$Tu_n - Tu_m = u_n - v_{n,m}$ avec

$v_{n,m} = Tu_m + (I-T)u_n \in E_{n+1}$.

il en résulte $\forall n \neq m$, $\|Tu_n - Tu_m\| \geq \frac{1}{2}$

tout les points de la suite $(u_n) \in \overline{B}(E)$, donc ceci contredit le fait que $T(\overline{B}(E))$ est compacte car aucune suite extraite (Tu_n) n'est de Cauchy. Donc $(I-T)$ est surjectif.

* Montrons $(I-T)^{-1}$ est cont.

On raisonne par l'absurde. On supp qu'il existe une suite $x_n \not\to 0$ tq $\lim_{n\to+\infty}(x_n - Tx_n) = 0$.

On suppose qu'on peut extraire une ss suite tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \geq \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$

Soit $u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, T est cpt, on peut extraire une ss suite notée (Tu_n) tq $Tu_n \longrightarrow v \in E$

$\therefore$ On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = \lim_{n\to+\infty} u_n = v$

On a $\|v\| = 1$ par continuité de T, on a $Tv = 0$

donc $(I-T)$ n'est pas injectif

le Théorème qu'on vient de démontrer reste vrai pour le cas où E est un espace de Banach appelé sous le nom de Alternative de Fredholm

l'alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation $u - Tu = f$, qu'on verra dans la suite de ce cours, la démonstration du théorème est dans le livre de Brézis (Analyse fonctionnelle).