et que $\mu$ est $\sigma$-finie s'il existe une suite croissante de Boréliens $B_n$ telle que $X = \bigcup_n B_n$ et $\mu(B_n) < +\infty$ pour tout $n$. Les mesures boréliennes régulières sont définies comme suit :

**Définition 6.1** *Soit $(X,d)$ un espace métrique et $\mu$ une mesure borélienne sur $X$ alors $\mu$ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}_X$ on a*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \ : O \textit{ ouvert}, \ A \subset O\}$$

*et*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \ : K \textit{ compact}, \ K \subset A\}.$$

Si $(X,d)$ est compact et $\mu$ est une mesure borélienne finie alors la forme linéaire $T_\mu$ définie par

$$T_\mu(f) := \int_X f d\mu, \ \forall f \in C(X)$$

est continue ($|T_\mu(f)| \leq \|f\|\mu(X)$) et positive au sens où $T_\mu(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$. Comme on a $T_\mu(1) = \mu(X)$ on a :

$$\|T_\mu\|_{C(X)'} = \mu(X).$$

Le théorème de représentation de Riesz énonce (entre autres) que réciproquement toute forme linéaire continue et positive sur $C(X)$ se représente par une mesure borélienne finie.

**Théorème 6.4** (Théorème de représentation de Riesz, cas compact et positif) *Soit $(X,d)$ un espace métrique compact et $T$ une forme linéaire* **continue** *et* **positive** *sur $C(X)$. Il existe une unique mesure borélienne* **finie** *et* **régulière** *$\mu$ sur $X$ telle que $T = T_\mu$.*

**Preuve:**

Nous allons diviser la preuve (qui n'est pas compliquée mais relativement longue si l'on veut en donner tous les détails) en plusieurs étapes.

**Etape 1 : unicité**

Si deux mesures (positives) boréliennes $\mu$ et $\nu$ représentent $T$ on a $\int_X f d\mu = \int_X f d\nu$ pour tout $f \in C(X)$. Soit $K$ un fermé (donc un compact) de $X$ et $V_n := \{x \in X \ : \ d(x, K) < 1/n\}$, par le lemme d'Urysohn, il existe $f_n \in C(X)$ tel que $\chi_K \leq f_n \leq \chi_{V_n}$, on a donc

$$\mu(K) \leq \int_X f_n d\mu = \int_X f_n d\nu \leq \nu(V_n)$$

et donc

$$\mu(K) \leq \lim_n \nu(V_n) = \nu\Big(\bigcap_n V_n\Big) = \nu(K).$$

On en déduit que $\mu$ et $\nu$ coïncident sur les fermés, un argument classique de classe monotone permet d'en déduire que $\mu = \nu$.

**Etape 2 : définition et propriétés de $\mu$ sur les ouverts et sur les compacts**

Pour tout ouvert $V$ de $X$ on pose

$$\mu(V) := \sup\{T(f),\ f \in C(X),\ 0 \leq f \leq \chi_V\}. \tag{6.1}$$

Par construction $\mu$ est positive et monotone au sens où si $V_1$ et $V_2$ sont des ouverts et si $V_1 \subset V_2$, alors $\mu(V_1) \leq \mu(V_2)$. Soit $(V_n)_n$ des ouverts de $X$ et $f \in C(X)$ tel que $0 \leq f \leq \chi_{\cup_n V_n}$ comme $\mathrm{supp}(f)$ est compact, il existe $N$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset \cup_{n=1}^N V_n$. Soit $g_1, ..., g_N$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_1, ..., V_N$. Utilisant la linéarité de $T$ et le fait que $0 \leq f g_n \leq \chi_{V_n}$, on a alors

$$T(f) = \sum_{n=1}^N T(f g_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu(V_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(V_n)$$

passant au supremum sur tous les $f \in C(X)$ tels que $0 \leq f \leq \chi_{\cup_n V_n}$ on en déduit

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty V_n\Big) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(V_n). \tag{6.2}$$

Soit maintenant $V_1$ et $V_2$ ouverts disjoints et $\varepsilon > 0$ et pour $i = 1, 2$, $f_i \in C(X)$ tel que $0 \leq f_i \leq \chi_{V_i}$ et

$$T(f_i) \geq \mu(V_i) - \frac{\varepsilon}{2}$$

on a alors $0 \leq f_1 + f_2 \leq \chi_{V_1} + \chi_{V_2} = \chi_{V_1 \cup V_2}$ de sorte que

$$\mu(V_1 \cup V_2) \geq T(f_1 + f_2) \geq \mu(V_1) + \mu(V_2) - \varepsilon.$$

On a donc $\mu(V_1 \cup V_2) = \mu(V_1) + \mu(V_2)$ pour tout couple $V_1$, $V_2$ d'ouverts disjoints. On en déduit qu'on a la propriété d'additivité sur les ouverts : pour toute famille finie d'ouverts disjoints $V_1, ..., V_N$ on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} V_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(V_n). \tag{6.3}$$

Pour tout compact (i.e. fermé) $K$ de $X$, on pose

$$\mu(K) := \inf\{\mu(V) \ : \ V \text{ ouvert}, \ K \subset V\}.$$

Evidemment, $\mu$ ainsi définie sur les compacts est monotone pour l'inclusion (et par monotonie, on vérifie sans peine que si $K$ est à la fois ouvert et fermé alors les deux définitions de $\mu(K)$ coïncident). Soit $K_1$ et $K_2$ deux compacts, $\varepsilon > 0$ et $V_1$, $V_2$ deux ouverts tels que $K_1 \subset V_1$, $K_2 \subset V_2$ et

$$\mu(V_1) \leq \mu(K_1) + \frac{\varepsilon}{2}, \ \mu(V_2) \leq \mu(K_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

on a alors avec (6.2)

$$\mu(K_1 \cup K_2) \leq \mu(V_1 \cup V_2) \leq \mu(V_1) + \mu(V_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2) + \varepsilon.$$

Supposons maintenant que les compacts $K_1$ et $K_2$ sont disjoints. Soit $\varepsilon > 0$ et $V$ ouvert contenant $K_1 \cup K_2$ tel que $\mu(V) \leq \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$, il existe alors $V_1$ et $V_2$ ouverts disjoints contenant respectivement $K_1$ et $K_2$ tels que $V_1 \cup V_2 \subset V$ et donc

$$\begin{aligned} \mu(K_1 \cup K_2) &\geq \mu(V) - \varepsilon \geq \mu(V_1 \cup V_2) - \varepsilon \\ &= \mu(V_1) + \mu(V_2) - \varepsilon \geq \mu(K_1) + \mu(K_2) - \varepsilon \end{aligned}$$

on a donc $\mu(K_1 \cup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$ pour tout couple $K_1$, $K_2$ de compacts disjoints et par suite, pour toute famille finie de compacts disjoints $K_1, ..., K_N$ on a :

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} K_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n). \tag{6.4}$$

**Etape 3 : mesure intérieure, mesure extérieure**

Pour tout $A \subset X$, on définit

$$\mu_*(A) := \sup\{\mu(K) \ : \ K \text{ compact}, \ K \subset A\}$$

et

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(V) \ : \ V \text{ ouvert}, \ A \subset V\}.$$

Il est facile de voir que $\mu_* \leq \mu^*$ et que $\mu_*$ et $\mu^*$ sont monotones pour l'inclusion. On pose ensuite

$$\mathcal{B} := \{A \subset X \ : \ \mu_*(A) = \mu^*(A)\}$$

et l'on définit $\mu = \mu_* = \mu^*$ sur $\mathcal{B}$. Notons que par construction, les compacts appartiennent à $\mathcal{B}$. Montrons que $\mathcal{B}$ contient aussi les ouverts. Par construction, pour tout ouvert $V$ on a $\mu(V) = \mu^*(V) \geq \mu_*(V)$. Il s'agit de montrer l'inégalité inverse, soit donc $f \in C(X)$ tel que $0 \leq f \leq \chi_V$, posons $K := \text{supp}(f)$ et soit $W$ un ouvert contenant $K$, d'adhérence incluse dans $V$. D'après le lemme d'Urysohn, il existe $g \in C(X)$ tel que $\chi_K \leq g \leq \chi_W$. Comme $\overline{W}$ est compact et inclus dans $V$ et par monotonie de $T$ on a donc

$$Tf \leq Tg \leq \mu(W) \leq \mu(\overline{W}) \leq \mu_*(V)$$

passant au supremum sur $f$ on a obtient $\mu(V) \leq \mu_*(V)$. Ainsi $\mathcal{B}$ contient les ouverts de $X$.

**Etape 4 : premières propriétés de $\sigma$-additivité**

Soit $(A_n)_n \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ disjoints on se propose de montrer que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B} \text{ et } \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{6.5}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $n$ soit $K_n$ un compact inclus dans $A_n$ tel que

$$\mu(K_n) \geq \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

on a alors (en utilisant la monotonie de $\mu_*$, le fait que les $K_n$ soient disjoints et (6.4))

$$\begin{aligned}\mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) &\geq \mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N} K_n\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \mu(K_n) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) - \varepsilon.\end{aligned}$$

et donc

$$\mu_*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{6.6}$$

Soit $V_n$ un ouvert contenant $A_n$ et tel que

$$\mu(V_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

on a alors en utilisant (6.2)

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\Big) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(V_n)$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon$$

Avec (6.6), et le fait que $\mu_* \le \mu^*$, on en déduit bien (6.5).

**Etape 5 : $\mathcal{B}$ est une $\sigma$-algèbre contenant les boréliens.**

Avec ce qui précède, il est facile d'établir que

$$\mathcal{B} = \{A \subset X \ : \ \forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ (compact)} \subset A \subset V \text{ (ouvert) et } \mu(V \setminus K) \le \varepsilon\}$$

on en déduit immédiatement que $\mathcal{B}$ est stable par complémentaire et donc, avec l'étape 4 que $\mathcal{B}$ est une $\sigma$-algèbre. Comme $\mathcal{B}$ contient les ouverts (étape 3), $\mathcal{B}$ contient les boréliens. En outre, il résulte de l'étape 4 que $\mu$ est $\sigma$-additive sur $\mathcal{B}$ et par construction $\mu$ est régulière (ou plus précisément sa restriction à $\mathcal{B}_X$ est régulière).

**Etape 6 : $\mu$ représente $T$.**

Soit $f \in C(X)$, montrons que $T(f) = \int_X f d\mu$, par linéarité notons qu'il suffit de montrer $T(f) \ge \int_X f d\mu$. Comme $T(1) = \mu(X)$, on peut sans perte de généralité (ajout d'une constante à $f$ et homogénéité) supposer que $0 \le f \le 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = N_\varepsilon = [\varepsilon^{-1}] + 1$, pour tout $k \in \{0, ..., N\}$ posons

$$A_k := \{x \in X \ : \ (k-1)\varepsilon < f(x) \le k\varepsilon\}.$$

Pour tout $k$ soit $V_k$ un ouvert contenant $A_k$ et tel que $\mu(V_k \setminus A_k) \le \varepsilon/(N+1)$, sans perte de généralité on peut supposer que $f \ge (k-1)\varepsilon$ sur $V_k$. On a alors

$$\int_X f d\mu \le \sum_{k=0}^{N} k\varepsilon\mu(A_k) \le \sum_{k=0}^{N} k\varepsilon\mu(V_k) + \varepsilon.$$

Soit $g_0, ..., g_N$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de $X$ par les $V_k$ on a alors

$$T(f) = \sum_{k=0}^{N} T(fg_k) \ge \sum_{k=1}^{N} (k-1)\varepsilon T(g_k) \ge \sum_{k=1}^{N} (k-1)\varepsilon\mu(V_k)$$

et donc on obtient bien que $T(f) \ge \int_X f d\mu$ en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

□

**Corollaire 6.1** *Toute mesure borélienne finie sur un métrique compact est régulière.*

**Définition 6.2** *Soit $(X, d)$ un espace métrique compact, on appelle mesure de Radon sur $X$ toute forme linéaire continue sur $C(X)$. On note $\mathcal{M}(X) := C(X)'$ l'espace des mesures de Radon sur $X$ et pour tout $T \in \mathcal{M}(X)$ :*

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} := \|T\|_{C(X)'} = \sup\{T(f),\ f \in C(X),\ \|f\| \leq 1\}.$$

Evidemment pour une mesure de Radon positive $T = T_\mu$ on a

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = T(1) = \mu(X).$$

Le théorème de Riesz nous a permis d'identifier les mesures de Radon positives sur $X$ aux mesures boréliennes finies. Le résultat suivant permet de décomposer toute mesure de Radon en partie positive et négative et ce de manière canonique (minimale en un certain sens) :

**Proposition 6.3** *Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et $T$ une mesure de Radon sur $X$. Définissons pour tout $f \in C(X)$, $f \geq 0$ :*

$$T^+(f) := \sup\{T(g) \ : \ g \in C(X)\ 0 \leq g \leq f\},$$

$$T^-(f) := -\inf\{T(g) \ : \ g \in C(X)\ 0 \leq g \leq f\}$$

*et, pour tout $f \in C(X)$ (en posant $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$) :*

$$T^+(f) := T^+(f_+) - T^+(f_-),\ T^-(f) := T^-(f_+) - T^-(f_-)$$

*alors $T^+$ et $T^-$ sont deux mesures de Radon positives (appelées respectivement partie positive et négative de $T$). On a $T = T^+ - T^-$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = \|T^+\|_{\mathcal{M}(X)} + \|T^-\|_{\mathcal{M}(X)} = T^+(1) + T^-(1). \tag{6.7}$$

*De plus la décomposition de $T = T^+ - T^-$ est minimale en ce sens que si $T = T_1 - T_2$ avec $T_1$ et $T_2$, mesures de Radon positives alors $T_1 \geq T^+$ et $T_2 \geq T^-$.*

**Preuve:**
Montrons d'abord la linéarité de $T^+$. Soit $f_1$ et $f_2$ dans $C(X)$, positives, on a

$$T^+(f_1) + T^+(f_2) = \sup\{T(g_1 + g_2),\ g_i \in C(X),\ 0 \leq g_i \leq f_i\} \leq T(f_1 + f_2).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $g \in C(X)$, $0 \le g \le f_1 + f_2$ tel que $T^+(f_1+f_2) \le T(g)+\varepsilon$. On a alors $g = \min(g, f_1) + (g - f_1)_+$ et comme $0 \le (g-f_1)_+ \le f_2$, $\min(g, f_1) \le f_1$, on a

$$T(f_1 + f_2) \le T(\min(g, f_1)) + T((g - f_1)_+) + \varepsilon \le T^+(f_1) + T^+(f_2) + \varepsilon$$

de sorte que

$$T^+(f_1 + f_2) = T^+(f_1) + T^+(f_2), \forall f_1, f_2 \text{ continues et positives.}$$

Soit $f_1$ et $f_2$ dans $C(X)$, positives, et $f := f_1 - f_2 = f_+ - f_-$, il découle de ce qui précède et de $f_1 + f_- = f_2 + f_+$ qu'on a

$$T^+(f_1) + T^+(f_-) = T^+(f_2) + T^+(f_+)$$

et donc

$$T^+(f) = T^+(f_1 - f_2) = T^+(f_+) - T^+(f_-) = T^+(f_1) - T^+(f_2)$$

en particulier comme $T^+(0) = 0$ on a $T^+(-f) = -T^+(f)$ et comme $T^+(\lambda f) = \lambda T^+(f)$ pour tout $\lambda > 0$ la linéarité de $T^+$ est établie. La continuité de $T^+$ découle immédiatement de sa positivité ($T^+(f - \|f\|) \le 0$ et donc $T^+(f) \le \|f\| T^+(1) \le \|f\| \|T\|_{\mathcal{M}(X)}$). Ensuite, on remarque que si $f \in C(X)$ et $f \ge 0$ alors

$$\begin{aligned}(T^+ - T)(f) &= \sup\{T(g - f) \ : \ 0 \le g \le f\} \\ &= \sup\{-T(h) \ : \ 0 \le h \le f\} = T^-(f)\end{aligned}$$

on a donc $T^-(f) = T^+(f) - T(f)$ pour tout $f \ge 0$ et ceci est également vrai pour tout $f \in C(X)$ (écrire $f = f_+ - f_-$). La linéarité et la continuité de $T^-$ en découlent (sa positivité est évidente) ainsi que l'identité $T = T^+ - T^-$.

D'une part, si $f \in C(X)$ et $\|f\| \le 1$ on a $T(f) = T^+(f) - T^-(f^+) + T^-(f^-) \le T^+(1) + T^-(1)$ et donc $\|T\|_{\mathcal{M}(X)} \le T^+(1) + T^-(1)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}T^+(1) + T^-(1) &= \sup\{T(f - g) \ : \ 0 \le f, g \le 1\} \\ &\le \sup\{T(h) \ : \ h \in C(X), \ \|h\| \le 1\} = \|T\|_{\mathcal{M}(X)}\end{aligned}$$

on a donc bien (6.7).

Enfin, montrons que la décomposition $T = T^+ - T^-$ est minimale. Si $T = T_1 - T_2$ on a $T \le T_1$ et donc pour tout $f \ge 0$ on a

$$T^+(f) \le \sup\{T_1(g) \ : \ g \in C(X), \ 0 \le g \le f\} = T_1(f)$$

et donc $T_+ \leq T_1$.

□

En particulier $T_+ - T_-$ est l'unique décompostion de $T$ comme différence de mesures de Radon vérifiant la propriété (6.7). On déduit immédiatement de la proposition précédente et du théoreème de Riesz 6.4 le théorème de représentation suivant :

**Théorème 6.5** (Théorème de représentation de Riesz, cas compact) *Soit $(X, d)$ un espace métrique compact et $T$ une mesure de Radon sur $X$, alors il existe deux mesures boréliennes (positives) finies $\mu_1$ et $\mu_2$ telles que $T = T_{\mu_1} - T_{\mu_2}$. En outre, il existe une unique représentation sous la forme précédente vérifiant*

$$\|T\|_{\mathcal{M}(X)} = \mu_1(X) + \mu_2(X).$$

Autrement dit, le théorème de Riesz 6.5 permet d'identifier les mesures de Radon sur $X$ aux mesures *signées* c'est à dire différences de deux mesures boréliennes (positives) finies. Si $\mu$ est une mesure signée s'écrivant $\mu = \mu_1 - \mu_2$ avec $\mu_1$ et $\mu_2$ positives, la proposition 6.3 fournit une manière minimale de décomposer $\mu$ en partie positive et négative : on décompose $T = T_\mu = T_{\mu_1} - T_{\mu_2}$ en sa partie positive et négative $T = T^+ - T^- = T_{\mu_+} - T_{\mu_-}$ avec $\mu_+$ et $\mu_-$ représentant respectivement $T^+$ et $T^-$. On vérifie immédiatement que $\mu = \mu_+ - \mu_-$, $\mu_+$ et $\mu_-$ s'appellent respectivement partie positive et négative de $\mu$. La décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est minimale au sens où si $\mu = \mu_1 - \mu_2$ avec $\mu_i$ positive alors $\mu_1 \geq \mu_+$ et $\mu_2 \geq \mu_-$. Intuitivement quand on décompose $\mu = \mu_1 - \mu_2$ en $\mu_+ - \mu_-$ on a retiré la masse commune à $\mu_1$ et $\mu_2$ ; on s'attend donc à ce que $\mu_+$ et $\mu_-$ n'aient pas de partie en commun en un certain sens. On peut donner un sens précis à cette intuition au travers de la notion de mesures étrangères :

**Lemme 6.1** *Soit $\mu$ une mesure signée sur le compact $(X, d)$ de partie positive $\mu_+$ et de partie négative $\mu_-$. Alors $\mu_+$ et $\mu_-$ sont étrangères : il existe un borélien $A$ de $X$ tel que $\mu_+(A) = \mu_+(X)$ et $\mu_-(A) = 0$ (autrement dit $\mu_+$ est portée par $A$ et $\mu_-$ par $X \setminus A$).*

**Preuve:**
Nous savons que

$$\sup\{\int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_- \ : \ f \in C(X), \|f\| \leq 1\} = \mu_+(X) + \mu_-(X)$$

et donc pour tout $k \geq 1$, $n \geq 1$, il existe $f_{k,n} \in C(X)$, tel que $\|f_{k,n}\| \leq 1$ et

$$\mu_+(X) + \mu_-(X) \leq \int_X f_{k,n} d\mu_+ - \int_X f_{k,n} d\mu_- + \frac{1}{k2^n}$$

en posant $V_{k,n} := \{f_{k,n} > 0\}$ on a donc

$$\begin{aligned}\mu_+(X) + \mu_-(X) &\le \int_X (f_{k,n})_+ d\mu_+ \int_X (f_{k,n})_- d\mu_- + \frac{1}{k2^n} \\ &\le \mu_+(V_{k,n}) + \mu_-(X \setminus V_{k,n}) + \frac{1}{k2^n}\end{aligned}$$

et donc

$$\mu_+(X \setminus V_{k,n}) + \mu_-(V_{k,n}) \le \frac{1}{k2^n}. \tag{6.8}$$

Posons

$$A := \bigcap_k \Big( \bigcup_n V_{k,n} \Big)$$

il découle de (6.8) que $\mu_-(A) = 0$ et $\mu_+(X \setminus A) = 0$. □

Soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ une mesure signée sur $X$ et $A$, borélien tel que $\mu_-(A) = \mu_+(X \setminus A) = 0$. La mesure positive $|\mu| := \mu_+ + \mu_-$ est appelée mesure de variation totale de la mesure $\mu$. Pour tout $B \in \mathcal{B}_X$ on a

$$\begin{aligned}\mu_+(B) = \mu_+(B \cap A) = \mu(B \cap A) = |\mu|(B \cap A), \\ \mu_-(B) = \mu_-(B \setminus A) = -\mu(B \setminus A) = |\mu|(B \setminus A).\end{aligned}$$

On appelle variation totale de $\mu$ et l'on note $\|\mu\|_{\mathrm{TV}}$ la norme $\|T_\mu\|_{\mathcal{M}(X)}$ :

$$\|\mu\|_{\mathrm{TV}} = \sup_{\|f\| \le 1} \int_X f d\mu = \mu_+(X) + \mu_-(X) = |\mu|(X).$$

Enfin, on aurait tout aussi bien pu définir les parties positive et négatives de la mesure signée $\mu$ comme étant l'unique couple de mesures positives étrangères dont la différence est $\mu$.

**Exercice 6.1** *Montrer que $\|\mu\|_{\mathrm{TV}}$ est le sup sur les familles finies de Boréliens disjoints $(A_i)$ de $X$ de la quantité*

$$\sum_i |\mu(A_i)|.$$

## 6.3 Mesures de Radon dans le cas localement compact

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que $(X, d)$ est un espace métrique localement compact et $\sigma$-compact au sens où il existe une suite strictement croissante de compacts $(X_m)_m$ d'intérieur non vide tels que $X_m \subset \text{int}(X_{m+1})$ pour tout $m$ et et $X = \bigcup_m X_m$ (autrement dit $X_m$ est une suite exhaustive de compacts de $X$). Notons que ces hypothèses impliquent que $X$ est non compact (sans quoi on pourrait extraire un recouvrement fini du recouvrement de $X$ par les ouverts $\text{int}(X_m)$ ce qui contredirait le fait que $X_m$ est strictement croissante). Notons également que tout compact de $X$ est contenu dans $X_m$ pour $m$ assez grand. Le cadre *localement compact* couvre naturellement le cas où $X = \mathbb{R}^d$ ou plus généralement $X$, ouvert de $\mathbb{R}^d$. Toutefois, l'hypothèse de compacité locale peut s'avérer restrictive et élimine de fait certaines applications intéressantes en dimension infinie, ce qui explique qu'on préfère parfois travailler dans le cadre plus général des espaces Polonais (métriques séparables et complets), nous renvoyons le lecteur intéressé aux notes de cours de Cédric Villani [16].

**Exercice 6.2** *Soit $(X, d)$ vérifiant les hypothèses de ce paragraphe, montrer que $X$ est séparable et complet.*

Comme $X$ n'est pas compact, on est naturellement amenés à distinguer différents espaces de fonctions continues sur $X$ (et à nous intéresser tout particulièrement à leur dual topologique respectif) :

- $C_c(X)$, l'espace des fonctions continues à support compact : c'est la réunion des espaces $C_{X_m}(X)$ des fonctions continues à support dans $X_m$, $C_c(X)$ est muni de sa topologie limite inductive des espaces $C_{X_m}(X)$, ainsi une forme linéaire $T$ est continue sur $C_c(X)$ si et seulement si pour tout $m$, il existe une constante $C = C_m$ telle que
$$|T(f)| \leq C \sup_{x \in X_m} |f(x)|, \ \forall f \in C_c(X) \ : \ \text{supp}(f) \subset X_m$$
ce qui revient aussi à dire que pour tout compact $K$ de $X$, il existe une constante $C = C_K$ telle que
$$|T(f)| \leq C \sup_{x \in K} |f(x)|, \ \forall f \in C_c(X) \ : \ \text{supp}(f) \subset K$$
On appelle espace des mesures de Radon (localement finies) sur $X$ et l'on note $M_{\text{loc}}(X)$ le dual topologique de $C_c(X)$,
- $C_b(X)$ est l'espace des fonctions continues bornées sur $X$, muni de la norme uniforme, c'est un espace de Banach (non séparable),
- $C_0(X)$ est l'espace des fonctions continues sur $X$, tendant vers 0 à l'infini, c'est à dire des fonctions $f \in C(X)$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X \backslash X_m$ (ce qui est évidemment équivalent à : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K$ de $X$ tel que $\sup_{x \in X \backslash K} |f(x)| \leq \varepsilon$) ; $C_0(X)$ est un sev fermé de $C_b(X)$ et donc est de Banach pour la norme uniforme.

**Exercice 6.3** *Montrer que $C_0(X)$ est séparable mais que $C_b(X)$ ne l'est pas, que $C_0(X)$ est fermé dans $C_b(X)$ et que $C_c(X)$ est dense dans $C_0(X)$ (pour la norme uniforme).*

Nous allons commencer par traiter le cas de $C_c(X)$ et de son dual. Rappelons que $C_c(X)$ muni de la topologie limite inductive des espaces $C_{X_m}(X)$ est complet et séquentiellement séparable. Comme dans le paragraphe précédent on dit que la forme linéaire $T$ sur $C_c(X)$ est positive si $T(f) \geq 0$ pour tout $f \in C_c(X)$, $f \geq 0$. On vérifie facilement que toute forme linéaire positive sur $C_c(X)$ est une mesure de Radon. On adapte facilement les arguments du paragraphe précédent pour montrer que toute mesure de Radon sur $X$ se décompose en la différence de deux mesures de Radon positives. En adaptant les arguments du cas compact, on obtient alors le résultat de représentation suivant :

**Théorème 6.6** (Théorème de représentation de Riesz, cas non compact) *Soit $T$ une mesure de Radon sur $X$ alors il existe couple de mesures boréliennes (positives) $\mu_+$ et $\mu_-$, finies sur les compacts de $X$ telles que*

$$T(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-, \ \forall f \in C_c(X).$$

Autrement dit, les mesures de Radon sur $X$ se représentent par des mesures signées sur $X$ de la forme $\mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_+$ et $\mu_-$ positives et finies sur les compacts (par la suite nous appellerons simplement de telles mesures mesures signées). On a l'unicité dans la représentation précédente si on impose en plus que les restrictions de $\mu_\pm$ à tout compact sont étrangères. Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, les distributions d'ordre 0 sur $\Omega$ sont donc les mesures boréliennes signées, finies sur les compacts.

On déduit des résultats généraux du chapitre 1, un premier résultat utile de compacité séquentielle :

**Proposition 6.4** *Soit $(T_n)$ une suite de mesures de Radon sur $X$ telle que $(T_n(f))_n$ est bornée pour tout $f \in C_c(X)$ alors il existe une mesure de Radon $T$ et une sous-suite de $(T_{n_k})$ de $(T_n)$ telles que*

$$T_{n_k}(f) \to T(f), \ \forall f \in C_c(X).$$

**Preuve:**
Il résulte du théorème de Banach-Steinhaus (sous la forme de la proposition 1.7) que

$$f \in C_c(X) \mapsto p(f) := \sup_n |T_n(f)|$$

est une semi-norme continue sur $C_c(X)$. Comme $C_c(X)$ est séquentiellement séparable, le résultat cherché découle du théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki (sous la forme du théorème 1.6).

□

On peut évidemment traduire cette propriété de compacité en termes de mesures signées. Tout d'abord, on définit la convergence vague comme suit

**Définition 6.3** *Si $(\mu_n)_n$ et $\mu$ sont des mesures signées sur $X$, on dit que $(\mu_n)$ converge vaguement vers $X$ si*

$$\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu, \ \forall f \in C_c(X).$$

Ensuite la proposition 6.4 traduit le fait que si $(\int_X f d\mu_n)$ est bornée pour tout $f \in C_c(X)$ alors $(\mu_n)$ possède une sous-suite qui converge vaguement. Par exemple, toute suite de mesure de probabilité possède une sous-suite qui converge vaguement (mais sa limite n'est pas forcément une mesure de probabilité, il peut y avoir perte de masse comme le montre l'exemple $\mu_n = \delta_n$ sur $\mathbb{R}$ qui converge vaguement vers 0).

On va maintenant s'intéresser au dual topologique de l'espace de Banach $C_0(X)$ et montrer qu'il peut s'identifier à l'espace des mesures signées *finies* (i.e. de le forme $\mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_\pm \geq 0$ et $\mu_\pm(X) < +\infty$).

**Lemme 6.2** *Soit $T$ une forme linéaire positive sur $C_0(X)$ alors $T$ est continue.*

**Preuve:**

Si $T$ n'était pas continue on pourrait pour chaque $n$ trouver $f_n \in C_0(X)$ telle que $T(f_n) \geq n$ et $\|f_n\| \leq 1$, quitte à remplacer $f_n$ par sa partie positive on peut en outre choisir les $f_n$ positifs. La série $\sum n^{-2} f_n$ converge normalement dans $C_0(X)$ et donc converge car $C_0(X)$ est de Banach, notons $f$ sa somme on a alors pour tout

$$T(f) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} T(f_n) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty \text{ quand } N \to \infty$$

ce qui est absurde.

□

En procédant comme pour la proposition 6.3 on a

**Lemme 6.3** *Soit $T \in C_0(X)'$, il existe un unique couple $(T^+, T^-)$ de formes linéaires positives sur $C_0(X)$ telles que $T = T^+ - T^-$ et*

$$\|T\|_{C_0(X)'} = \|T^+\|_{C_0(X)'} + \|T^-\|_{C_0(X)'}.$$

Il est clair que si $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est une mesure signée finie alors $T_\mu$ : $f \in C_0(X) \mapsto T_\mu(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-$ est une forme linéaire continue et que $\|T_\mu\|_{C_0(X)'} \leq |\mu|(X) = \mu_+(X) + \mu_-(X)$. Si en outre, on impose que $\mu_+$ et $\mu_-$ sont étrangères alors

$$\|T_\mu\|_{C_0(X)'} \leq |\mu|(X) = \mu_+(X) + \mu_-(X).$$

Le théorème suivant énonce que réciproquement tout élément de $C_0(X)'$ se représente par une mesure signée finie :

**Théorème 6.7** (Théorème de représentation de Riesz, cas non compact, dual de $C_0(X)$) *Soit $T \in C_0(X)'$, alors il existe couple de mesures boréliennes (positives) finies $\mu_+$ et $\mu_-$, telles que*

$$T(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-,\ \forall f \in C_0(X).$$

**Preuve:**
Comme $T \in C_c(X)'$, il découle du théorème 6.6 qu'il existe des mesures boréliennes $\mu_\pm$, finies sur les compacts telles que

$$T(f) = T^+(f) - T^-(f) = \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_-,\ \forall f \in C_c(X). \tag{6.9}$$

Montrons que $\mu_+$ et $\mu_-$ sont finies. Supposons par l'absurde que $\mu_+(X) = \sum_m \mu_+(X_m \backslash X_m) = \sum_m (\mu_+(\partial X_m) + \mu_+(\text{int}(X_m) \backslash X_{m-1}) = +\infty$ de sorte que l'une des séries de terme général $\eta_m = \mu_+(\partial X_m)$ ou $\eta_m = \mu_+(\text{int}(X_m) \backslash X_{m-1})$ diverge. Supposons que $\sum_m \eta_m = +\infty$ avec $\eta_m = \mu_+(\partial X_m)$. Soit alors $V_m$ des voisinages ouverts de $\partial X_m$ deux à deux disjoints et $g_m \in C_c(X)$ tel que $\chi_{\partial X_m} \leq g_m \leq \chi_{V_m}$. Comme $\sum \eta_m = +\infty$, il existe une suite $c_m \geq 0$, $c_m \to 0$ telle que $\sum_m c_m \eta_m = +\infty$ (choisir $m_k$ strictement croissante telle que $\sum_{m_k}^{m_{k+1}-1} \eta_m \geq 1$ et $c_m = k^{-1}$ pour $m \in \{m_k, ..., m_{k+1} - 1\}$). On pose alors $g := \sum_m c_m g_m$ comme les $g_m$ ont des supports disjoints et comme $c_m \to 0$ on a $g \in C_0(X)$ et donc

$$T^+(g) \geq \sum_{m=1}^{M} c_m T^+(g_m) \geq \sum_{m=1}^{M} c_m \mu_+(\partial X_m)$$

ce qui constitue la contradiction recherchée. Si $\sum_m \eta_m = +\infty$ avec $\eta_m = \mu_+(\text{int}(X_m) \setminus X_{m-1})$, on choisit pour chaque $m$ un compact $K_m \subset \text{int}(X_m) \setminus X_{m-1}$ tel que $\mu_+(K_m) \geq \eta_m - 2^{-m-1}$, puis $g_m \in C_c(X)$ tel que $\chi_{K_m} \leq g_m \leq \chi_{\text{int}(X_m)\setminus X_{m-1}}$ et l'on procède exactement comme dans le cas précédent.

Comme $\mu_\pm$ sont finies, le fait que $\mu_+ - \mu_-$ représente effectivement $T$ découle de (6.9) et de la densité de $C_c(X)$ dans $C_0(X)$.

□

Comme dans le cas compact, on a unicité de $\mu_+$ et $\mu_-$ si l'on impose en outre

$$\|T_\mu\|_{C_0(X)'} \leq |\mu|(X) = \mu_+(X) + \mu_-(X).$$

Attention : dans le cas où $X$ n'est pas compact, et en notant $C_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur $X$ (muni de la norme uniforme qui en fait un espace de Banach), on ne peut identifier les formes linéaires continues sur $C_b(X)$ à des mesures. En effet soit $F$ le sev de $C_b(\mathbb{R})$ formé par les fonctions ayant une limite en $+\infty$ et soit $T(f) := \lim_{+\infty} f$ pour tout $f \in F$. Comme $T(f) \leq \|f\|$ pour tout $f \in F$, on peut, grâce au théorème de Hahn-Banach prolonger $T$ en un élément (encore noté $T$) de $C_b(\mathbb{R})'$. Si $T$ était représenté par une mesure $\mu$, comme $T(f) = 0$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R})$ on aurait $\mu = 0$ et donc aussi $T = 0$, ce qui est absurde.

**Définition 6.4** *On dit qu'une suite de mesures (finies) $(\mu_n)$ sur $X$ converge étroitement vers une mesure (finie) $\mu$ sur $X$ si*

$$\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu, \ \forall f \in C_b(X).$$

L'important théorème suivant (qui présente certaines analogies avec le théorème de Dunford-Pettis) donne un critère (la *tension*, propriété qui assure que la masse "ne part pas à l'infini" et qui exclut en particulier les cas du type $\mu_n = \delta_n$ dans $\mathbb{R}$) de compacité séquentielle pour la convergence étroite dans les mesures positives

**Théorème 6.8** (Théorème de Prokhorov) *Soit $(\mu_n)$ une suite de mesures positives sur $X$, si $\mu_n(X)$ est bornée et si $(\mu_n)$ est tendue au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K$ tel que*

$$\sup_n \mu_n(X \setminus K) \leq \varepsilon$$

*alors $(\mu_n)$ possède une sous-suite qui converge étroitement vers une mesure finie.*

**Preuve:**
Grâce à la proposition 6.4, on peut supposer (à une extraction encore notée $(\mu_n)$ près) que $(\mu_n)$ converge vaguement vers $\mu \in \mathcal{M}_{\rm loc}(X)$. Pour tout $m$, on a alors $\mu(X_m) \leq \liminf_n \mu_n(X_m) \leq C$ et donc $\mu(X) = \sup_m \mu(X_m) \leq C$ de sorte que $\mu$ est finie. Soit $\varepsilon > 0$, comme $\mu(X_m)$ tend vers $\mu(X)$, il existe $m$ tel que $\mu(X) \leq \mu(X_m) + \varepsilon$, ce qui montre que $\mu$ est tendue. Soit maintenant $f \in C_b(X)$, $\varepsilon > 0$ et $K$ un compact de $X$ vérifiant $\sup_n \mu_n(X \setminus K) \leq \varepsilon$ et $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$. Soit $g \in C_c(X)$ tel que $\chi_K \leq g \leq 1$, on a alors

$$\begin{aligned}\Big|\int_X fd(\mu_n-\mu)\Big| &\leq \Big|\int_X fgd(\mu_n-\mu)\Big| + \Big|\int_X f(1-g)d(\mu_n-\mu)\Big|\\ &= \Big|\int_X fgd(\mu_n-\mu)\Big| + \Big|\int_{X\setminus K} f(1-g)d(\mu_n-\mu)\Big|\\ &\leq \Big|\int_X fgd(\mu_n-\mu)\Big| + 2\varepsilon\|f\|\end{aligned}$$

et on conclut en remarquant que puisque $fg \in C_c(X)$, on a $\int_X fgd\mu_n \to \int_X fgd\mu$ quand $n \to \infty$.
□

Pour comprendre l'intérêt de la tension et du théorème de Prokhorov prenons l'exemple d'une suite de mesures de probabilité. Nous savons déjà qu'une telle suite possède (en sous-suite) une limite vague (positive) mais que cette limite vague n'est pas forcément de masse 1. Si la suite est en outre tendue, cette limite vague est une mesure de probabilité (prendre 1 comme fonction-test dans la convergence étroite).

Mentionnons pour clore ce paragraphe l'important principe de concentration-compacité dû à Pierre-Louis Lions. Nous renvoyons le lecteur aux articles célèbres ([9]) pour la preuve et les applications de ce principe en calcul des variations. Soit $(\mu_n)$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ (pour faire simple) alors il y a trois comportements possibles :

– l'évanescence :

$$\forall R > 0,\ \lim_n \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mu_n(B(x,R)) = 0,$$

– la concentration : il existe $(x_n)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $n$, on ait $\mu_n(B(x_n,R)) \geq 1-\varepsilon$,
– la dichotomie : il existe $\alpha \in ]0,1[$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$, $R_n \to \infty$ et $(x_n)$ tels que pour tout $n$

$$|\mu_n(B(x_n,R) - \alpha| \leq \varepsilon \text{ et } \mu_n(B(x_n,R_n) \setminus \overline{B}(x_n,R)) \leq \varepsilon.$$

## 6.4 Théorème de Radon-Nikodym, désintégration des mesures

Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $\nu$ une mesure (positive) sur $(X, \mathcal{B})$ et $f$ une fonction mesurable et positive, l'application

$$B \in \mathcal{B} \mapsto \int_B f d\nu$$

est $\sigma$-additive en vertu du théorème de convergence monotone, c'est donc une mesure $\mu$ notée sous la forme $d\mu = f d\nu$. On dit que deux mesures $\mu$ et $\nu$ sont étrangères, ce que l'on note $\mu \perp \nu$ si elles sont portées par deux ensembles mesurables disjoints i.e. s'il existe $A$ et $B$ dans $\mathcal{B}$ et disjoints tels que $\mu(X \setminus A) = 0$ et $\nu(X \setminus B) = 0$. On appelle mesure signée finie toute fonction de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $\mu = \mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_+$ et $\mu_-$ mesures (positives) finies sur $(X, \mathcal{B})$ et *étrangères*. Notons que si $\mu_+$ et $\mu_-$ ne sont pas finies alors on ne peut définir $\mu_+ - \mu_-$ pour les $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu_+(B) = \mu_-(B) = +\infty$ la définition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est alors purement formelle. Le théorème de Hahn permet d'identifier les fonctions $\sigma$-additives sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ aux mesures signées finies, nous nous limiterons donc ici aux mesures signées finies. On dira qu'une mesure signée finie $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est *absolument continue* par rapport à une mesure $\nu$ (ce que l'on notera $\mu \ll \nu$) si $\mu(B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $\nu(B) = 0$. Evidemment toute mesure de la forme $d\mu = f d\nu = f_+ d\nu - f_- d\nu$ avec $f \in L^1(\nu)$ est absolument continue par rapport à $\nu$, le théorème de Radon-Nikodym énonce précisément la réciproque. On dit que la mesure signée finie $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est portée par $A \in \mathcal{B}$ si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a $\mu(B) = \mu(B \cap A)$ et que deux mesures signées finies $\mu_1$ et $\mu_2$ sont étrangères (notation $\mu_1 \perp \mu_2$) si $\mu_1$ et $\mu_2$ sont portées par deux ensembles mesurables disjoints. Notons que si la mesure signée finie $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est portée par $A$ alors $\mu_+$, $\mu_-$ et $|\mu|$ aussi. Enfin notons que si $\mu$ est une mesure signée finie et $\nu$ une mesure alors

$$\mu \ll \nu \Rightarrow \mu_+ \ll \nu, \ \mu_- \ll \nu$$

et

$$\mu \perp \nu \text{ et } \mu \ll \nu \Rightarrow \mu = 0.$$

**Exercice 6.4** *Soit $\mu$ et $\nu$ deux mesures positives finies montrer que $\mu \ll \nu$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $B \in \mathcal{B}$ si $\nu(B) \leq \delta$ alors $\mu(B) \leq \varepsilon$.*

**Théorème 6.9** (Théorème de décomposition de Lebesgue) *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $\nu$ une mesure positive $\sigma$-finie et $\mu$ une mesure signée finie sur $(X, \mathcal{B})$. Il existe un unique couple $(f, \mu^s)$ tel que $f \in L^1(\nu)$, $\mu^s$ est une mesure signée finie et*

$$d\mu = f d\nu + d\mu^s, \text{ avec } \mu^s \perp \nu.$$

**Preuve:**
Montrons d'abord l'unicité, supposons que

$$d\mu = f_1 d\nu + d\mu_1^s = f_2 d\nu + d\mu_2^s,$$

avec $f_i \in L^1(\nu)$ et $\mu_i^s \perp \nu$ pour $i = 1, 2$, on a alors $(f_1 - f_2)d\nu = d\mu_2^s - d\mu_1^s$ et cette mesure est à la fois étrangère à $\nu$ et absolument continue par rapport à $\nu$ et par suite $\mu_1^s = \mu_2^s$ et $f_1 = f_2$ dans $L^1(\nu)$.

Pour l'existence, on peut sans perte de généralité supposer $\mu$ positive et $\nu$ finie et l'on procède comme suit (l'argument est dû à Von Neumann). On définit la forme linéaire $T$ sur l'espace de Hilbert $L^2(\mu + \nu)$ :

$$T(\varphi) := \int_X \varphi d\mu, \ \forall \varphi \in L^2(\mu + \nu)$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $\varphi \in L^2(\mu + \nu)$

$$|T(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\mu+\nu)} \mu(X)^{1/2}$$

de sorte que $T$ est continue. Le théorème de représentation de Riesz (dual d'un Hilbert) permet d'en déduire l'existence de $g \in L^2(\mu + \nu)$ tel que

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi g d(\mu + \nu), \ \forall \varphi \in L^2(\mu + \nu) \tag{6.10}$$

en particulier en prenant $\varphi = \chi_B$ pour $B \in \mathcal{B}$ on en déduit

$$d\mu = g d(\mu + \nu).$$

Il est facile d'en déduire que $0 \leq g \leq 1$ $(\mu + \nu)$-p.p. ; posons ensuite

$$S := \{g = 1\}, \ T := \{g < 1\},$$

et

$$\mu^a(B) := \mu(B \cap T), \ \mu^s(B) := \mu(B \cap S), \ \forall B \in \mathcal{B}$$

on a bien sûr $\mu = \mu^a + \mu^s$ et $\mu^s$ portée par $S$. Comme $\mu(S) = \mu(S) + \nu(S)$ on a $\nu(S) = 0$ et donc $\mu^s \perp \nu$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $d\mu^a = f d\nu$ avec $f \in L^1(\nu)$. Réécrivons (6.10) sous la forme

$$\int_X \varphi(1-g) d\mu = \int_X \varphi g d\nu, , \ \forall \varphi \in L^2(\mu+\nu).$$

Soit $B \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ en prenant $\varphi_n := \chi_{B\cap T}(1 + .... + g^n)$ dans l'identité précédente il vient

$$\int_B \chi_T(1-g^{n+1}) d\mu = \int_B \chi_T g(1 + ... + g^n) d\nu$$

par le théorème de convergence dominée le membre de gauche converge vers $\mu(B\cap T) = \mu^a(B)$ et par convergence monotone celui de droite converge vers

$$\int_B \chi_T \frac{g}{1-g} d\nu$$

on en déduit que $d\mu^a = f d\nu$ avec

$$f = \chi_T \frac{g}{1-g} \in L^1(\nu).$$

□

On en déduit comme corollaire immédiat :

**Théorème 6.10** (Théorème de Radon-Nikodym) *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $\nu$ une mesure positive $\sigma$-finie et $\mu$ une mesure signée finie. Si $\mu \ll \nu$ alors il existe un unique $f \in L^1(\nu)$ tel que $d\mu = f d\nu$.*

La fonction $f \in L^1(\nu)$ dans le théorème de Radon-Nikodym s'appelle densité de Radon-Nikodym de $\mu$ par rapport à $\nu$ et se note souvent sous la forme

$$f = \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Une conséquence utile du théorème de Radon-Nikodym est le théorème de désintégration des mesures sur un espace produit. Nous nous limiterons ici aux mesures de probabilité car c'est ce cas qui nous sera utile pour le transport optimal (il existe des théorèmes de désintégration bien plus généraux nous ne traitons ici qu'un cas simple mais illustratif). Soit donc $(X_1, \mathcal{B}_1)$ et $(X_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables et munissons $X_1 \times X_2$ de la tribu produit $\sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$. Si $\gamma$ est une mesure de probabilité sur $(X_1 \times X_2, \sigma(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2))$, on définit les marginales (ou marges) de $\gamma$, $\pi_1\gamma$ et $\pi_2\gamma$ par

$$\pi_1\gamma(A_1) := \gamma(A_1 \times X_2), \ \pi_2\gamma(A_2) := \gamma(X_1 \times A_2)$$

pour tout $A_1 \in \mathcal{B}_1$ et tout $A_2 \in \mathcal{B}_2$. On vérifie immédiatement que $\pi_i\gamma$ est une mesures de probabilité sur $(X_i, \mathcal{B}_i)$.

**Théorème 6.11** (Désintégration d'une probabilité par rapport à l'une de ses marges) *Soit $X_1$ et $X_2$ des espaces métriques compacts munis de leur tribu borélienne. Soit $\gamma$ une mesure borélienne de probabilité sur $X_1 \times X_2$ et $\mu := \pi_1\gamma$ alors il existe une famille de mesures de probabilité $(\gamma^{x_1})_{x_1 \in X_1}$ mesurable au sens où $x_1 \mapsto \gamma^{x_1}(A_2)$ est $\mu$-mesurable pour tout $A_2 \in \mathcal{B}_2$ et telle que $\gamma = \gamma^{x_1} \otimes \mu$ c'est à dire*

$$\gamma(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \gamma^{x_1}(A_2) d\mu(x_1)$$

*pour tout $A_1 \in \mathcal{B}_1$ et tout $A_2 \in \mathcal{B}_2$.*

**Preuve:**
Nous n'allons donner que l'idée de départ, la preuve complète s'avérant assez longue (cf. Villani [16]). Fixons $B \in \mathcal{B}_{X_2}$ et définissons

$$\mu_B(A) := \gamma(A \times B), \ \forall A \in \mathcal{B}_{X_1}$$

alors $\mu_B$ est une mesure borélienne positive sur $X_1$ et $\mu_B \ll \mu$ de sorte que l'on peut définir

$$f_B := \frac{d\mu_B}{d\mu}$$

et l'on a bien

$$\gamma(A \times B) = \int_A f_B(x) d\mu(x) \ \forall A \in \mathcal{B}_1.$$

La difficulté est que $f_B$ n'est définie qu' à un ensemble $\mu$-négligeable près qui dépend de $B$ on ne peut donc pas définir directement $\gamma^x(B) := f_B(x)$ car $\mathcal{B}_{X_2}$ n'est généralement pas dénombrable (c'est là qu'interviennent les hypothèses de métrisabilité et de compacité sur $X_1$ et $X_2$ qui permettent de se ramener à une famille dénombrable de mesurables, on renvoie au chapitre 10 du cours de Villani [16] pour une démonstration complète).
□

En termes probabilistes, en interprétant $\gamma$ comme la loi d'un couple de variables aléatoires $(X_1, X_2)$, $\gamma^{x_1}$ n'est autre que la probabilité conditionnelle de $X_2$ sachant $X_1 = x_1$. Terminons ce paragraphe par une application immédiate du théorème de désintégration.

**Lemme 6.4** (Dudley's gluing Lemma) *Soit $X_i$, $i = 1, 2, 3$ des espaces métriques compacts munis de leur tribu borélienne, et $\mu_i$ une mesure borélienne de probabilité sur $X_i$. Soit $\gamma_{12}$ (resp. $\gamma_{23}$) une mesure borélienne de probabilité sur $X_1 \times X_2$ (resp. $X_2 \times X_3$) de marges $\mu_1, \mu_2$ (resp. $\mu_2, \mu_3$), alors il existe une mesure borélienne de probabilité $\gamma$ sur $X_1 \times X_2 \times X_3$ telle que $\pi_{12}\gamma = \gamma_{12}$ et $\pi_{23}\gamma = \gamma_{23}$.*

**Preuve:**
On désintégre $\gamma_{12}$ et $\gamma_{13}$ par rapport à leur marge commune $\mu_2$ :

$$\gamma_{12} = \eta^{x_2} \otimes \mu_2, \ \gamma_{23} = \theta^{x_2} \otimes \mu_2$$

puis l'on définit $\gamma$ par

$$\gamma(A_1 \times A_2 \times A_3) := \int_{A_2} \eta^{x_2}(A_1)\theta^{x_2}(A_3) d\mu_2(x_2)$$

pour tous boréliens $A_1$, $A_2$, $A_3$. On vérifie sans peine que $\gamma$ vérifie les propriétés requises.
□

## 6.5 Dualité convexe et transport optimal

L'objectif de ce paragraphe est triple :
- donner un bref aperçu du transport optimal, sujet qui a connu un essor considérable ces dernières années tant sur le plan théorique que du point de vue applicatif (voir à ce sujet les excellents ouvrages de Cédric Villani),
- en déduire des métriques explicites métrisant la topologie faible $*$ sur les mesures de probabilité : les distances de Wasserstein (il est à noter qu'il en existe beaucoup d'autres telles que la métrique de Lévy-Prokhorov)
- fournir une introduction à la dualité convexe qui est un outil utile dans divers contextes notamment en calcul des variations.

Encore une fois, par souci de simplicité nous nous restreindrons au cas compact et laisserons au lecteur le soin de généraliser ce qui suit à des cas plus généraux. Les données du problème du transport optimal de Monge-Kantorovich sont deux espaces métriques compacts $X$ et $Y$, une fonction de coût de transport $c \in C(X \times Y)$ et deux mesures de probabilités (Boréliennes) $\mu$ et $\nu$ sur $X$ et $Y$ respectivement. On note $\Pi(\mu, \nu)$ l'ensemble des *plan de transport* (entre $\mu$ et $\nu$) c'est à dire l'ensemble des probabilités Boréliennes sur $X \times Y$ ayant $\mu$ et $\nu$ comme marginales . Autrement dit $\gamma$, probabilité Borélienne sur $X \times Y$ est un plan de transport si :

$$\int_{X \times Y} \varphi(x) d\gamma(x, y) = \int_X \varphi(x) d\mu(x), \ \forall \varphi \in C(X)$$

et

$$\int_{X \times Y} \psi(y) d\gamma(x, y) = \int_X \psi(y) d\mu(y), \ \forall \psi \in C(Y).$$

Notons que $\Pi(\mu,\nu)$ est non vide car $\mu \otimes \nu \in \Pi(\mu,\nu)$ et compact pour la topologie faible $*$ des mesures. Le problème de Monge-Kantorovich s'écrit alors

$$\inf_{\gamma \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times Y} c(x,y) d\gamma(x,y) \tag{6.11}$$

L'existence d'une solution découle immédiatement de la compacité de $\Pi(\mu,\nu)$ et du fait que l'objectif est donné par une forme linéaire continue (il s'agit d'un problème de programmation linéaire en dimension infinie).

Un ingrédient important dans la théorie du transport optimal est sa formulation duale. Nous allons présenter ici un théorème général de dualité convexe qui a son intérêt en soi et a d'autres applications en calcul des variations, c'est également l'occasion d'insister une fois de plus sur l'importance de la convexité. Le problème de Monge-Kantorovich étant un bon exemple d'application de la dualité convexe, ceci justifie de nous éloigner provisoirement du transport optimal pour y revenir plus en détail plus tard.

Soit $E$ et $F$ deux evn, $\Lambda \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f$ et $g$ deux fonctions convexes sci, $F : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $G : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qu'on supposera *propres* c'est-à-dire non identiquement égales à $+\infty$. On appelle transformée de Legendre de $f$ et l'on note $f^*$ la fonction définie par

$$f^*(q) := \sup_{x\in E}\{\langle q,x\rangle - f(x)\}, \ \forall q \in E'$$

on définit de même la transformée de Legendre de $G$ par

$$g^*(p) := \sup_{y\in F}\{\langle p,y\rangle - g(y)\}, \ \forall p \in F'.$$

On s'intéresse alors au problème d'optimisation :

$$\inf_{x\in E}\{f(x) + g(\Lambda x)\} \tag{6.12}$$

ainsi qu'à son problème *dual* :

$$\sup_{p\in F'}\{-f^*(-\Lambda^* p) - g^*(p)\}. \tag{6.13}$$

Avant d'énoncer et de démontrer le théorème de dualité convexe de Fenchel-Rockafellar, nous aurons besoin de quelques préliminaires d'analyse convexe. Étant donné $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, convexe sci propre et en notant $f^*$ sa transformée de Legendre (dans la littérature on rencontre aussi le terme de transformée de Fenchel, de polaire ou de fonction convexe conjuguée), on a par définition même l'inégalité de Young :

$$f(x) + f^*(q) \geq \langle q,x\rangle , \ \forall (q,x) \in E' \times E, \tag{6.14}$$

et donc pour tout $x \in E$ :

$$f(x) \geq f^{**}(x) := \sup_{q \in E'} \{\langle q, x \rangle - f^*(q)\}. \tag{6.15}$$

**Lemme 6.5** *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, convexe sci propre, alors $f^*$ est convexe sci propre sur $E^*$.*

**Preuve:**
Le fait que $f^*$ soit convexe sci provient du fait que par définition c'est un supremum de fonctions affines continues et qu'une fonction est convexe (sci) si et seulement si son épigraphe est convexe (fermé). Il s'agit donc simplement de montrer que $f^*$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. Soit donc $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < +\infty$ et $\lambda_0 < f(x_0)$ de sorte que $(\lambda_0, x_0) \notin \mathrm{Epi}(f) := \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \ : \ \lambda \geq f(x)\}$. Comme $f$ est convexe sci, $\mathrm{Epi}(f)$ est convexe fermé, on peut donc séparer strictement $(\lambda_0, x_0)$ de $\mathrm{Epi}(f)$ : il existe $(k, p) \in \mathbb{R} \times E'$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$k\lambda_0 - \langle p, x_0 \rangle \leq k\lambda - \langle p, x \rangle - \varepsilon, \ \forall (\lambda, x) \in \mathrm{Epi}(f) \tag{6.16}$$

ceci implique que $k > 0$ et par homogénéité on peut donc supposer que $k = 1$ on a donc en particulier

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} \{\langle p, x \rangle - f(x)\} \leq \langle p, x_0 \rangle - \lambda_0 - \varepsilon < +\infty.$$

$\square$

Notons que le le lemme précédent implique que $f$ admet une minorante affine continue ($x \mapsto \langle p, x \rangle - f^*(p)$ avec $f^*(p) < +\infty$)

**Exercice 6.5** *Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \neq \infty$ montrer que $f^{**}$ est la plus grande fonction convexe s.c.i minorant $f$ ($f^{**}$ s'appelle l'enveloppe convexe sci de $f$). En déduire que $f$ est convexe sci si et seulement si $f = f^{**}$.*

**Théorème 6.12** *(*Théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar) *Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) < +\infty$ et $g$ est continue en $\Lambda(x_0)$ et que l'infimum du problème (6.12) soit fini, alors on a :*

$$\inf_{x \in E} \{f(x) + g(\Lambda x)\} = \max_{p \in F'} \{-f^*(-\Lambda^* p) - g^*(p)\}.$$

*(En particulier le sup du problème dual (6.13) est atteint).*

**Preuve:**
Désignons par $\alpha$ et $\beta$ respectivement l'infimum dans (6.12) et le supremum dans (6.13). Par l'inégalité de Young pour tout $(x,p) \in E \times F'$ on a :

$$f(x) \geq \langle -\Lambda^* p, x\rangle - f^*(-\Lambda^* p),\ g(\Lambda x) \geq \langle p, \Lambda x\rangle - g^*(p)$$

en sommant ces inégalités, on obtient donc $\alpha \geq \beta$.

Posons

$$C := \{(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E \times Y\ :\ \lambda \geq g(\Lambda x - y)\}$$

et notons $A$ l'intérieur de $C$ (lequel est non vide car $g$ est continue en $\Lambda x_0$), on vérifie sans peine que $C$ est convexe et dense dans $A$. Soit maintenant :

$$B := \{(\mu, z, 0)\ :\ \mu \in \mathbb{R},\ z \in E,\ \alpha - \mu \geq f(z)\},$$

$B$ est convexe non vide et, par définition de $\alpha$, $A \cap B = \emptyset$. On peut ainsi séparer au sens large $B$ de $A$ (et donc de $C$ par densité) : il existe $(k, q, p) \in \mathbb{R} \times E' \times F' \setminus \{(0,0,0)\}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$k\lambda + \langle q, x\rangle + \langle p, y\rangle \geq a \geq k\mu + \langle q, z\rangle\,,\ \forall (\lambda, x, y) \in C,\ \forall (\mu, z, 0) \in B. \tag{6.17}$$

On en déduit que $k \geq 0$ (faute de quoi le membre de gauche de (6.17) ne serait pas minoré). Si $k = 0$ alors toujours par continuité de $g$ en $\Lambda x_0$ on aurait pour tout $u \in E$ et $v \in F$ suffisamment petits

$$\langle q, u\rangle + \langle p, v\rangle \geq 0$$

ce qui entrainerait $p = 0$ et $q = 0$, ce qui est absurde. On a donc $k > 0$ et sans perte de généralité on peut supposer $k = 1$. Ainsi, (6.17) se réecrit :

$$\inf_{(x,y)\in E\times F}\{g(\Lambda x - y) + \langle q, x\rangle + \langle p, y\rangle\} \geq a \geq \alpha + \sup_{z\in E}\{\langle q, z\rangle - f(z)\} = \alpha + f^*(q). \tag{6.18}$$

En particulier, pour tout $u \in E$ on a

$$\langle q, u\rangle + \langle p, \Lambda u\rangle \geq a - g(\Lambda x_0)$$

et donc $q = -\Lambda^* p$, le membre de gauche de (6.18) se réecrit alors

$$\inf_{(x,y)\in E\times F}\{g(\Lambda x - y) - \langle p, \Lambda x - y\rangle\} = -g^*(p)$$

avec (6.18) on a donc

$$-g^*(p) - f^*(-\Lambda^* p) \geq \alpha \geq \beta$$

ainsi $\alpha = \beta$ et $p$ est solution de (6.13).

□

Il est à noter que le problème précédent fournit un théorème d'existence de solutions pour le problème dual à partir d'hypothèses sur le problème primal, notons aussi que la preuve repose sur le théorème de séparation (et pas sur un argument de compacité).

Revenons maintenant au problème de transport optimal (6.11) et montrons qu'il s'écrit naturellement comme le dual d'un problème d'optimisation convexe sur $C(X) \times C(Y)$. Soit $\Lambda : C(X) \times C(Y)$ défini par $\Lambda(\varphi, \psi) := \varphi \oplus \psi$ pour tout $(\varphi, \psi) \in C(X) \times C(Y)$ avec

$$(\varphi \oplus \psi)(x, y) := \varphi(x) + \psi(y),\ \forall (x, y) \in X \times Y.$$

L'adjoint de $\Lambda$, $\Lambda^*$ est donc l'opérateur linéaire continu $\mathcal{M}(X \times Y) \to \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y)$ donné par : pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(X \times Y)$, $\Lambda^*\gamma = (\pi_X\gamma, \pi_Y\gamma)$ avec pour tout $(\varphi, \psi) \in C(X) \times C(Y)$ :

$$\begin{array}{c} \displaystyle\int_{X\times Y} \varphi(x) d\gamma(x, y) = \int_X \varphi(x) d(\pi_X\gamma)(x), \\ \displaystyle\int_{X\times Y} \psi(y) d\gamma(x, y) = \int_X \psi(y) d(\pi_Y\gamma)(y) \end{array}.$$

Autrement dit, $\pi_X\gamma$, et $\pi_Y\gamma$ sont les marges de $\gamma$.

On considère maintenant le problème :

$$\inf_{(\varphi,\psi)\in C(X)\times C(Y)} f(\Lambda(\varphi, \psi)) + g(\varphi, \psi) \tag{6.19}$$

avec, pour tout $\theta \in C(X \times Y)$

$$g(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \leq c \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f(\varphi, \psi) := -\int_X \varphi d\mu - \int_Y \psi d\nu.$$

Un calcul immédiat donne que

$$f^*(-\Lambda^*\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\pi_X\gamma, \pi_Y\gamma) = (\mu, \nu) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g^*(\gamma) = \begin{cases} \int_{X\times Y} c d\gamma & \text{si } \gamma \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que le dual de (6.19) est

$$\sup_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)} -\int_{X\times Y} c d\gamma = -\inf_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times Y} c d\gamma$$

en appliquant le théorème de Fenchel-Rockafellar on obtient donc que (6.11) possède des solutions (ce que nous savions déjà) et qu'on a la relation :

**Théorème 6.13** (Dualité de Kantorovich pour le problème de transport optimal)

$$\min_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times Y} c(x,y)d\gamma(x,y) = \sup_{(\varphi,\psi)\in C(X)\times C(Y)\,:\,\varphi\oplus\psi\le c} \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

**Exercice 6.6** *Montrer sous les hypothèses de ce paragraphe ($X$ et $Y$ compacts et $c$ continue) que (6.19) possède des solutions (se ramener à une suite maximisante bornée et uniformément équicontinue en utilisant l'uniforme continuité de $c$ et conclure par le théorème d'Ascoli-Arzelà).*

**Exercice 6.7** *Dans le cas $X = Y \subset \mathbb{R}^d$ montrer que*

$$\inf_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)} |x-y|d\gamma(x,y) = \sup\left\{\int_X u\, d(\mu-\nu) \ :\ u \text{ 1-Lipschitz}\right\}.$$

*Généraliser au cas d'une distance quelconque.*

Intéressons nous maintenant au cas particulier où $X = Y$ (métrique compact pour simplifier) et où $c$ est une puissance convexe de la distance $d$. Pour $\mu$ et $\nu$ des mesures de probabilité boréliennes sur $X$ et $p \geq 1$, on définit la $p$-distance de Wasserstein entre $\mu$ et $\nu$ par

$$W_p(\mu,\nu) := \Big(\inf_{\gamma\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times X} d(x,y)^p d\gamma(x,y)\Big)^{1/p} \tag{6.20}$$

Le fait que $W_p$ soit effectivement une distance sur l'ensemble des probabilités sur $X$ et une propriété qui en justifie (entre autres) l'intérêt nous sont fournis par le

**Théorème 6.14** *Soit $(X,d)$ un métrique compact. Pour tout $p \geq 1$, $W_p$ est une distance sur $\mathcal{M}_1^+(X)$, ensemble des mesures de probabilité sur $X$. De plus si $(\mu_n)_n$ et $\mu$ appartiennent à $\mathcal{M}_1^+(X)$ alors $(\mu_n)$ converge faible $*$ vers $\mu$ si et seulement si $W_p(\mu_n,\mu) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

**Preuve:**
Pour établir que $W_p$ est une distance, seule l'inégalité triangulaire requiert vraiment une preuve. Soit donc $\mu_1$, $\mu_2$ et $\mu_3$ dans $\mathcal{M}_1^+(X)$ soit $\gamma_{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ et $\gamma_{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$ tels que

$$W_p(\mu_1, \mu_2)^p = \int_{X^2} d(x_1, x_2)^p d\gamma_{12}(x_1, x_2),$$
$$W_p(\mu_2, \mu_3)^p = \int_{X^2} d(x_2, x_3)^p d\gamma_{23}(x_2, x_3).$$

On déduit du lemme 6.4 qu'il existe $\gamma \in \mathcal{M}_1^+(X^3)$ tel que $\pi_{12}\gamma = \gamma_{12}$ et $\pi_{23}\gamma = \gamma_{13}$ de sorte que $\gamma_{13} := \pi_{13}\gamma \in \Pi(\mu_1, \mu_3)$ on a donc en utilisant l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Minkowski :

$$\begin{aligned}
W_p(\mu_1, \mu_3) &\leq \Big(\int_{X\times X} d(x_1, x_3)^p d\gamma_{13}(x_1, x_3)\Big)^{1/p} = \Big(\int_{X^3} d(x_1, x_3)^p d\gamma(x_1, x_2, x_3)\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\int_{X^3} (d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3))^p d\gamma(x_1, x_2, x_3)\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\int_{X^3} d(x_1, x_2)^p d\gamma(x_1, x_2, x_3)\Big)^{1/p} + \Big(\int_{X^3} d(x_2, x_3))^p d\gamma(x_1, x_2, x_3)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{X^2} d(x_1, x_2)^p d\gamma_{12}(x_1, x_2)\Big)^{1/p} + \Big(\int_{X^2} d(x_2, x_3))^p d\gamma_{23}(x_2, x_3)\Big)^{1/p} \\
&= W_p(\mu_1, \mu_2) + W_p(\mu_2, \mu_3).
\end{aligned}$$

Supposons que $W_p(\mu_n, \mu)$ tende vers 0. Soit $\gamma_n \in \Pi(\mu_n, \mu)$ tel que

$$W_p(\mu_n, \mu)^p = \int_{X\times X} d(x, y)^p d\gamma_n.$$

Soit maintenant $\varphi \in C(X)$ et soit $\omega$ un module de continuité de $\varphi$ on a alors

$$\begin{aligned}
\Big|\int_X \varphi d(\mu_n - \mu)\Big| &= \Big|\int_X (\varphi(x) - \varphi(y)) d\gamma_n(x, y)\Big| \\
&\leq \int_{X\times X} \omega(d(x, y)) d\gamma_n(x, y)
\end{aligned}$$

et donc

$$\limsup \Big|\int_X \varphi d(\mu_n - \mu)\Big| \leq \limsup \int_{X\times X} \omega(d(x, y)) d\gamma_n(x, y)$$

on extrait enfin de $(\gamma_n)$ une sous-suite (encore notée $\gamma_n$) qui converge faible $*$ vers une limite $\gamma$ et telle que la limsup dans le membre de droite de l'inégalité précédente est en fait une limite. On a alors

$$\int_{X\times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) = 0$$

et donc

$$\limsup \int_{X\times X} \omega(d(x,y))d\gamma_n(x,y) = \int_{X\times X} \omega(d(x,y))d\gamma_(x,y) = 0$$

ce qui montre bien que $(\mu_n)$ converge faible-$*$ vers $\mu$. Réciproquement, supposons maintenant que $(\mu_n)$ converge faible-$*$ vers $\mu$ et montrons que $W_p(\mu_n,\mu)\to 0$. Tout d'abord quitte à diviser $d$ par $\mathrm{diam}(X)$ on peut supposer que $d\leq 1$ et donc que $W_p^p\leq W_1$. Il suffit donc de montrer que $W_1(\mu_n,\mu)\to 0$. Or (en utilisant l'exercice 6.7) on a l'expression *duale* suivante pour $W_1$ :

$$W_1(\mu_n,\nu) = \sup\{\int_X \varphi\ d(\mu_n-\mu)\ :\ \ \varphi\text{-1-Lipschitz}\}$$

on déduit aisément du théorème d'Ascoli-Arzelà qu'il existe $\varphi_n$ 1-Lipschitz tel que

$$W_1(\mu_n,\nu) = \int_X \varphi_n d(\mu_n-\mu)$$

on peut en outre supposer que $\varphi_n(x_0)=0$ avec $x_0$ un point fixé de $X$ de sorte que $(\varphi_n)$ est uniformément bornée et uniformément équicontinue. En appliquant à nouveau le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut supposer (à une extraction près) que $(\varphi_n)$ converge uniformément vers un certain $\varphi$ et que $W_1(\mu_n,\mu)$ converge vers $\limsup W_1(\mu_n,\mu)$ on a alors, grâce à la convergence faible-$*$ de $(\mu_n)$ vers $(\mu)$

$$\limsup W_1(\mu_n,\mu) = \lim \int_X \varphi_n d(\mu_n-\mu) = 0$$

ce qui achève la preuve.

$\square$

# Bibliographie


[1] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

[3] K. Deimling, Nonlinear functional analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] N. Dunford, J. Schwartz, Linear operators, Wiley, 1971.

[5] L.C. Evans, Partial differential equations. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[6] L.C. Evans, R.F Gariepy, Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[7] S. Lang, Analyse réelle, Dunod, Paris, 1977.

[8] E. Lieb, M. Loss, Analysis. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[9] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations (Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 1 (1984), no.2, 109-145, no.4, 223-283, et Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), no.1, 145-201 et no.2, 45-121).

[10] F. Paulin, Topologie et Calcul différentiel, cours de la FIMFA.

[11] W. Rudin, Functional analysis. Second edition, New York, 1991.

[12] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, 3ème édition, Dunod, Paris, 1998.

[13] L. Schwartz, Topologie générale et analyse fonctionnelle, Hermann, 1970.

[14] C. Villani, Topics in optimal transportation, AMS, 2004.

[15] C. Villani, Optimal Transport, Old and New, Springer-Verlag, 2009.

[16] C. Villani, Cours d'intégration et d'analyse de Fourier, ENS Lyon, 2008, `http ://www.umpa.ens-lyon.fr/ cvillani/Cours/iaf-2007.html`

[17] K. Yosida, Functional Analysis, Springer Classics in Mathematics.

[18] C. Zuily, Distributions et équations aux dérivées partielles, Hermann, Paris, 1986.