$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in E$ tq $\|u\| = 1$ et $\text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon$

Raisonnons par l'absurde i.e. supp l'op $(I - T)$ n'est pas surjectif.

Soit $E_1 = \text{Im}(I - T)$, supp $E_1 \neq E$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n = \text{Im}(I - T)^n$ et $E_0 = E$.

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ E_n est fermé, $E_{n+1} \subsetneq E_n$ et $E_n \neq E$ (car $(I - T)$ est injectif)

Pour $n = 0$ vraie

Supp qu'elle est vraie pour l'ordre n.

On a $T(E_n) \subset E_n$

si $y \in E_1$, $y = x - Tx$, $Ty = Tx - T^2 x$
$= Tx - T(Tx) \in E_1$

i.e T stabilise, on peut avoir $T(E_n) \subset E_n$

Donc T induit un op $T_n \in \mathcal{L}(E_n)$. Comme E_n est fermé $T_n(\bar{B}(E_n)) \subset T(\bar{B}(E)) \cap E_n$ (par construction)

donc T_n est un op cpt de E_n (car $(I - T)^n = \lambda^n I + P(T)$, $P(T)$ est un polynome d'op cpts) T_n

$E_{n+1} = (I_n - T_n) E_n$ (où I est l'identité de E_n).

en appliquant le point 2/ à T_n, E_{n+1} est fermé ds E_n par conséquent ds E.

Donc on a construit une suite $\downarrow$ de sg esp fermés.

De plus $(I - T)$ est injectif

$E_n \neq E_{n+1} \Rightarrow E_{n+1} = (I - T) E_n \neq E_{n+2} = (I - T) E_{n+1}$

d'après le lemme de Riesz, il existe une suite (u_n) tq $u_n \in E_n$ $\|u_n\| = 1$ et $d(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$