Suite du cours : Théorie des opérateurs compacts

Propriétés spectrales des opérateurs cpts.

<u>Prop</u>: Soit E un esp normé, T un op cpt de E ds E

1- le sous esp $\mathrm{Ker}(I-T)$ est de dim $<\infty$

2- le sous esp $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermé

3- l'op $(I-T)$ est inversible ds $\mathcal{L}(E)$ ssi il est injectif

<u>Dem</u>:

1/ Posons $E_1 = \mathrm{Ker}(I-T)$, E_1 est un sg esp fermé.

On a $E_1 := \mathrm{Ker}(I-T) \subset E$.

si $x \in E_1$, alors

$Ix - Tx = 0 \Rightarrow Tx = x$ ie $T|_{E_1} = I_{E_1}$

$T(B_{E_1}(0,1)) = B_{E_1}(0,1)$, $B_{E_1}(0,1) \subset B_E(0,1)$.

$\underline{B_{E_1}(0,1)} \subset T(B_E(0,1))$

$\overline{B_{E_1}(0,1)} \subset \overline{T(B_E(0,1))}$, T est cpt.

$\overline{B_{E_1}(0,1)}$ est un fermé ds un cpt $\Rightarrow \overline{B}_{E_1}(0,1)$ est cpt

d'après le Th de Riesz $\mathrm{Ker}(I-T)$ est de dim $<\infty$

2/ Soit $y \in \overline{\mathrm{Im}(I-T)}$ et soit (x_n) une suite de E tq $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - Tx_n) := y$ on pose $y_n = x_n - Tx_n$

<u>1er cas</u>: si la suite (x_n) est bornée. Comme T est compact, on peut extraire une sg suite tq $Tx_n \longrightarrow z$ avec $z \in E$. Alors

$x_n = y_n + Tx_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(y_n + Tx_n)$