$\lim_{n\to+\infty} x_n = y + z$, par conséquent, $T(y+z) = z$.

D'un autre côté, on a $y = y + z - z$

$$y = (y+z) - T(y+z) \in Im(I-T)$$

Donc $Im(I-T)$ est fermée.

<u>$2^{ème}$ cas</u> : si la suite (x_n) n'est pas bornée.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = d(x_n, Ker(I-T))$.

On utilise le lemme suivant pour la suite de la démonstration.

<u>Lemme</u> : V un sev de dim $< \infty$ ds un ~~esp~~ esp normé E. Soit $\forall x \in E \Rightarrow \exists y \in V$ tq $d(x,y) = \|x-y\|$.

Comme $Ker(I-T)$ est de dim $< \infty$, il existe un point $z_n \in Ker(I-T)$ tq $\|x_n - z_n\| = d_n$

$$= d(x_n, Ker(I-T)).$$

La fct $x \rightsquigarrow d(x_n, x)$ atteint son minimum sur le cpt non vide $\overline{B}(x_n, \|x_n\|) \cap Ker(I-T)$.

(l'intersection de deux fermés cpts).

Si la suite (d_n) est bornée, on peut remplacer x_n par $x_n - z_n$ et se ramener au premier cas et $y \in Im(I-T)$

<u>Sinon</u> quitte à extraire une sf suite $d_n \longrightarrow +\infty$ notée encore $d_n \longrightarrow +\infty$

Posons $w_n = \dfrac{x_n - z_n}{d_n}$, $\|w_n\| = 1$

La suite (w_n) est bornée comme T est cpt, on peut extraire une sf suite $T\left(\dfrac{x_n - z_n}{d_n}\right) \longrightarrow u \in E$.

On a $\left(\dfrac{x_n - z_n}{d_n}\right) - T\left(\dfrac{x_n - z_n}{d_n}\right) \longrightarrow 0$